14 Konstrukční planimetrické úlohy – met.

Stručný přehled teorie

KONSTRUKČNÍ ÚLOHY

- Konstrukční úlohy v planimetrii na střední škole využívají výhradně euklidovské konstrukce. Tyto konstrukce se provádějí pomocí pravítka a kružítka a jsou složeny z konečného počtu elementárních kroků spočívajících v konstrukcích bodů, přímek a kružnic
- Příklady základních euklidovských konstrukcí:
  -přenesení úhlu, osa úsečky, osa úhlu, kolmice či rovnoběžka k dané přímce daným bodem,…

Části postupu řešení konstrukční úlohy:

- Rozbor s náčrtem, konstrukce, postup, zkouška, diskuze

METODY ŘEŠENÍ KONSTRUKČNÍCH ÚLOH:

1) **Metoda množin všech bodů dané vlastnosti**
   – založena na tom, že
   a) pro každý hledaný bod stanovíme 2 nutné podmínky, které musí splňovat
   b) sestrojíme množiny M_1, M_2 všech bodů splňujících po řadě 1. a 2. podmínku
   c) v průniku M_1 a M_2 určíme hledaný bod

Př.: Sestrojte ΔABC, je-li dáno: $c = AB$, α, β.

Řeš.: 1) Sestrojíme $c = AB$;

2) Hledáme bod C … podm.1: $C \in \mapsto AX$, kde $|\angle BAX| = \alpha$ .....M_1

podm. 2: $C \in \mapsto BY$, kde $|\angle ABY| = \beta$ .....M_2

$C \in M_1 \cap M_2$

2) **Metoda geometrických zobrazení v rovině**
   – založena na užití shodných zobrazení (osová souměrnost souměrnost, posunutí, otáčení) a podobných zobrazení (stejnolehlost)

3) **Metoda algebraická (metoda konstrukce na základě výpočtu)**
   – založená na sestrojování úseček, jejichž délky jsou vyjádřeny danými či získanými algebraickými výrazy (např. $x = \sqrt{10}$, $x = a.b$, $x = \frac{a^2}{b}$, $x = \sqrt[4]{a.b.c.d}$, …)

4) **Metoda souřadnic (metoda užití analytické geometrie)**
   – převádí se zpravidla opět na určení bodů, které náleží průniku množin všech bodů daných vlastností.

Met.: Na druhém stupni základních škol je prakticky v každém ročníku pamatováno na prostor pro konstrukční úlohy. Tento prostor se však omezuje pouze na nejzákladnější konstrukce, jako jsou konstrukce osy úsečky, osy úhlu α, přenesení úhlu α, konstrukce trojúhelníku pomocí vět sss, sus, usu, eventuálně Ssu, konstrukce kružnice trojúhelníku opsané a vepsané, konstrukce výšek, těžnic, středních příček trojúhelníku, konstrukce Thaletovy kružnice a konstrukce obrazu jednoduchého útvaru v osové nebo středové souměrnosti.
Žáci mají k dispozici pracovní sešity. Podle uvážení svého učitele matematiky s nimi s různou intenzitou pracují. Nespornou výhodou pracovních sešitů je to, že žáci mají předepsaná a předkreslená zadání, do kterých vyplňují tabulky, dokončují výpočty, rýsují požadované útvary a neztrácejí čas s psaním a rýsováním zadání. Na druhou stranu tento způsob práce má na žáky i negativní dopad. Čím dál častěji se stává, že žáci nejsou vedeni k samostatnému řešení úloh, k chápání podstaty zadání, k hledání úplných cest k vyřešení problému. Pokud jde o konstrukční úlohy, potýkají se mnozí žáci s neznalostmi jejich struktury a nedokážou precizně provádět jejich jednotlivé části. Kreslí malé nepřehledné náčrty jen tužkou (nebo dokonce propisovačkou), nejsou zvyklí pomoci si barevným vyznačením zadaných prvků, pojmenovávají hledané prvky jinak v náčrtu a jinak v konstrukci, ..., takže jim náčrt a rozbor často k řešení nijak nepomohou. Konstrukce rýsují mnozí velmi ledabyle, většina nerozlišuje hlavní a pomocné čáry, výsledný útvar se často ztrácí ve změti čar. Mnozí ignorují předepsanou strukturu postupu, kdy každý řádek musí obsahovat pořadí prováděného kroku, následuje označení právě rýsovaného prvku (tím může být pouze bod, přímka nebo její část a kružnice) a nakonec všechny vlastnosti použité při sestrojení tohoto prvku.

Příklad	chybný zápis	správný zápis
	5) $K \in m \cap p$	5) K: $K \in m \cap p$
		Pozn.: m, p musí být buď zadané nebo definované před krokem 5)
	4) α: α = 60°	4) →VX: $\lvert\sphericalangle AVX\rvert = \alpha = 60°$
		Pozn.: →VA musí být buď zadaná nebo definovaná před krokem 4)

S těmito nedostatky musí učitel na střední škole počítat a snažit se je hned od prvních společně řešených konstrukčních úloh co nejrychleji odstranit.
Úspěšnost v řešení konstrukčních úloh stojí a padá s dobře promyšleným a provedeným náčrtem spojeným často s rozborem. Náčrt musí být přehledný a dostatečně velký, zadané prvky by měly být zřetelně (ideálně barevně) vyznačeny, princip řešení úlohy by z něj měl být jasně „čitelný“.
Na rozdíl od náčrtu s uvedenými vlastnostmi, který musí být součástí každé konstrukční úlohy, rozhodně není časově možné rýsovat u každé úlohy precizně konstrukci a důkladně zapisovat celý postup konstrukce. Nicméně se učitel musí postarat o to, aby každý student dokázal provést perfektní konstrukci i bezchybný zápis postupu. K tomu ale postačí

- jeden precizně předvedený příklad na tabuli,
- jasně formulované učitelovy požadavky na podobu konstrukce a zápisu postupu,
- jeden příklad řešený studenty samostatně v sešitě a doplněný průběžnou kontrolou, kterou učitel provede u každého studenta během vyučovací hodiny,
- dva příklady zadané ke kompletnímu zpracování za domácí cvičení (s následnou učitelovou kontrolou).

Jakmile se učitel přesvědčil, že všichni studenti precizní zpracování konstrukčních úloh zvládnou, může se ve všech dalších probíraných úlohách spokojit pouze s náčrtem (spojeným s rozborem) a s „očíslovanou konstrukcí“ provedenou podle uvážení studenta klidně i od ruky. To jednak studentům ušetří hodně času a přitom jim to postačí k důkladnému pochopení principu řešení, a jednak to učiteli umožní snadno „sledovat“ myšlenkový postup studentů.
Pokud při prověřování znalostí prověrkou bude učitel požadovat, aby pouze jeden příklad zpracovali studenti kompletně včetně precizního postupu (výběr je vhodné nechat na studentovi), a u ostatních provedli jen kombinaci náčrtu s rozborem a očíslovanou konstrukci, bude prověrka pro studenty zvládnutelná v rozumném čase.

Základním útvarem, kterému je věnováno na střední škole v tématu konstrukčních úloh nejvíce času, je samozřejmě trojúhelník. Ten se ostatně využívá i při konstrukcích čtyřúhelníků a obecně n-úhelníků. Studenti musí po probrání tématu zvládat konstrukci trojúhelníku nejen na úrovni základní školy, kdy je zadán trojicí ze základních prvků (strany a, b, c a úhly α, β, γ), ale i v komplikovanějších případech, kdy mezi zadávající trojicí jsou i některé rozšiřující prvky (např. výšky v_a, v_b, v_c, těžnice t_a, t_b, t_c, poloměr vepsané kružnice ρ, poloměr opsané kružnice r, apod.).

Učitel svým studentů nepochybně velmi pomůže, když jim poradí, jak mají v závislosti na prvcích zadávajících trojúhelník rozhodnout o prvním kroku celého řešení:

Mezi prvky zadávajícími trojúhelník je (jsou)	První krok – začneme:
výška *v*	pásem rovnoběžek vzdálených od sebe o v
jedna těžnice *t*	doplněním trojúhelníku na rovnoběžník s úhlopříčkou 2*t*
dvě těžnice	využijeme polohy těžiště T trojúhelníku
výška *v* a těžnice *t*	dáme přednost výšce a začneme pásem rovnoběžek …

Tyto rady samozřejmě nejsou samospasitelné a najdou se úlohy, u kterých nefungují. Ale u většiny středoškolských konstrukčních úloh opravdu k řešení vedou.

Základní poznatky:

Př. 1 Je dán trojúhelník ABC: a = 5 cm, b = 6 cm, c = 7 cm. Sestrojte trojúhelník ABC, dále sestrojte jeho výšky v_a, v_b, v_c, těžnice t_a, t_b, t_c, střední příčky s_a, s_b, s_c, osy stran o_a, o_b, o_c, osy úhlů o_α, o_β, o_γ, kružnici opsanou i vepsanou. [zřejmé]

Př. 2 Bodem A veďte tečny ke kružnici k (S; 3 cm), |AS| = 10 cm. [zřejmé]

Met.: Studenti by měli tuto jednoduchou, ale velmi důležitou konstrukci znát ze ZŠ. Ale když učitel projde třídu, ve které ji zadá k rychlému samostatnému vyřešení, s velkou pravděpodobností se setká s řadou studentů, kteří přiloží k bodu a kružnici pravítko a nakreslí tečnu bez použití Thaletovy kružnice. Na to by měl učitel správně reagovat – pochválit ty, kdo konstrukci znají a připomenout ostatním, že tečnu z vnějšího bodu ke kružnici rýsovat bez Thaletovy kružnice nelze.

Př. 3 Jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1 = 1{,}5\ \text{cm})$, $k_2(S_2, r_2 = 3\ \text{cm})$, $|S_1S_2| = 7$ cm. Sestrojte společné tečny obou kružnic. [zřejmé]

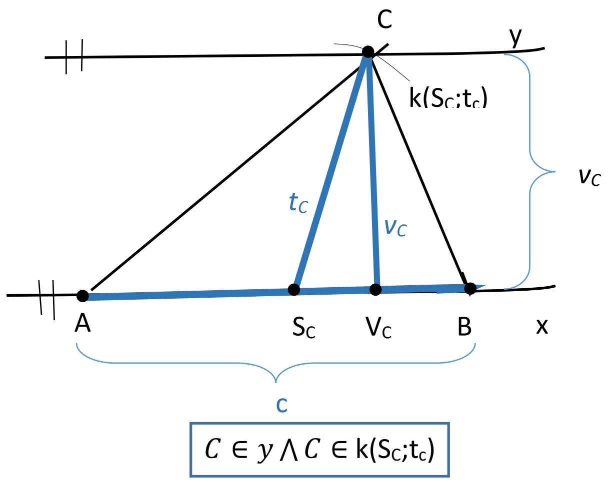
Met.: Užití stejnolehlosti kružnic …

Typové příklady standardní náročnosti

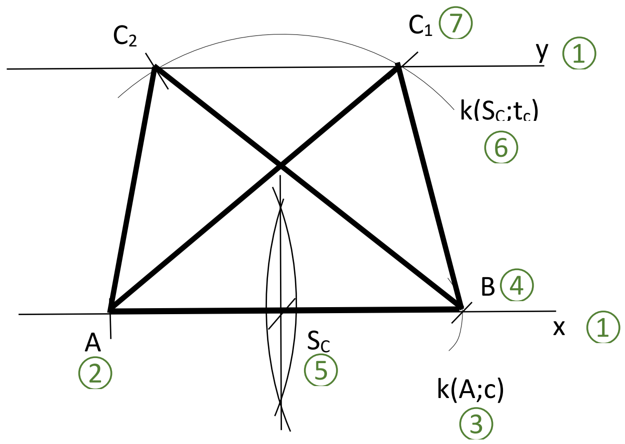
Př. 4 Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno:

a) c = 8 cm, t_c = 5 cm, v_c = 4,7 cm

Met.: Náčrt a rozbor:

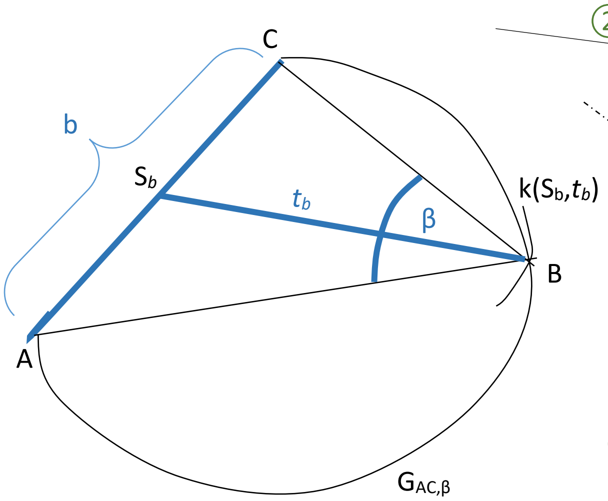


„Konstrukce:“

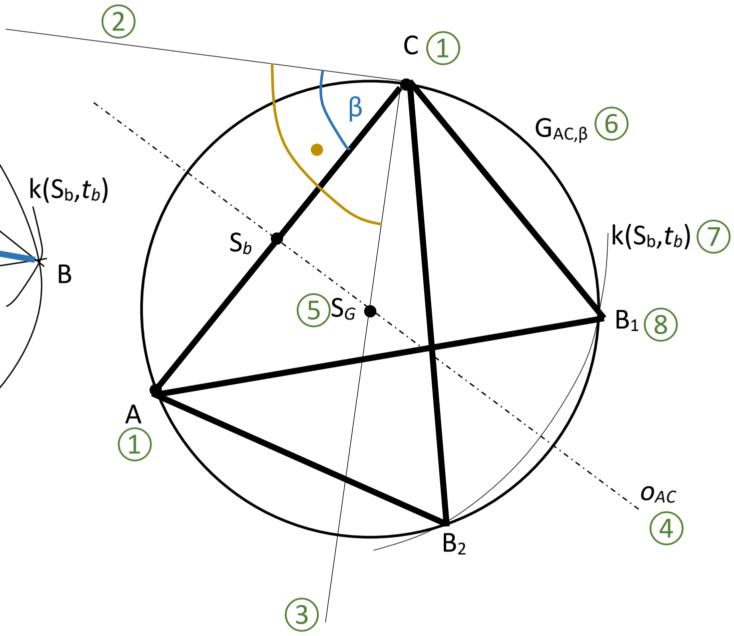


b) b = 7 cm, $\beta = 60°$, $t_b = 6$ cm

Met.: Náčrt a rozbor :



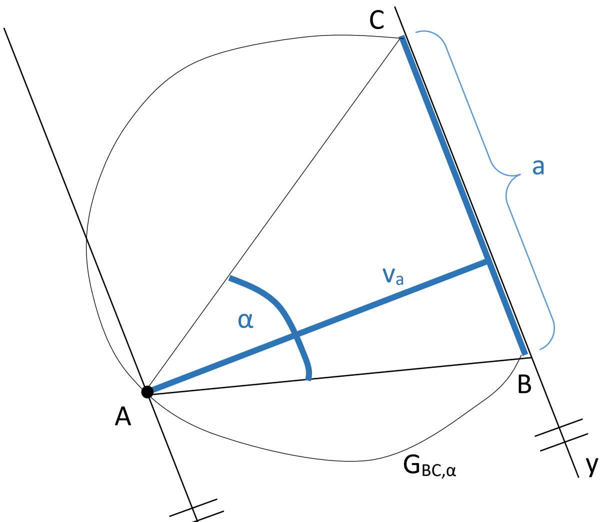
„Konstrukce:“



$\boxed{B \in G_{AC,\beta} \wedge B \in k(S_b,t_b)}$

c) a = 6 cm, $\alpha = 45°$, $v_a = 6{,}5$ cm

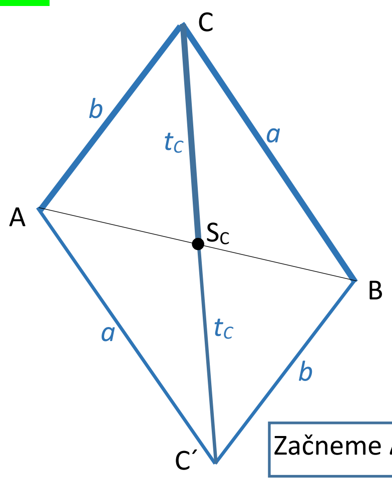
Met.: Náčrt a rozbor: ....

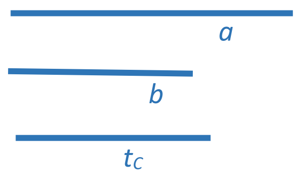


$\boxed{A \in x \wedge A \in G_{BC,\alpha}}$

d) a, b, t_c

Met.: Náčrt a rozbor: ....

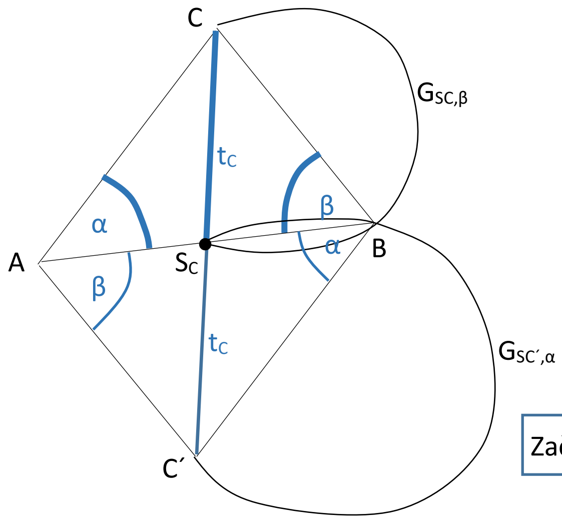




$\boxed{\text{Začneme } \Delta ACC´: |AC| = b, |AC´| = a, |CC´| = 2.t_c}$

e) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $t_c = 5$ cm

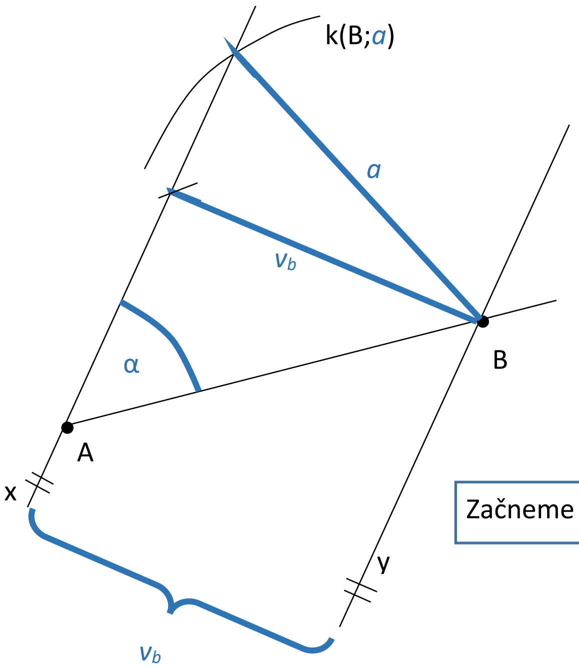
Met.: Náčrt a rozbor: …………

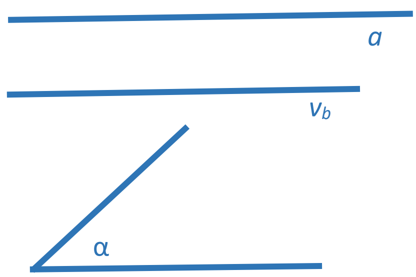


Začneme ΔCC´B: $|CC´| = 2.t_c$, B∈ $G_{SC,\beta}$, B∈ $G_{SC´,\alpha}$

f) a, α, v_b

Met.: Náčrt a rozbor: …………………

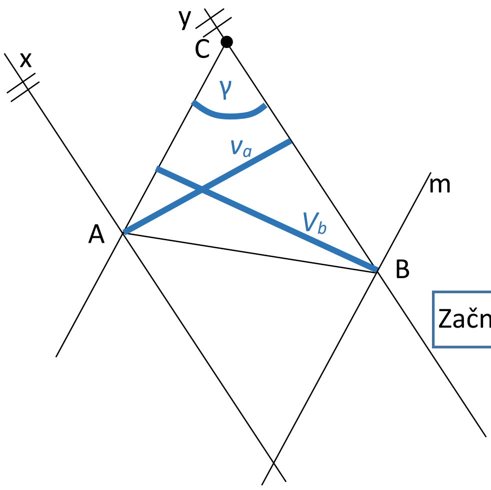


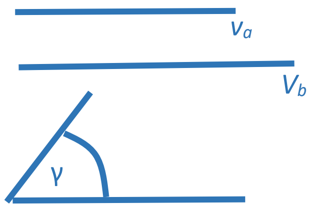


Začneme pásem rovnoběžek x, y. Pak $A \in x$ $libovolně$, α, B, …

g) γ, v_a, v_b

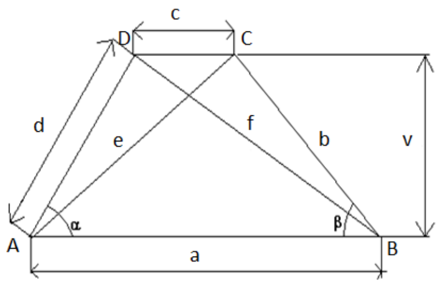
Met.: Náčrt a rozbor: ……………………





Začneme pásem rovnoběžek x, y. Pak $C \in y$ $libovolně$, γ, A, m∥→AC, B, …

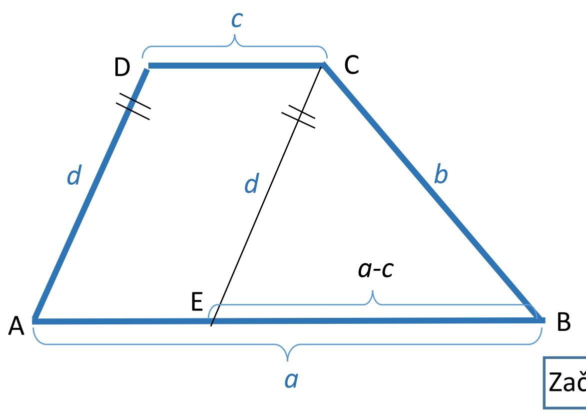
Př. 5 Sestrojte lichoběžník ABCD (na obrázku), jsou-li dány následující údaje:

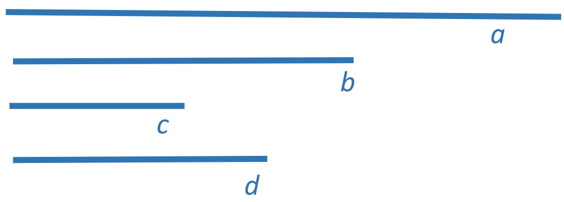


Základem konstrukce jakéhokoliv čtyřúhelníku (příp. n-úhelníku) je vždy nalezení trojúhelníku, který je jeho součástí a který dokážeme s pomocí zadaných prvků narýsovat.

a) a, b, c, d

Met.: Náčrt a rozbor: ....

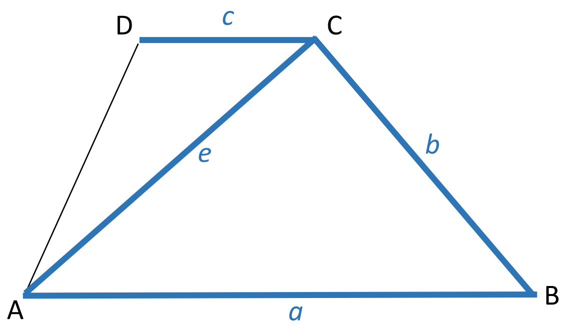


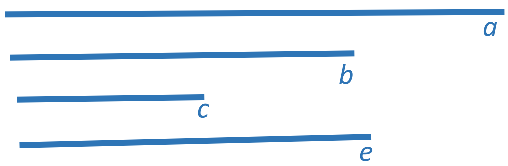


Začneme ΔEBC: $|EB| = a - c, |BC| = b, |EC| = d$

b) a, b, c, e

Met.: Náčrt a rozbor: ....

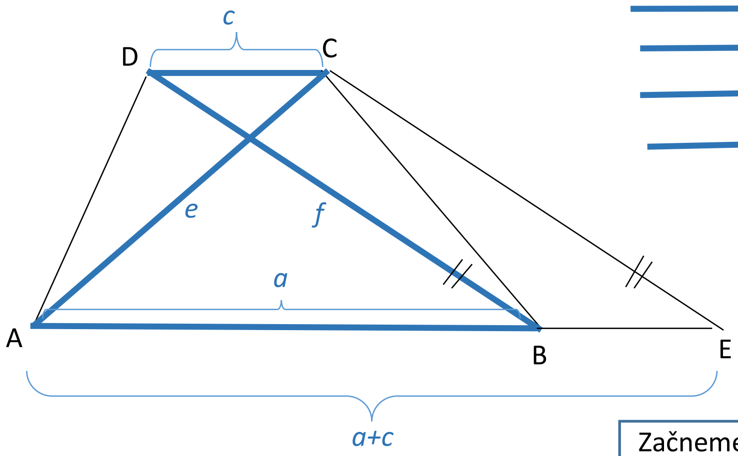


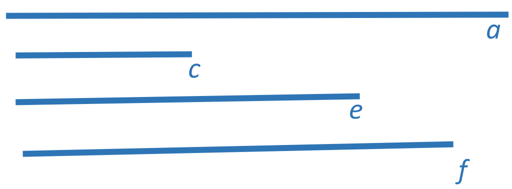


Začneme ΔABC: $|AB| = a, |BC| = b, |AC| = e$

c) a, c, e, f

Met.: Náčrt a rozbor: ....

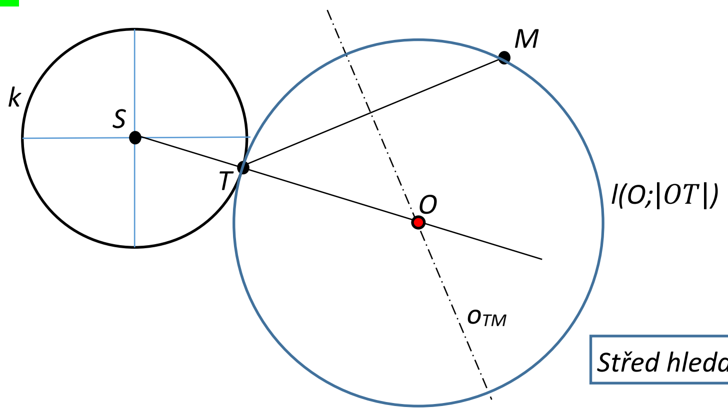




Začneme ΔAEC: $|AE| = a + c, |EC| = f, |AC| = e$

Př. 6 Je dána kružnice k (S, r), na ní bod T a mimo ni bod M. Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice v bodě T a prochází bodem M.

Met.: Náčrt a rozbor: ……………

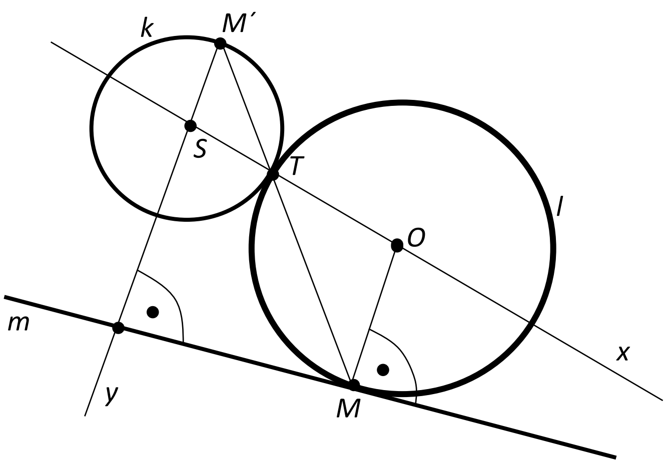


Střed hledané kružnice $(O \in \rightarrow ST) \wedge (O \in o_{TM})$

Rozšiřující cvičení

Př. 7 Sestrojte kružnici, která se dotýká dané kružnice k (S, r) v jejím daném bodě T a dané přímky m.

Met.: Náčrt:



Tato úloha patří rozhodně k náročnějším Cesta k řešení vede přes podrobný náčrt. Klíčová myšlenka spočívá v tom, že si uvědomíme, že bod dotyku zadané a hledané kružnice představuje jeden ze dvou středů stejnolehlosti těchto kružnic. Pokud v náčrtu nakreslíme správně důležité prvky a vezmeme v úvahu důležité vlastnosti použité stejnolehlosti, řešení bude zřejmé.

Rozbor: Z náčrtu plyne:

- T – střed stejnolehlosti;
- O je obraz S ve stejnolehlosti se středem T ($tozn.\ že\ O \in \rightarrow ST$)
- obrazem OM, kde M je bod dotyku hledané kružnice s přímkou m, ve stejnolehlosti se středem v T je SM´∥ OM, tedy SM´⊥ *m*
- $M \in m \cap \leftrightarrow TM´$
- …….

Skutečná výchozí situace: