

10 Rovnice s parametrem – met.

Stručný přehled teorie

Rovnici s parametrem považujeme za zápis množiny všech rovnic, které bychom získali dosazením všech možných konstant za parametr (konstanty volíme z definičního oboru parametru).

Řešit rovnici s parametrem znamená přiřadit každé přípustné hodnotě parametru množinu kořenů.

Druhy rovnic s parametrem běžně probíraných při výuce matematiky na gymnáziu:

- lineární rovnice s jednou neznámou a jedním parametrem
- kvadratická rovnice s jednou neznámou a jedním parametrem
- soustava dvou lineárních rovnic o dvou neznámých s jedním parametrem

Met.: K pochopení úžasného nástroje, kterým rovnice s parametrem jsou, nástroje využívajícího nadhledu, s jakým se v tématu rovnic středoškolských studenti dosud nesetkali, by měl vyučující studenty dovést prostřednictvím konkrétních příkladů rovnic, na jaké jsou zvyklí.

Např. 1)	$4x + 1 = 4 + 2x$	$(a = 2)$
2)	$9x + 1 = 9 + 3x$	$(a = 3)$
3)	$25x + 1 = 25 + 5x$	$(a = 5)$
4)	$49x + 1 = 49 + 7x$	$(a = 7)$
.....		
n)	$144x + 1 = 144 + 12x$	$(a = 12)$
.....		

S trochou pomoci si studenti jistě všimnou, že tyto rovnice jsou téhož typu a dají se zapsat: $a^2x + 1 = a^2 + ax$, kde $a \in R$ je parametr. Pokud se naučí řešit tuto rovnici s parametrem, vyřeší tak najednou všechny rovnice téhož typu s konkrétními čísly, která lze dosadit všude za parametr.

Hned na této první řešené rovnici má vyučující možnost upozornit studenty na to, jak zásadním způsobem je důležité, aby si při prvním pohledu na každou rovnici, kterou dostanou k řešení, uvědomili, které proměnné představují neznámé a které představují parametry. I tak se bude řada studentů dopouštět omylu, když např. rovnici $a^2x + 1 = a^2 + ax$ s neznámou x a parametrem a označí za kvadratickou prostě proto, že si všimnou druhé mocniny...

Zápis řešení by měl vyučující studentům na několika příkladech předvést na tabuli, aby si zvykli na precizní, přehledný, srozumitelný postup, který jim umožní dojít k bezchybně napsanému závěru. Rovnice s parametrem mívají komplikované a obsáhlé postupy, v nichž se při nedbalých zápisech studenti mohou „ztratit“.

Velmi důležité je také naučit studenty rozlišovat s ohledem na hodnoty parametrů situace, kdy rovnice, kterou mají řešit, nemá smysl, a kdy tato rovnice nemá řešení. Je nutné precizně zpracovat podmínky, určit všechny hodnoty parametrů, pro které nabývají vypočítané kořeny zakázaných hodnot a zohlednit to v závěrech úloh.

V závěru musí být jasně uvedeno, pro které hodnoty parametru daná rovnice nemá smysl a jaká množina kořenů je přiřazena každé přípustné hodnotě parametru.

Základní poznatky

Řešte v R rce s parametrem $a \in R$:

Př. 1 $a^2x + 1 = a^2 + ax$

$a = 0$	$K = \emptyset$
$a = 1$	$K = R$
$a \in R - \{0; 1\}$	$K = \left\{ \frac{a+1}{a} \right\}$

Př. 2 $\frac{a+x}{3} = \frac{x-3}{a} + 2$

$a = 0$	rce nemá smysl
$a = 3$	$K = R$
$a \in R - \{0; 3\}$	$K = \{3 - a\}$

Př. 3 $a^2x^2 + ax - 1 = 0$

$a = 0$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{0\}$	$K = \left\{ \frac{1}{2a}(-1 \pm \sqrt{5}) \right\}$

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 4 $ax - \frac{2}{a^2} = \frac{1}{a}(4x + 1)$

$a = 0$	rce nemá smysl
$a = -2$	$K = R$
$a = 2$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{0; 2; -2\}$	$K = \left\{ \frac{1}{a(a-2)} \right\}$

Met.: Řeš.: $ax - \frac{2}{a^2} = \frac{1}{a}(4x + 1) \quad / \cdot a^2$

$a^3x - 2 = 4ax + a$

$a^3x - 4ax = a + 2$

$ax(a+2) \cdot (a-2) = a+2 \dots$ Pozn. Místo časté chyby – dělení rovnice výrazem $a+2$ a ztráta části řešení. Správně se musí řešení „rozvětvit“ podle hodnot parametru, kdy koeficient neznámé x je 0, nelze jím dělit a musíme dosadit, a kdy je tento koeficient od nuly různý a pak je dělení možné.

