

13 Podobná zobrazení – met.

Stručný přehled teorie

PODOBNOST:

- Dva rovinné útvary jsou podobné, jestliže poměry délek všech dvojic odpovídajících si úseček těchto útvarů se rovnají témuž číslu $k > 0$ (k – poměr podobnosti).
- Každé dva odpovídající si úhly podobných útvarů jsou shodné.

Podobnost útvarů se opírá o podobnost trojúhelníků

- Věty o podobnosti trojúhelníků (sss, sus, uu, Ssu)
- Užití podobnosti trojúhelníků (řešení některých praktických úloh, redukční úhel, ...)

PODOBNÉ ZOBRAZENÍ:

- Podobné zobrazení je takové zobrazení, které každým dvěma bodům X, Y (vzorům) přiřazuje body X', Y' (obrazy) tak, že $|X'Y'| = k \cdot |XY|$, kde k – poměr podobnosti ($k > 0$)

STEJNOLEHLOST (HOMOTETIE) $H_{(S,k)}$

- Druh podobného zobrazení.
- Je určena středem stejnohlosti S a koeficientem stejnohlosti κ ($\kappa \in R - \{0\}$).

Body roviny zobrazuje takto:

- 1) Středu S přiřazuje tentýž bod S . Tedy $H_{(S,\kappa)}: S \rightarrow S' = S$
(S – jediný samodružný bod)
- 2) Každému bodu X roviny různému od S přiřazuje bod X' tak, že
 - a) je-li $\kappa > 0$, pak $X' \in \overrightarrow{SX}$ a $|SX'| = \kappa \cdot |SX|$
 - b) je-li $\kappa < 0$, pak $X' \in (\overrightarrow{SX})'$ a $|SX'| = |\kappa| \cdot |SX|$

Pozn.:

1. Samodružné přímky jsou všechny přímky procházející středem stejnohlosti.
2. Stejnohlelé úsečky (přímky) jsou vzájemně rovnoběžné.
3. Stejnohlost zachovává poměr délek úseček.

STEJNOLEHLOST KRUŽNIC

- Každé dvě nesoustředné kružnice s různými poloměry jsou dvěma způsoby stejnohlelé (nutná znalost konstrukce středů stejnohlosti).

Pozn.: Soustředné kružnice jsou z hlediska stejnohlosti nezajímavé jednak vzhledem k umístění středu stejnohlosti do společného středu kružnic a jednak vzhledem k absenci společných tečen, pokud kružnice mají různé poloměry.
 - Mají-li tyto kružnice společné tečny, pak tyto tečny procházejí příslušnými středy stejnohlosti (nutná znalost konstrukce společných tečen).
-

Met.: S tématem podobnosti se studenti setkali už na základní škole. Měli by tedy chápat, co znamená, že jsou dva útvary U a U' podobné. Měli by vědět, že koeficient podobnosti představuje kladné reálné číslo, které svojí hodnotou určuje, zda v případě, že je U vzor a U' obraz, dochází k zvětšení ($k > 1$) nebo ke zmenšení ($k < 1$).

Pokud jde o využití podobnosti, upřednostňují se na ZŠ zejména jednoduché slovní úlohy typu např. 1) určování výšky objektu na základě délky stínu, který vrhá, 2) určování poměru obvodu nebo obsahu rovinného útvaru (čtverce), známe-li poměr délek odpovídajících stran. Využití podobnosti v konstrukčních úlohách se na základní škole omezuje pouze na narýsování jednoduchého útvaru podobného s daným útvarem při daném koeficientu podobnosti a na změnu velikosti úsečky v daném poměru, případně na rozdělení úsečky bodem na dvě části, jejichž délky jsou v daném poměru, přičemž využívají při konstrukci redukční úhel. Nelze však spoléhat na to, že všichni učitelé proberou, případně že si všichni studenti ze ZŠ zapamatují, princip redukčního úhlu.

Tyto skutečnosti by měl zohlednit vyučující při promýšlení obsahu a struktury úvodních hodin probírání tématu Podobnost na střední škole.

