

## 12 Shodná zobrazení – met.

### Stručný přehled teorie

**Shodné zobrazení** – je zobrazení, které každým dvěma bodům  $X, Y$  (tzv. vzorům) přiřazuje body  $X', Y'$  (tzv. obrazy) tak, že  $|X'Y'| \cong |XY|$ .

**Shodnost rovinných útvarů:** dva rovinné útvary jsou shodné, jestliže je můžeme přemístit tak, aby se přesně kryly

**Shodnost**

- **přímá** – útvary se dají v rovině přemístit tak, aby se překrývaly
- **nepřímá** – aby se útvary po přemístění překrývaly, je nutno jeden z nich nejprve „obrátit v prostoru“

### Věty o shodnosti trojúhelníků:

**sss...** dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve všech třech stranách

**sus...** dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu jimi sevřeném

**usu...** dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se v jedné straně a v úhlech k ní přilehlých

**Ssu...** dva trojúhelníky jsou shodné, shodují-li se ve dvou stranách a úhlu naproti větší z nich

### Druhy shodných zobrazení:

#### **Středová souměrnost** - $S_s : X \rightarrow X'$

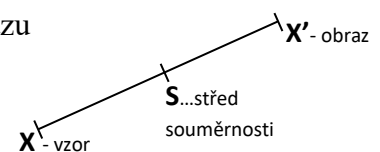
– je to shodné zobrazení, které přiřazuje:

- 1) každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že bod  $S$  je středem úsečky  $XX'$ ,
- 2) bodu  $S$  bod  $S' = S$ , bod  $S$  je tedy samodružný bod (tj. bod, pro nějž platí:  $X' = X$ )

– jde o přímou shodnost

– je jednoznačně určena středem souměrnosti  $S$  nebo dvojicí vzoru a obrazu

– přímky procházející středem souměrnosti jsou samodružné přímky



#### **Osová souměrnost** - $O_o : X \rightarrow X'$

– je to shodné zobrazení, které přiřazuje

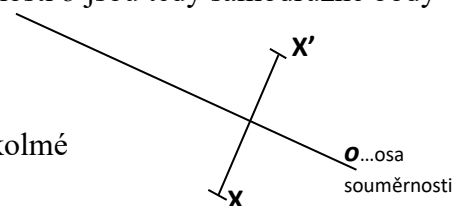
- 1) každému bodu  $X \notin o$  bod  $X'$  tak, že přímka  $XX'$  je kolmá k ose souměrnosti  $o$  a střed úsečky  $XX'$  leží na  $o$ ,

- 2) každému bodu  $X \in o$  bod  $X' = X$ , body ležící na ose souměrnosti  $o$  jsou tedy samodružné body

– jde o nepřímou shodnost

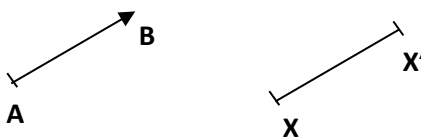
– je jednoznačně určena osou souměrnosti  $o$  nebo dvojicí vzoru a obrazu

– samodružnými přímkami jsou osa  $o$  a všechny přímky na ni kolmé



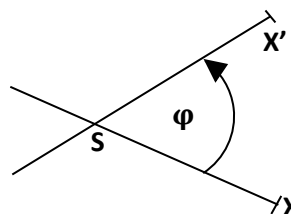
## Posunutí (translace) - $T_{(AB)} : X \rightarrow X'$

- je to shodné zobrazení, které každému bodu  $X$  přiřazuje bod  $X'$  tak, že orientované úsečky  $\overrightarrow{XX'}$  a  $\overrightarrow{AB}$  mají stejnou délku a směr
- jde o přímou shodnost
- je jednoznačně určeno velikostí a směrem posunutí nebo dvojicí vzoru a obrazu
- samodružnými přímkami jsou všechny přímky rovnoběžné se směrem posunutí



## Otáčení (rotace) - $R_{(S,\varphi)} : X \rightarrow X'$

- je to shodné zobrazení, které přiřazuje:
  - 1) každému bodu  $X \neq S$  bod  $X'$  tak, že  $|X'S| = |XS|$  a orientovaný úhel  $XSX'$  má velikost  $\varphi$ ,
  - 2) bodu  $S$  bod  $S' = S$ , střed otáčení  $S$  je tedy samodružný bod
- je jednoznačně určeno středem  $S$  a úhlem otáčení  $\varphi$
- jde o přímou shodnost
- otáčení nemá samodružné přímky