$a = 0$ nelze
(viz podm.)

$a = -2$
 $0x = 0$
 $K = R$

$a = 2$
 $0x = 4$
 $K = \emptyset$

$a \in R - \{-2; 0; 2\}$
 $x = \frac{a+2}{a \cdot (a+2) \cdot (a-2)} = \frac{1}{a \cdot (a-2)}$
 $K = \left\{ \frac{1}{a \cdot (a-2)} \right\}$

Závěr:

$a = 0$	RNS
$a = -2$	$K = R$
$a = 2$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{-2; 0; 2\}$	$K = \left\{ \frac{1}{a \cdot (a-2)} \right\}$

Př. 5 $\frac{x+a}{2} - \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2}$

$a = 0$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{0\}$	$K = \left\{ \frac{2-a^2}{a} \right\}$

Met.: Řeš.: $\frac{x+a}{2} - \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2} \quad / \cdot 2 \cdot (x+a)$

Podm.: $x+a \neq 0 \rightarrow x \neq -a$

$$x^2 + 2ax + a^2 - 4 = x^2 - a^2$$

$$2ax = 4 - 2a^2$$

$a = 0$	$a \neq 0$
$0x = 4$	$x = \frac{2-a^2}{a}$
$K = \emptyset$	Kdy $\frac{2-a^2}{a} = -a$?
	Když $2 = 0 \dots$ nelze
	$K = \left\{ \frac{2-a^2}{a} \right\}$

Je nutné ještě zjistit, zda existuje taková hodnota parametru a , pro kterou nabývá kořen $x = \frac{2-a^2}{a}$ zakázané hodnoty $-a$!!!
Tady se ukáže, že taková hodnota a neexistuje. Závěr úlohy bude zapsán stejně, ať student tento krok provede nebo ne. Přesto je nezbytné trvat na provedení tohoto kroku a pokud chybí, není řešení úplné, i když zápis závěru bude správný!!!

Závěr:

$a = 0$	$K = \emptyset$
$a \neq 0$	$K = \left\{ \frac{2-a^2}{a} \right\}$

Př. 6 $\frac{a^2(x-1)}{ax-2} = 2$

$a = 0$	$K = \emptyset$
$a = 2$	$K = R - \{1\}$
$a \in R - \{0; 2\}$	$K = \left\{ \frac{a+2}{a} \right\}$

Met.: Řeš.: $\frac{a^2(x-1)}{ax-2} = 2 \quad / \cdot (ax-2)$

Podm.: $ax-2 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{2}{a}$

$$a^2x - a^2 = 2ax - 4$$

$$a^2x - 2ax = a^2 - 4$$

$$ax \cdot (a-2) = (a-2) \cdot (a+2)$$

$a = 0$	$a = 2$	$a \in R - \{0; 2\}$
$0x = -4$	$0x = 0$	$x = \frac{(a-2) \cdot (a+2)}{a \cdot (a-2)} = \frac{a+2}{a}$
$K = \emptyset$	$K \subseteq R$	Kdy $\frac{a+2}{a} = \frac{2}{a}$?
	$x \neq \frac{2}{a} = \frac{2}{2} = 1$	Když $a = 0$. To ale v této větvi nemůže nastat.
	$K = R - \{1\}$	$K = \left\{ \frac{a+2}{a} \right\}$

Je nutné ještě zjistit, zda existuje taková hodnota parametru a , pro kterou nabývá kořen $x = \frac{a+2}{a}$ zakázané hodnoty $\frac{2}{a}$!!!