Základní poznatky

Př. 1 Je dán obecný trojúhelník ABC . Narýsujte

- $\triangle A_1B_1C_1$, který je obrazem $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti se středem v bodě A a koeficientem stejnolehlosti 2.
- $\triangle A_2B_2C_2$, který je obrazem $\triangle ABC$ ve stejnolehlosti se středem v bodě B a koeficientem stejnolehlosti $-\frac{1}{2}$.

Jaké jsou poměry podobnosti v těchto zobrazeních?

Př. 2 Je dána kružnice $k(S, r = 2,5 \text{ cm})$ a body M a N s vlastností $M \in k$ a N leží uvnitř kruhu určeného kružnicí k . Narýsujte:

- k_1 , která je obrazem k ve stejnolehlosti se středem v bodě M a koeficientem stejnolehlosti $-\frac{3}{2}$.
- k_2 , která je obrazem k ve stejnolehlosti se středem v bodě N a koeficientem stejnolehlosti $\frac{1}{2}$.

Met.: Těžiště tématu Podobnost pak na střední škole spočívá zejména v důkladném seznámení studentů s principem a využitím stejnolehlosti. Stejnolehlost je pro studenty na střední škole zcela nový pojem, s kterým se doposud nesešli. Dá se předpokládat, že už prvním problémem bude pro ně skutečnost, že stejnohlelé útvary jsou podobné s vždy kladným koeficientem podobnosti k , ale koeficient stejnolehlosti k může být jak kladný, tak i záporný. Je na vyučujícím, aby rozdíl mezi koeficientem podobnosti a koeficientem stejnolehlosti dokázal studentům precizně vysvětlit. Než se pak přistoupí k úlohám, jejichž řešení je založeno na využití stejnolehlosti, musí se studenti naučit ve stejnolehlostech s různými koeficienty a různě umístěnými středy stejnolehlosti zobrazovat všechny základní útvary – body, přímky, n-úhelníky, kružnice. Vyučující by měl přitom využívat situace a vést studenty k tomu, aby si všimli vlastností zobrazovaných útvarů, aby je dokázali popisovat, formulovat jevy, zdůvodňovat, dokazovat. Zejména stejnolehlosti kružnic je nezbytné věnovat minimálně celou vyučovací hodinu a k práci se stejnohlelymi kružnicemi a středy stejnolehlosti přidat i konstrukce společných tečen (zopakovat přitom konstrukci tečny z bodu ke kružnici užitím Thaletovy kružnice!!!).

Př. 3 Jsou dány dva body O_1 a O_2 , $|O_1O_2| = 6 \text{ cm}$ a dále dvě kružnice $k_1(O_1, r_1 = 3 \text{ cm})$, $k_2(O_2, r_2 = 1 \text{ cm})$. Nalezněte všechny středy stejnohlostí těchto kružnic a všechny jejich společné tečny.

Met: Většinu úloh souvisejících ve středoškolské planimetrii se stejnohlostí lze podobně jako je tomu u shodných zobrazení rozdělit do dvou základních skupin. Jejich odlišujícím prvkem je zejména rozbor, který je pro každou z těchto skupin typický. Navíc pokud se rozbor správně a precizně zapíše, může obsahovat vždy na obdobném místě „pokyn“ k prvnímu kroku a tím k vykročení do řešení úlohy.

Úlohy prvního typu: (Mají třířádkový rozbor, přičemž **druhý řádek** představuje zmiňované „vykročení“ do řešení úlohy)

Př.: Je dán dutý úhel $\sphericalangle AVB$ a bod M , který leží uvnitř tohoto úhlu. Bodem M veďte přímku p tak, aby platil vztah $|MX| : |MY| = 1 : 2$, kde X, Y jsou průsečíky přímky p s rameny $\rightarrow VA$ a $\rightarrow VB$.

