# **11 Pravoúhlý trojúhelník, Pythagorova a Euklidovy věty – met.**

**Stručný přehled teorie**

γ

*vc*

*c*

α

β

α

β

α

*b*

*a*

K

C

B

A

 γ = 90˚

 *a,b*...odvěsny

 *c*…přepona

 *ca,cb*...úseky na přeponě

*ca*

*Cb*

**Eukleidovy věty:** a) **o výšce**:$∆AKC \~ ∆CKB$ $\frac{v\_{c}}{c\_{b}}=\frac{c\_{a}}{v\_{c}}$ **** $v\_{c}^{2}=c\_{a}.c\_{b}$

*uu*

Obsah čtverce sestrojeného nad výškou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z obou úseků přepony.

b) **o odvěsně**: $∆ABC \~ ∆ACK$ 1) $\frac{b}{c}=\frac{c\_{b}}{b}$ **** $b^{2}=c.c\_{b}$ 2) Analogicky $\frac{a}{c}=\frac{c\_{a}}{a}$ **** $a^{2}=c.c\_{a}$

*uu*

Obsah čtverce sestrojeného nad odvěsnou pravoúhlého trojúhelníku se rovná obsahu obdélníku sestrojeného z přepony a přilehlého úseku.

**Pythagorova věta:** a2 = c.ca b2 = c.cb

****  **a2+b2** = c.ca + c.cb = c.( ca+cb ) **= c2**

Obsah čtverce sestrojeného nad přeponou pravoúhlého trojúhelníku se rovná součtu obsahů čtverců sestrojených nad oběma odvěsnami.

**Goniometrické funkce ostrého úhlu:**

****; ****;

** **; **  .**

Met.: Znalosti související s pravoúhlým trojúhelníkem a jeho vlastnostmi patří k nejzákladnějším v geometrii. V průběhu celé středoškolské matematiky se jich velmi často využívá při probírání nejrůznějších (i negeometrických) témat.

 Studenti by měli být vedeni k tomu, aby • v libovolném pravoúhlém trojúhelníku s libovolně označenými vrcholy a stranami dokázali s jistotou pracovat s větou Pythagorovou i oběma větami Euklidovými a využívat jich při řešení různých úloh; • při řešení úloh využívali dostatečně velkých a přehledných náčrtů (bohužel spousta učitelů na základních školách k tomu žáky nevede, takže studenti často kreslí malé nepřehledné náčrty tužkou (nebo dokonce propisovačkou), nejsou zvyklí pomoci si barevným vyznačením zadaných prvků, pojmenovávají hledané prvky jinak v náčrtu a jinak ve výpočtech ...; • s pomocí Pythagorovy věty vypočítali (a uložili do paměti!!!) velikost výšky rovnostranného trojúhelníku o straně délky *a* $\left(v=a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, velikost úhlopříčky ve čtverci o straně délky *a* $\left(u=a\sqrt{2}\right)$, velikost tělesové úhlopříčky krychle o hraně délky *a* $\left(u=a\sqrt{3}\right)$, apod. • dokázali použít pravoúhlý trojúhelník k určení ostatních základních goniometrických funkcí ostrého úhlu, je-li zadána jedna z těchto funkcí; • dokázali využít pravoúhlé trojúhelníky vzniklé jako polovina rovnostranného trojúhelníku, příp. polovina čtverce, k výpočtu (a uložení do paměti!!!) všech základních goniometrických funkcí pro úhly 30°, 45°, 60°. Tato znalost se jim bude hodit později při práci s libovolnými celočíselnými násobky těchto úhlů ...

Základní poznatky:

# Př. 1 Je dán pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu C a dále:

a) ca = 4 cm, cb = 9 cm b) b = 5 cm, c = 13 cm

Určete početně (a výsledek ověřte graficky) prvky: a, b, c, ca, cb, vc, α, β.