Pozn.: **kladný** smysl otáčení – **proti** směru pohybu hodinových ručiček  
**záporný** smysl otáčení – **po** směru pohybu hodinových ručiček

## Identita

- je to shodné zobrazení, ve kterém se každý bod zobrazí sám na sebe

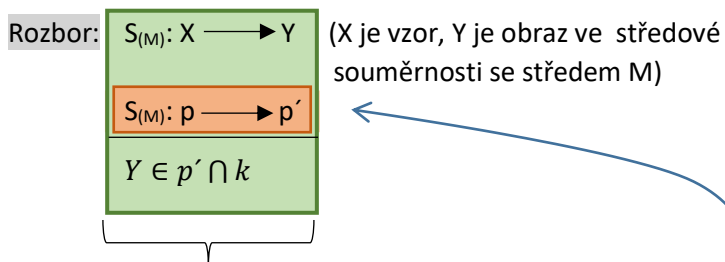
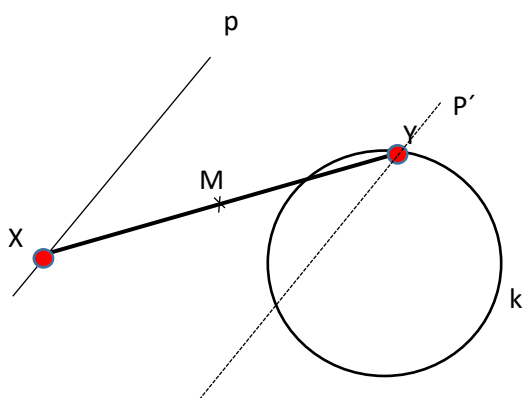
**Met.:** Geometrie patří u středoškolských studentů z řady důvodů k méně oblíbeným a značně obávaným tématům. Hodně studentů zůstává před úlohami z geometrie bezradnými s pocitem, že každá úloha vyžaduje zcela jiný přístup, že nedokážou úlohu „uchopit“ a smysluplně vykročit k řešení. Přitom správně provedený první krok už zpravidla otevře cestu k celému řešení. Studenti budou nepochybně vnímat velmi pozitivně, jestliže jim vyučující pomůže tento první krok a tuto cestu zjednodušit, zpřehlednit a zpřístupnit.

Většinu úloh souvisejících ve středoškolské planimetrii se shodnými zobrazeními lze rozdělit do dvou základních skupin. Jejich odlišujícím prvkem je zejména rozbor, který je pro každou z těchto skupin typický. Navíc pokud se rozbor správně a precizně zapíše, může obsahovat vždy **na obdobném místě „pokyn“ k prvnímu kroku** a tím k vykročení do řešení úlohy.

Úlohy prvního typu: Mají třířádkový rozbor, přičemž **druhý řádek** představuje zmiňované „vykročení“ do řešení úlohy

**Př.** Je dána kružnice  $k$ , přímka  $p$  a bod  $M$ . Sestrojte úsečku  $XY$  tak, aby  $X \in p$ ,  $Y \in k$  a aby  $M$  byl střed  $XY$ .

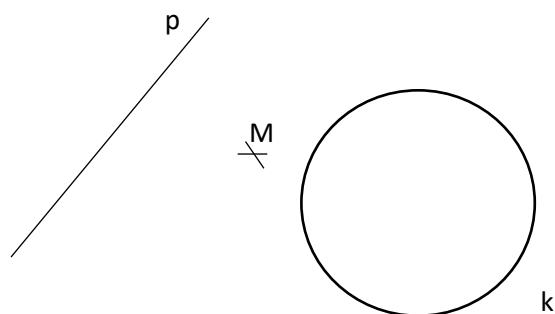
Náčrt: (nakreslíme splněný úkol)