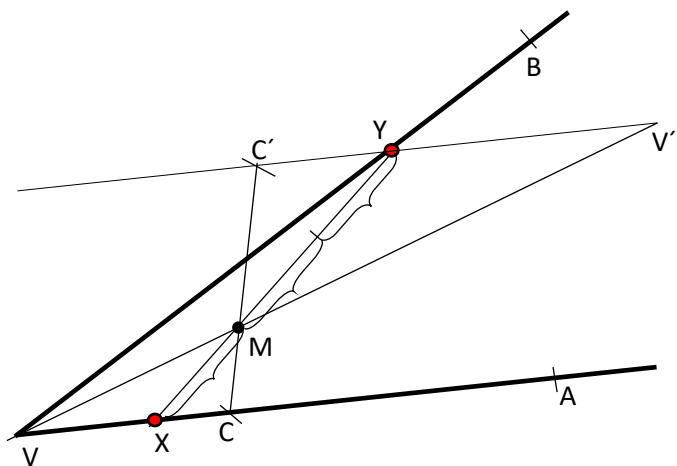
Met.: Náčrt:

Rozbor:

$$H_{(M; -\frac{2}{1})} : X \longrightarrow Y$$

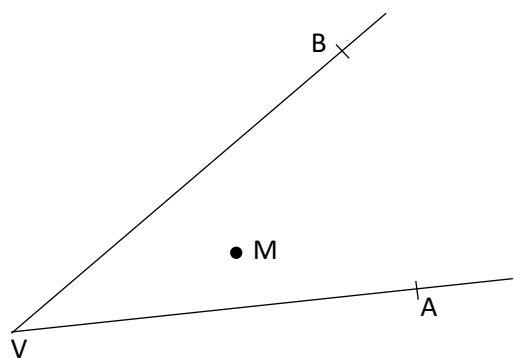
$$H_{(M; -\frac{2}{1})} : \rightarrow VA \longrightarrow \rightarrow V'A'$$

$$Y \in \rightarrow V'A' \cap \rightarrow VB$$



Skutečná výchozí situace:

Víme, že Y je obraz X ve stejnohlosti $H_{(M; -\frac{2}{1})}$. Protože ale nevíme, kde se na polopřímce $\rightarrow VA$ bod X nachází, zobrazíme celou polopřímku $\rightarrow VA$ – každý bod $z \rightarrow VA$ si „najde“ svůj obraz na $\rightarrow V'A'$ a X si „najde“ svůj obraz Y v průsečíku $\rightarrow V'A' \cap \rightarrow VB$.



Konstrukce:

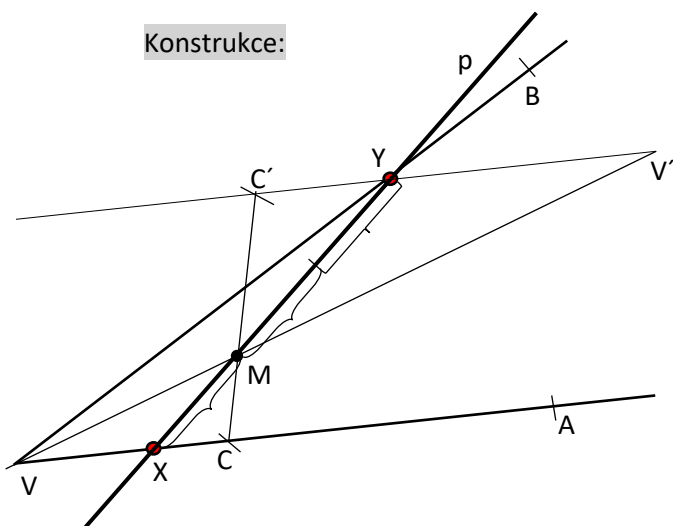
Postup: 1) $\rightarrow VA, \rightarrow VB, M: \sphericalangle AVB$ – dutý úhel, M – uvnitř ... zadané prvky

2) $\rightarrow V'A' : H_{(M; -\frac{2}{1})} : \rightarrow VA \longrightarrow \rightarrow V'A'$