Závěr:

$a = 0$	$K = \emptyset$
$a = 2$	$K = R - \{1\}$
$a \in R - \{0; 2\}$	$K = \left\{ \frac{a+2}{a} \right\}$

Př. 7 $ax^2 + 4x - a - 5 = 0$

$a = 0$	$K = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$
$a \in (-4; -1)$	$K = \emptyset$
$a = -4$	$K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
$a = -1$	$K = \{2\}$
$a \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) - \{0\}$	$K = \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{(a+1)(a+4)}}{a} \right\}$

Met.: Řeš.:

I. $a = 0$ → rovnice bude jen lineární: $4x - 5 = 0$ → $x = \frac{5}{4}$;

II. $a \neq 0$ → rovnice je kvadratická, o jejích kořenech rozhoduje diskriminant: $D = 16 - 4 \cdot a \cdot (-a - 5) = 4a^2 + 20a + 16 = 4 \cdot (a^2 + 5a + 4) = 4 \cdot (a + 4) \cdot (a + 1)$

a) $D > 0$ ↔ $4 \cdot (a + 4) \cdot (a + 1) > 0$ ↔ $a \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) - \{0\}$

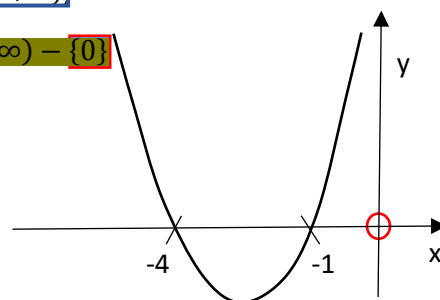
$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \cdot (a^2 + 5a + 4)}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{a^2 + 5a + 4}}{a};$$

b) $D = 0$ ↔ $(a = -4 \vee a = -1)$

$$a = -4 \rightarrow x = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2};$$

$$a = -1 \rightarrow x = \frac{-2}{-1} = 2$$

c) $D < 0$ ↔ $a \in (-4; -1)$
 $K = \emptyset$



Závěr:

$a = 0$	$K = \left\{ \frac{5}{4} \right\}$
$a = -4$	$K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$
$a = -1$	$K = \{2\}$
$a \in (-\infty; -4) \cup (-1; \infty) - \{0\}$	$K = \left\{ \frac{-2 \pm \sqrt{a^2 + 5a + 4}}{a} \right\}$
$a \in (-4; -1)$	$K = \emptyset$

Př. 8 $(x + a)^2 + 1 = 2a(x + a)$

$a \in (-1; 1)$	$K = \emptyset$
$a \in \{-1; 1\}$	$K = \{0\}$
$a \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$	$K = \left\{ \pm \sqrt{a^2 - 1} \right\}$

Rozšiřující cvičení

Př. 9 $\frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} = \frac{x}{a}$

$a = 0$	rce nemá smysl
$a = 1$	$K = \{-1\}$
$a = -2$	$K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
$a \in R - \{0; 1; -2\}$	$K = \left\{-1; \frac{a+1}{a-1}\right\}$

Met.: Řeš.: $\frac{x^2+1}{a^2x-2a} - \frac{1}{2-ax} = \frac{x}{a}$

Podm.: 1) $a \neq 0$; (pro $a = 0$ RNS)

2) $ax - 2 \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{2}{a}$

$$\frac{x^2+1}{a(ax-2)} + \frac{1}{ax-2} = \frac{x}{a} \quad / \cdot a \cdot (ax-2)$$

$$x^2 + 1 + a = ax^2 - 2x$$

$$(a-1)x^2 - 2x - a - 1 = 0$$

I. $a = 1 \rightarrow$ rovnice bude jen **lineární**: $-2x - 1 - 1 = 0 \rightarrow x = -1$

II. $a \neq 1 \wedge a \neq 0 \rightarrow$ rovnice je **kvadratická**, o jejích kořenech **rozhoduje diskriminant D**:

$$D = 4 - 4 \cdot (a-1) \cdot (-a-1) = 4 + 4 \cdot (a^2 - 1) = 4 + 4a^2 - 4 = 4a^2;$$

a) $D > 0 \leftrightarrow a \neq 0 \wedge a \neq 1$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4a^2}}{2 \cdot (a-1)} = \frac{2 \pm 2|a|}{2 \cdot (a-1)} = \frac{1 \pm a}{a-1} \quad x_1 = \frac{1+a}{a-1}; \quad x_2 = \frac{1-a}{a-1} = -1$$

a₁) $x_1 = \frac{1+a}{a-1}$

Kdy $x_1 = \frac{2}{a}$?