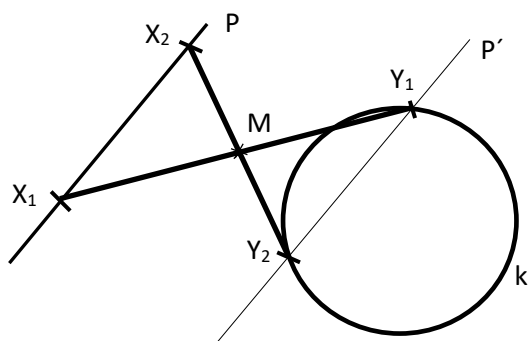
Typický třířádkový rozbor úloh prvního typu:

1. řádek: z náčrtu – určíme zobrazení  $S_{(M)}$  a dva body představující v tomto zobrazení vzor  $X$  a obraz  $Y$ ;
2. řádek: místo vzoru  $X$ , jehož polohu na  $p$  neznáme, najdeme obraz  $p'$  útvaru  $p$ , na němž vzor  $X$  leží
3. řádek: obraz  $Y$  leží v průniku  $p' \cap k$

Skutečná výchozí situace:



Konstrukce:



Víme, že  $Y$  je obraz  $X$  ve středové souměrnosti  $S_M$ . Protože ale nevíme, kde na se přímce  $p$  bod  $X$  nachází, zobrazíme celou přímku  $p$  – každý bod na  $p$  si „najde“ svůj obraz na  $p'$  a  $X$  si „najde“ svůj obraz  $Y$  v průsečíku  $k \cap p'$ .

Jak napsat postup?

Jednotlivé řádky postupu musí mít předepsanou strukturu:

- jako první se uvede pořadí prováděného kroku;
- následuje označení prvku, který rýsuje (tímto prvkem může být pouze bod, přímka nebo její část a kružnice) a středník nebo dvojtečka;
- nakonec se uvedou všechny vlastnosti použité při konstrukci prvku.

Postup:

1.  $p, k, M$  – zadané útvary
2.  $p': S_{(M)}: p \longrightarrow p'$
3.  $Y: Y \in k \cap p'$
4.  $X: S_{(M)}: Y \longrightarrow X$
5.  $XY$

Tato úloha je určitě vhodná k tomu, aby vyučující se studenty prodiskutoval, kolik může mít řešení a na čem počet řešení závisí. Stačí ale pouze ústní diskuse. Jinak se obecně středoškolské úlohy v planimetrii omezují pouze na náčrt, rozbor, konstrukci a postup.

Základní poznatky:

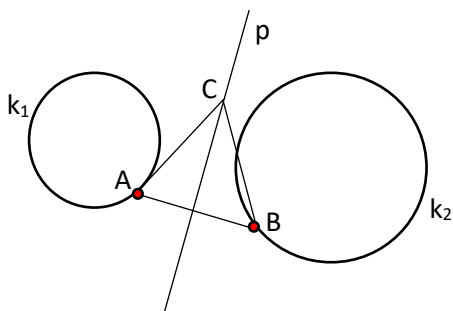
- Př. 1** Sestrojte kružnici  $k(S; 2\text{ cm})$  a bod  $X$  tak, že  $|SX| = 4\text{ cm}$ . Sestrojte
- obraz  $k_1$  kružnice  $k$  v středové souměrnosti s bodem  $X$ ;
  - obraz  $k_2$  kružnice  $k$  v posunutí  $T_{SX} = T(\overrightarrow{SX})$ ;
  - obraz  $k_3$  kružnice  $k$  v osové souměrnosti s přímkou  $t$ , která je tečnou kružnice  $k$ ;
  - obraz  $k_4$  kružnice  $k$  v otočení o  $-60^\circ$  se středem v bodě  $X$ .

Typové příklady standardní náročnosti

- Př. 2** Jsou dány kružnice  $k_1, k_2$  a přímka  $p$ . Sestrojte všechny rovnostranné  $\triangle ABC$ , jejichž těžnice  $t_c$  je částí přímky  $p$  a vrcholy  $A, B$  leží postupně na kružnicích  $k_1, k_2$ .

**Met.:** Náčrt:

**Rozbor:**



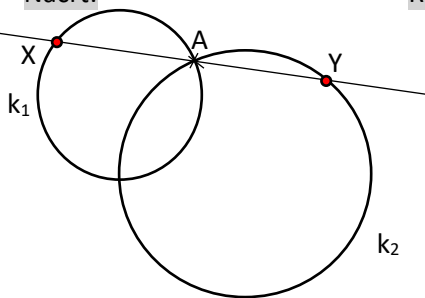
$O_{(p)}: A \longrightarrow B$
$O_{(p)}: k_1 \longrightarrow k_1'$
$B \in k_2 \cap k_1'$

... první krok postupu ...

- Př. 3** Společným bodem dvou kružnic  $k_1, k_2$  vedte přímku tak, aby na ní kružnice vyřaly shodné tětivy.

**Met.:** Náčrt:

**Rozbor:**



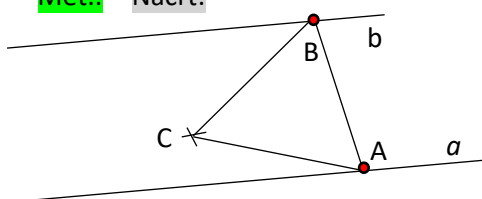
$S_{(A)}: X \longrightarrow Y$
$S_{(A)}: k_1 \longrightarrow k_1'$
$Y \in k_2 \cap k_1'$

... první krok postupu ...

- Př. 4** Jsou dány rovnoběžky  $a, b$  a mimo ně bod  $C$ . Sestrojte rovnostranný  $\triangle ABC$  tak, aby  $A \in a, B \in b$ .

**Met.:** Náčrt:

**Rozbor:**



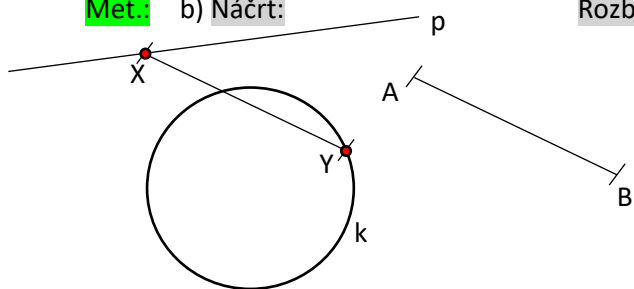
$R_{(C;60^\circ)}: A \longrightarrow B$
$R_{(C;60^\circ)}: a \longrightarrow a'$
$B \in a' \cap b$

... první krok postupu ...

- Př. 5** Sestrojte úsečku dané velikosti a směru (tj. dána úsečka  $AB$ ) tak, aby její krajní body ležely na
- dvou daných kružnicích;
  - dané kružnici a dané přímce.

**Met.:** b) Náčrt:

**Rozbor:**



$T_{(AB)}: X \longrightarrow Y$
$T_{(AB)}: p \longrightarrow p'$
$Y \in p' \cap k$

... první krok postupu ...

- Př. 6** Jsou dány soustředné kružnice  $k_1, k_2$  a uvnitř menší z nich bod  $C$ . Sestrojte rovnostranný  $\triangle ABC$  tak, aby  $A \in k_1, B \in k_2$ .  
Řeš.: analogicky ...

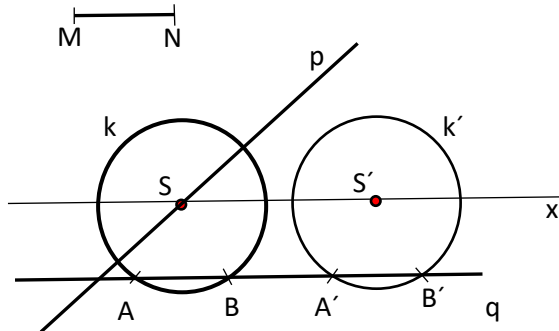
**Úlohy druhého typu:**

Vyžadují k zadaným prvkům sestavit rovinný útvar  $U$ , který má splňovat celou řadu vlastností. Všechny najednou ovšem nelze splnit okamžitě. Je třeba navést studenty na myšlenku, že je v našich silách sestavit pomocný útvar  $U'$ , který většinu vlastností, zpravidla až na jednu, splňuje. K požadovanému útvaru  $U$  se pak dostaneme užitím vhodného shodného zobrazení aplikovaného na pomocný útvar  $U'$ . Výběr vlastností, které se při konstrukci pomocného útvaru vzdáme, by se mohl zdát obtížným. Je však zcela logický a studentům by neměl dělat při dobrém počátečním vysvětlení problémy. Jestliže se požadovaný útvar  $U$  získá z  $U'$  užitím shodného zobrazení, musí už  $U'$  vykazovat požadovaný tvar i velikost. Vlastnost, které se při konstrukci  $U'$  vzdáme, tedy nesmí mít na tvar ani velikost výsledného útvaru vliv. Rozbor úloh druhého typu je obsáhlejší, ale i v něm se vždy na obdobném místě vyskytuje řádek odpovídající „vykročení“ do řešení úlohy.

- Př.** Jsou dány různoběžky  $p, q$  a úsečka  $MN$ . Sestrojte kružnici  $k$ , která má poloměr  $r = |MN|$ , střed  $S$  leží na přímce  $p$  a vytíná na přímce  $q$  tětivu  $AB$  tak, že  $|AB| = |MN|$ .

**Met.:**

**Náčrt:**



**Rozbor:**

**Hledaný útvar: kružnice  $k(S; r)$**

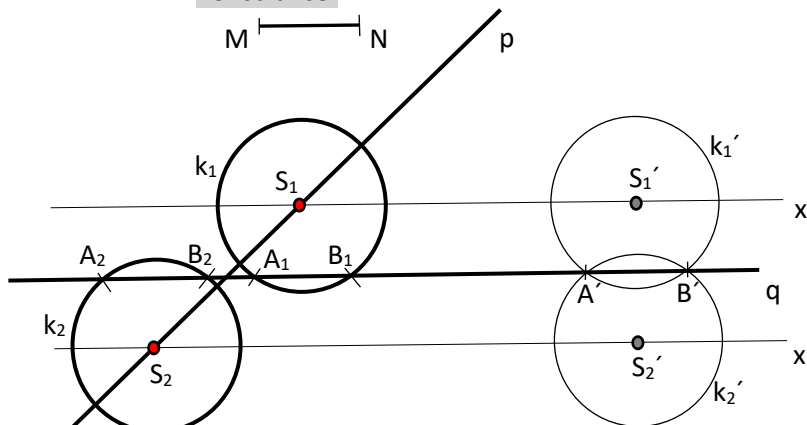
- Vlastnosti: 1)  $r = |MN|$ ;  
2)  $k \cap q = \{A, B\}$ , kde  $|AB| = |MN|$ ;  
3)  $S \in p$

**Pomocný útvar: kružnice  $k'(S'; r)$**

Vlastnosti: 1), 2).

$k \dots T_{(S'S)}: k' \longrightarrow k$   
( $S \in x \cap p$ , kde  $(x \parallel q) \wedge (S' \in x)$ )

**Konstrukce:**



**Postup:** 1.  $p, q, MN$  – zadané

2.  $k'(S'; r): (r = |MN|) \wedge (k' \cap q = \{A', B'\}, \text{kde } |A'B'| = |MN|)$

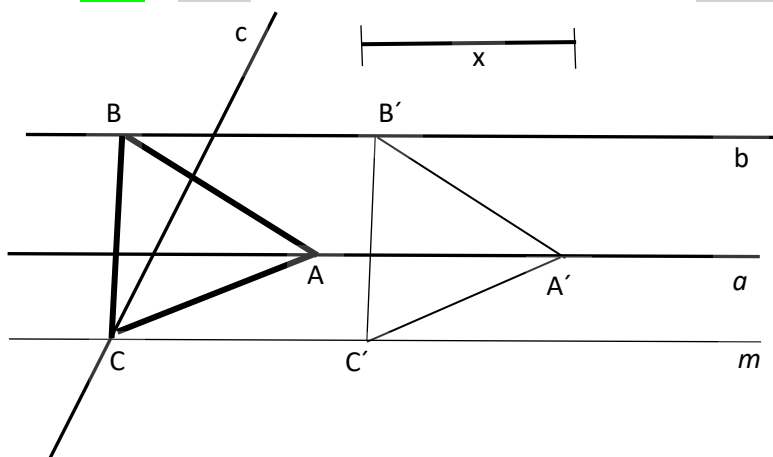
3.  $x: (S' \in x) \wedge (x \parallel q)$

4.  $S: S \in x \cap p$

5.  $k(S; |MN|)$

**Př. 7** Jsou dány rovnoběžky  $a$ ,  $b$  a jejich příčka  $c$ . Sestrojte rovnostranný trojúhelník, jehož strana má danou velikost  $x$  tak, aby každý jeho vrchol ležel na jedné z daných přímek.

**Met.:** Náčrt:



**Rozbor:** Hledaný útvar: **trojúhelník ABC**

- Vlastnosti: 1)  $|AB| = |BC| = |AC| = x$   
 2)  $A \in a$   
 3)  $B \in b$   
 4)  $C \in c$

**Pomocný útvar: trojúhelník A'B'C'**

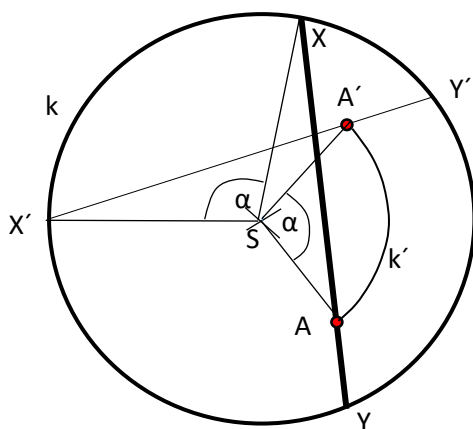
Vlastnosti: 1), 2), 3)

$\Delta ABC \dots T_{(c;c)}: \Delta A'B'C' \longrightarrow \Delta ABC$   
 $(C \in m \cap c, \text{kde } (m \parallel a) \wedge (C' \in m))$

.....

**Př. 8** Je dána kružnice  $k(S; 3 \text{ cm})$  a bod  $A$  tak, že  $|AS| = 2 \text{ cm}$ . Vedte bodem  $A$  těživu  $XY$  tak, aby  $|XY| = 5 \text{ cm}$ .

**Met.:** Náčrt:



**Rozbor:**

Hledaný útvar: **úsečka XY**

- Vlastnosti: 1)  $X \in k$   
 2)  $Y \in k$   
 3)  $|XY| = 5 \text{ cm}$   
 4)  $A \in XY$

**Pomocný útvar: úsečka X'Y'**

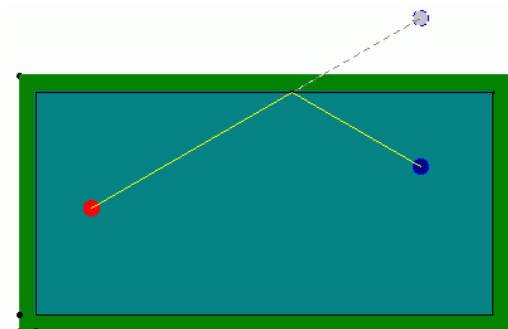
Vlastnosti: 1), 2), 3)

$XY \dots R_{(S,A)}: X'Y' \longrightarrow XY$   
 $(\alpha = |\sphericalangle ASA'|, \text{kde } A' \in X'Y' \cap k'(S, |SA|))$

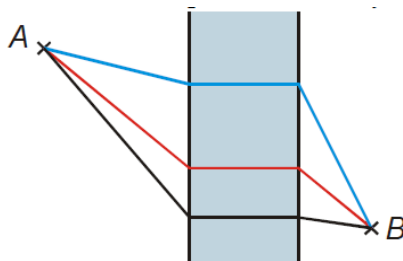
.....

## Rozšiřující cvičení

- Př. 9** V kulečnicku platí při odrazu koule, že úhel odrazu je roven úhlu dopadu, viz obrázek. Umíte sestavit trajektorii koule, která se má odrazit od dvou hran se společným rohem? Jakého principu využíváte?  
[Realisticky.cz – 3.5.2]



- Př. 10** Vyhledejte místo na řece šířky  $d$ , ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky, tak aby cesta z obce A do obce B, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší. Předpokládejme, že šířka řeky se v odpovídajícím úseku nemění.  
[Realisticky.cz – 3.5.7]



- Met.:** Základní myšlenkou řešení úloh 9 a 10 je skutečnost, že nejkratší vzdálenost mezi dvěma body je vzdálenost na přímce ...