3) $Y : Y \in \rightarrow V'A' \cap \rightarrow VB$

4) $X : H_{(M; -\frac{1}{2})} : Y \longrightarrow X$

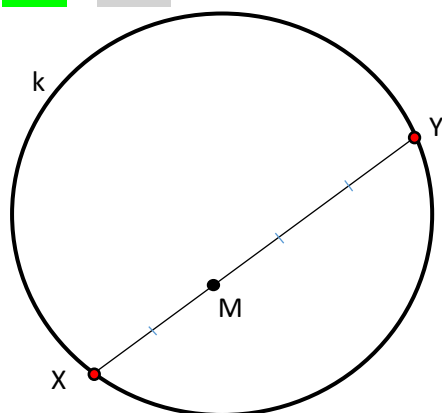
5) $p : p = \leftrightarrow XY$



Typové příklady standardní náročnosti

Př. 4 Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod M , který leží uvnitř kružnice k . Bodem M vedte tětivu XY tak, aby platil vztah $|XM|:|YM| = 2:3$.

Met.: Náčrt:



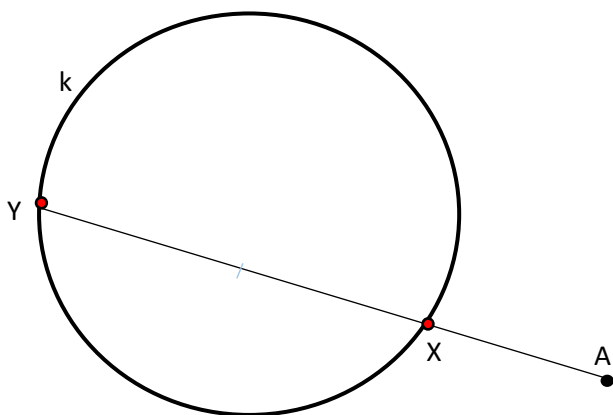
.....

Rozbor:

$H_{(M; \frac{3}{2})}: X \longrightarrow Y$
$H_{(M; \frac{3}{2})}: k \longrightarrow k'$
$Y \in k \cap k'$

Př. 5 Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod A , který leží vně kružnice k . Bodem A vedte sečnu p kružnice k tak, aby platil vztah $|AY| = 3|AX|$, kde X a Y jsou průsečíky přímky p s kružnicí k .

Met.: Náčrt:



.....

Rozbor:

$H_{(A; \frac{3}{1})}: X \longrightarrow Y$
$H_{(A; \frac{3}{1})}: k \longrightarrow k'$
$Y \in k \cap k'$

Úlohy druhého typu:

(Vyžadují k zadaným prvkům sestavit rovinný útvar U , který má splňovat celou řadu vlastností. Všechny najednou ovšem nelze splnit okamžitě. Je třeba navést studenty na myšlenku, že je v našich silách sestavit pomocný útvar U' , který většinu vlastností zpravidla až na jednu, splňuje. K požadovanému útvaru U se pak dostaneme užitím stejnohlosti aplikované na pomocný útvar U' . Výběr vlastností, které se při konstrukci pomocného útvaru vzdáme, by se mohl zdát obtížným. Je však zcela logický a studentům by neměl dělat při dobrém počátečním vysvětlení problémy. Jestliže se požadovaný útvar U získá z U' užitím stejnohlosti, je jasné že musí už U' vykazovat požadovaný tvar. Vlastnost, které se při konstrukci U' vzdáme, tedy nesmí mít na tvar výsledného útvaru vliv. Rozbor úloh druhého typu je obsáhlejší, ale i v něm se vždy na obdobném místě vyskytuje řádek odpovídající „vykročení“ do řešení úlohy.