$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{2}{a}$$

$$a^2 + a = 2a - 2$$

$a^2 - a + 2 = 0$ nemá v R řešení, x_1 tedy pro žádné a nenabývá zakázané hodnoty;

a₂) $x_2 = \frac{1-a}{a-1} = -1$

Kdy $x_2 = \frac{2}{a}$?

$$-1 = \frac{2}{a}$$

$a = -2$... pro parametr $a = -2$ je kořen $x_2 = -1$ zakázaný. Znamená to, že v tom případě bude mít rovnice **pouze kořen** x_1 , který má hodnotu

$$x_1 = \frac{1+a}{a-1} = \frac{1-2}{-2-1} = \frac{1}{3}$$

b) $D = 0$ nelze, viz podmínka

c) $D < 0$ nelze ($D = 4a^2$)

Závěr:

$a = 0$	RNS
$a = 1$	$K = \{-1\}$
$a = -2$	$K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$
$a \in R - \{-2; 0; 1\}$	$K = \left\{-1; \frac{a+1}{a-1}\right\}$

Př. 10 $x - y = 1$

$3x + ay = a$

$a = -3$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{-3\}$	$K = \left\{ \left[\frac{2a}{a+3}; \frac{a-3}{a+3} \right] \right\}$

Met.: Řeš.:

$x - y = 1 \quad / \cdot (-3)$

$3x + ay = a$

$(a + 3)y = a - 3$

$a = -3$

$0x = -6$

$K = \emptyset$

$a \neq -3$

$y = \frac{a-3}{a+3} \rightarrow x = y + 1 \rightarrow x = \frac{a-3}{a+3} + 1 = \frac{a-3+a+3}{a+3} = \frac{2a}{a+3}$

$K = \left\{ \left[\frac{2a}{a+3}; \frac{a-3}{a+3} \right] \right\}$

Závěr:

$a = -3$	$K = \emptyset$
$a \neq -3$	$K = \left\{ \left[\frac{2a}{a+3}; \frac{a-3}{a+3} \right] \right\}$

Př. 11 $x + (a - 1)y = 1$
 $(a + 1)x + 3y = -1$

$a = -2$	$K = \{[1 + 3t; t], t \in R\}$
$a = 2$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{-2; 2\}$	$K = \left\{ \left[\frac{1}{2-a}; \frac{1}{a-2} \right] \right\}$

Met.: Řeš.:

$x + (a - 1)y = 1 \quad / \cdot [-(a + 1)]$

$(a + 1)x + 3y = -1$

$-(a^2 - 1)y + 3y = -a - 1 - 1$

$(4 - a^2)y = -(a + 2)$

$(a^2 - 4)y = a + 2$

$(a + 2) \cdot (a - 2)y = a + 2$

Chceme-li použít sčítací metodu řešení, musíme jednu z rovnic násobit výrazem s neznámou. Pak je ale nezbytné určit, jaké bude mít soustava řešení v případě, že by se tento výraz rovnal nule. Řešením pro $a = -1$ je $\left[\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right]$, což odpovídá větvi s parametrem $a \in R - \{-2; 2\}$.

$a = -2$

$0y = 0$

$K \subseteq R \times R$

$y = t, t \in R$

$x = 1 + 3t$

$K = \{[1 + 3t; t], t \in R\}$

$a = 2$

$0y = 4$

$K = \emptyset$

$a \in R - \{-2; 2\}$

$y = \frac{1}{a-2}$

$x = 1 - (a - 1)y = 1 - (a - 1) \cdot \frac{1}{a-2} = \frac{a-2-a+1}{a-2} = \frac{1}{2-a}$

$K = \left\{ \left[\frac{1}{2-a}; \frac{1}{a-2} \right] \right\}$

Závěr:

$a = -2$	$K = \{[1 + 3t; t], t \in R\}$
$a = 2$	$K = \emptyset$
$a \in R - \{-2; 2\}$	$K = \left\{ \left[\frac{1}{2-a}; \frac{1}{a-2} \right] \right\}$