[a)  cm, cm,13 cm, 4 cm, 9 cm, 6 cm, 33°41´, 56°19´ b) 12 cm, 5 cm, 13 cm, cm, cm, cm, 67°23´, 22°37´]

Př. 2 Je dána úsečka |AB| = *a* (např. 6 cm). a) Rozdělte úsečku AB v poměru 2:3.

 b) Sestrojte úsečku |AX| = |AB|, |AY| = |AB|.

Př. 3 MA–podzim 2016 V každé zobrazené situaci je šířka řeky označena písmenem s a vzdálenost AB je 50 m. K situacím na obrázcích a), b) přiřaďte odpovídající šířku řeky s, zaokrouhlenou na celé metry.

a) b)

A) méně než 28 m B) 30 m C) 32 m D) 34 m E) více než 36 m

 [a) C, b) B]

Př. 4 Sestrojte úsečku délkycm užitím:

a) Pythagorovy věty b) Eukleidovy věty o výšce c) Euleidovy věty o odvěsně

Správnost výsledku ověřte výpočtem na kalkulačce a přeměřením.

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 5 Je dána kružnice k (S, r) a bod M, který má od středu S kružnice k vzdálenost │SM│= d > r. Z bodu M vedené tečny t1, t2 se dotýkají kružnice k v bodech T1, T2. Určete délku tětivy │T1T2│a její vzdálenost od středu kružnice k.

Př. 6 Určete obsah obdélníku, jehož délka a = 84 cm, má-li jeho úhlopříčka délku o 72 cm větší než je jeho šířka. [1092 cm2]

Př. 7 Dvě tětivy AB a CD kružnice k (S, 7 cm), které mají délky |AB| = 6 cm, |CD| = 10 cm se protínají, kolmo v bodě T. Vypočítejte vzdálenost bodu T od středu kružnice k. [8 cm]

Př. 8 Jakou část zemského povrchu lze vidět z kosmické lodi letící ve výšce 250 km nad povrchem Země? [9 670 650 km2 ]

Př. 9 Sestrojte úsečku délky: a) cm; b)  (a, b, c … zadáno); c)  (a, b, jednotková úsečka …zadáno); d) $x=\frac{\sqrt{a^{2}+b^{2}}-c}{d}$ .

Volte délky úseček např. a = 8 cm, b = 2 cm, c = 4 cm, d = 3 cm, jednotková úsečka má délku 1 cm. Správnost konstrukce ověřte výpočtem a přeměřením.

Př. 10 Sestrojte čtverec stejného obsahu, jako je obsah zadaného:

a) obdélníku se stranami *a, b*; b) trojúhelníku se stranami *a, b, c.*

Volte délky úseček např. a = 6 cm, b = 4 cm, c = 7 cm. Správnost konstrukce ověřte výpočtem a přeměřením. (Zadáním stran trojúhelníku je po jeho sestrojení známá také délka kterékoliv jeho výšky.)

 [a) x = cm b) x = cm]

Př. 11 Sestrojte kružnici, která je soustředná s daným kruhem o poloměru 4 cm a dělí ho na dvě části o stejném obsahu. [r = 2cm]



Př. 12 MA – 2017 Ve větru se zlomil 36 m vysoký strom. Vrchol zlomeného stromu se dotýká země, a to ve vzdálenosti 12 m od paty kmene stromu. (Tloušťku kmene stromu zanedbáváme.) Vypočtěte, v jaké výšce h nad zemí se strom zlomil.

[h = 16 m]

Rozšiřující cvičení

Př.13 Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky a = 22 cm, c = 12 cm, je-li jeho výška o 1 cm menší než délka ramene. [204 cm2]

Př. 14 Je dána kružnice k (S; 5 cm) a bod M, který má od středu S kružnice k vzdálenost d = 10 cm. Jakou vzdálenost od středu S má přímka p, která prochází bodem M a vytíná na kružnici k tětivu délky n = 6 cm? [4 cm]

Př. 15 Kružnice o poloměru r je opsána rovnoramenným trojúhelníkem ABC, jehož výška v = 5r. Vypočítejte délku základny AB tohoto trojúhelníku. $ \left[\left.\frac{2r\sqrt{15}}{3}\right]\right.$