Př. 6 a) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno: $a : b : c = 2 : 3 : 4$ a $v_a = 5 \text{ cm}$

Met.: Náčrt:

Rozbor:

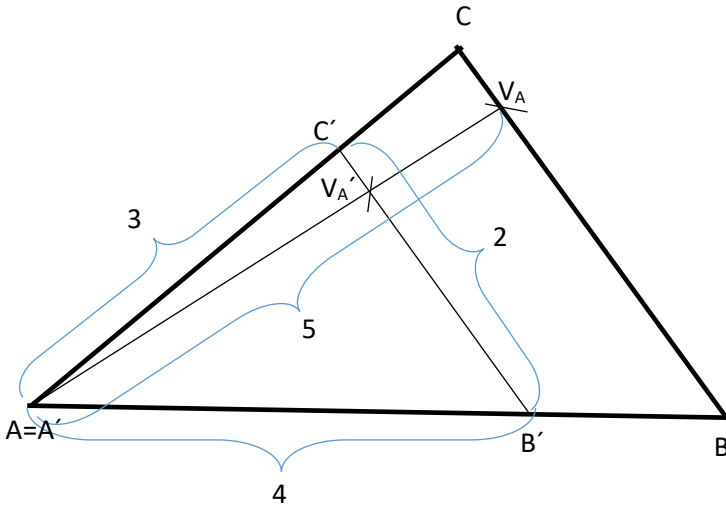
Hledaný útvar: trojúhelník ABC

Vlastnosti: 1) $a : b : c = 2 : 3 : 4$
2) $v_a = 5 \text{ cm}$

Pomocný útvar: trojúhelník A'B'C'

Vlastnosti: 1)

$\triangle ABC \dots H_{(A=A';\kappa)}: \triangle A'B'C' \longrightarrow \triangle ABC$
($\kappa = \frac{|V_A A'|}{|V_A' A'|}$)



Konstrukce:

Postup:

1) $\triangle A'B'C': a' = 2 \text{ cm}, b' = 3 \text{ cm}, c' = 4 \text{ cm}$

2) $\rightarrow A'X: \rightarrow A'X \perp B'C'$

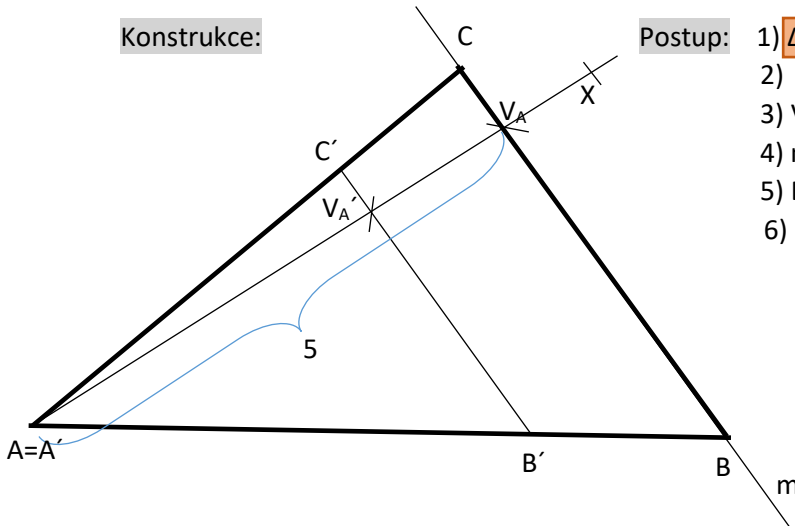
3) $V_A: V_A \in \rightarrow A'X \cap k(A'; 5 \text{ cm})$

4) $m: (V_A \in m) \wedge (m \parallel B'C')$

5) $B: B \in m \cap \rightarrow A'B'$

6) $C: C \in m \cap \rightarrow A'C'$

$H_{(A=A';\kappa)}: B'C' \rightarrow BC$



Př. 6 b) Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno: α, β, t_c .

Met.: Náčrt:

Rozbor:

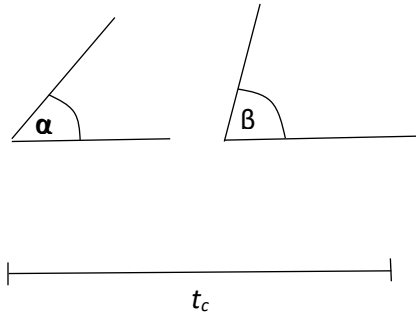
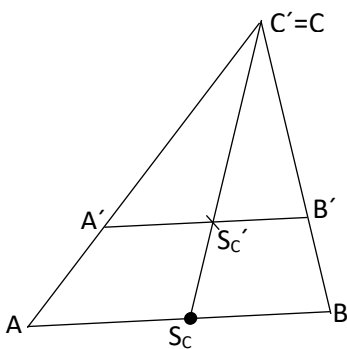
Hledaný útvar: trojúhelník ABC

Vlastnosti: 1) α
2) β
3) t_c

Pomocný útvar: trojúhelník A'B'C'

Vlastnosti: 1), 2)

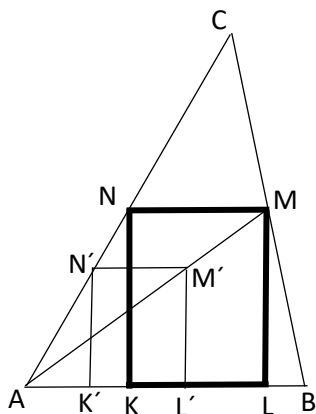
$\triangle ABC \dots H_{(C=C';\kappa)}: \triangle A'B'C' \longrightarrow \triangle ABC$
($\kappa = \frac{|S_C C'|}{|S_C' C'|}$)



Př. 7 Ostroúhlému $\triangle ABC$ vepište obdélník $KLMN$ tak, aby $KL \subset AB$, $M \in BC$, $N \in AC$ a aby platilo: $|KL|:|LM| = 3:4$.

Met.: Náčrt:

Rozbor:



Hledaný útvar: obdélník KLMN

- Vlastnosti: 1) $|KL|:|LM| = 3:4$
 2) $KL \subset AB$
 3) $M \in BC$
 4) $N \in AC$

Pomocný útvar: obdélník K'L'M'N'

- Vlastnosti: 1), 2), 4)

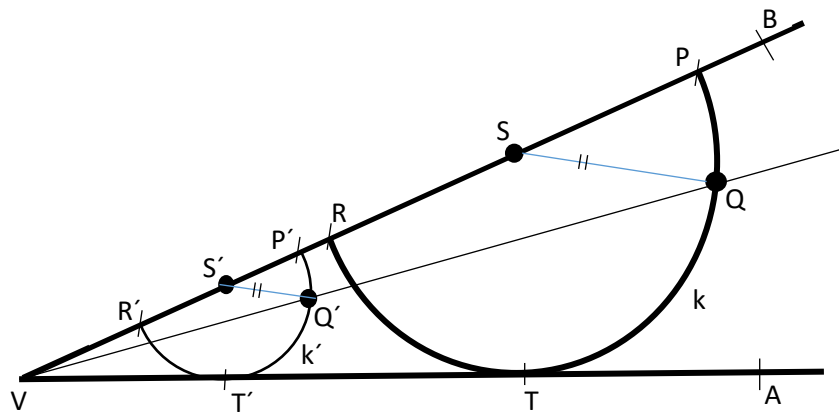
$H_{(A;\kappa)}: K'L'M'N' \rightarrow KLMN$

$$\left(\kappa = \frac{|AM|}{|AM'|}\right)$$

Př. 8 Je dán ostrý úhel AVB a bod Q tak, že leží uvnitř tohoto úhlu. Sestrojte půlkružnici k tak, aby procházela bodem Q , dotýkala se polopřímky VA a měla průměr RP na polopřímce VB .

Met.: Náčrt:

Rozbor:



Hledaný útvar: půlkružnice k

- Vlastnosti: 1) $Q \in k$
 2) $k \cap \rightarrow VA = \{T\}$
 3) $RP \subset \rightarrow VB$

Pomocný útvar: půlkružnice k'

- Vlastnosti: 2), 3)

$H_{(V;\kappa)}: k' \rightarrow k$

$$\left(\kappa = \frac{|VQ|}{|VQ'|}\right)$$

Př. 9 Sestrojte $\triangle ABC$, je-li dáno: $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $o = a + b + c = 10$ cm.

Met.: Náčrt:

Rozbor:

Hledaný útvar: trojúhelník ABC

Vlastnosti: 1) $\alpha = 70^\circ$

2) $\beta = 60^\circ$

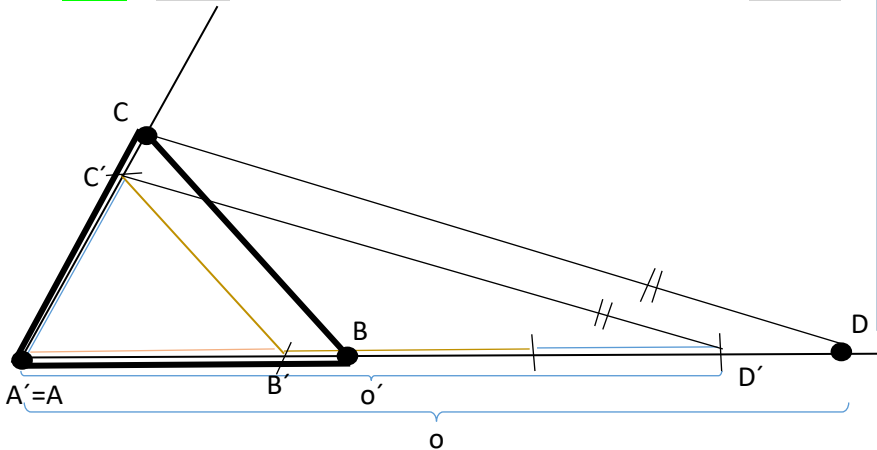
3) $o = 10$ cm

Pomocný útvar: trojúhelník $A'B'C'$

Vlastnosti: 1), 2)

$H_{(A;\kappa)}: A'B'C' \rightarrow ABC$

$$\left(\kappa = \frac{o}{2}\right)$$

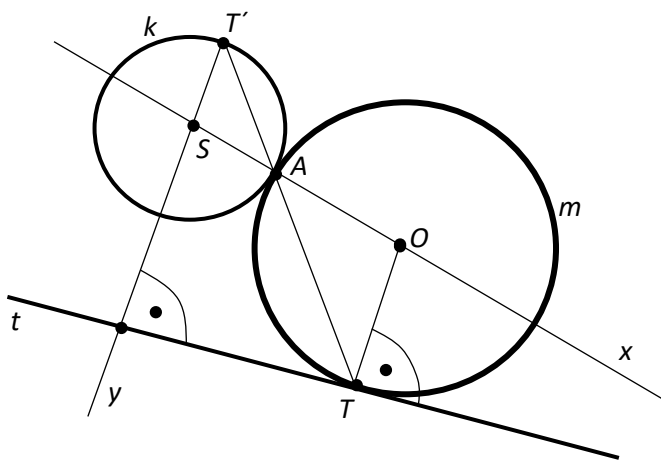


Rozšiřující cvičení

Př. 10 Nechť je dána přímka t a na ní bod T , dále nechť je dána kružnice k v jedné z polovin vyřatých přímkou t . Sestrojte kružnici m , která se dotýká dané kružnice k a dané přímky t v bodě T .

Met.: Náčrt:

Tato úloha patří rozhodně k náročnějším. Cesta k řešení vede přes podrobný náčrt. Klíčová myšlenka spočívá v tom, že si uvědomíme, že bod dotyku zadané a hledané kružnice představuje jeden ze středů stejnohlosti těchto kružnic. Pokud v náčrtu nakreslíme správně důležité prvky a vezmeme v úvahu důležité vlastnosti použité stejnohlosti, řešení bude zřejmé.



Rozbor: Z náčrtu plyne:

- A – střed stejnohlosti;
- O leží na kolmici vedené k t bodem T
- obrazem OT ve stejnohlosti se středem v A je $ST' \parallel OT$, tedy $ST' \perp t$
- $A \in k \cap TT'$
-

Skutečná výchozí situace:

