16 Funkce, základní pojmy a vlastnosti – met.

Stručný přehled teorie

Základní pojmy:

- **uspořádaná dvojice** [x,y] – je dvojice, v níž záleží na pořadí (je-li $x \neq y$, pak $[x,y] \neq [y,x]$)
- **kartézský součin** $A \times B$ **-** je množina *všech* uspořádaných dvojic [x,y], kde $x \in A$ a $y \in B$.
  Tedy $A \times B = \{[x,y];\ x \in A \wedge y \in B\}$

- **binární relace –** je libovolná podmnožina kartézského součinu

- **zobrazení z množiny A do množiny B -** je taková binární relace, která každému $x \in A$ přiřazuje *nejvýš jedno* $y \in B$
- **funkce –** je zobrazení z **R** do **R** (neboli zobrazení v **R**)
  f: y = f(x) **f** … označení (jméno) funkce
  y = f(x) …funkční předpis, neboli rovnice funkce
  x … argument funkce - nezávisle proměnná
  y … hodnota funkce - závisle proměnná

- **definiční obor funkce D(f) –** je množina všech $x \in R$, k nimž existuje $y \in R$ tak, že $[x; y] \in f$.
  Tedy $D(f) = \{x \in R;\ \exists y \in R : [x,y] \in f\}$

- **obor funkčních hodnot H(f) –** je množina všech $y \in R$, k nimž existuje $x \in R$ tak, že $[x; y] \in f$.
  Tedy $H(f) = \{y \in R;\ \exists x \in R : [x,y] \in f\}$

- **graf funkce –** je množina všech bodů X[x, f(x)], kde $x \in D(f)$

- **inverzní funkce –** se vytvoří z funkce dané vzájemnou výměnou *x* za *y* a naopak.
  Je-li daná funkce f: y = f(x) s definičním oborem D(f) a s oborem funkčních hodnot H(f), pak k ní inverzní je funkce f^{-1}: x = f(y), tedy po úpravě f^{-1}: $y = f^{-1}(x)$, pro kterou $D(f^{-1}) = H(f)$ a $H(f^{-1}) = D(f)$.
  Pozn. 1. – relace inverzní k dané funkci f je funkcí pouze tehdy, je-li f prostá.
  Pozn. 2. – grafy funkce dané a funkce k ní inverzní jsou souměrné podle osy I. a III. kvadrantu soustavy souřadnic (tedy podle přímky p: y = x).

Způsoby zadání funkce:

- **výčtem prvků (tabulkou)**
- **rovnicí (analyticky)**
- **graficky**
- **slovním popisem**

Základní vlastnosti funkce:

1) monotónnost - vlastnost označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu konstantní, rostoucí, klesající, nerostoucí, či neklesající

Nechť $M \subseteq D(f)$.

- fce *f* je *rostoucí* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M :\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- fce *f* je *neklesající* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M :\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
- fce *f* je *klesající* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M :\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- fce *f* je *nerostoucí* na M $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in M :\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Pozn. 1: *„ryze monotónní“ fce* je souhrnný název pro rostoucí a klesající funkce ,
„monotónní“ fce je souhrnný název pro neklesající (tedy i rostoucí) a nerostoucí (tedyi klesající) funkce

Pozn. 2: Každá ryze monotónní fce je zároveň prostá. !Obrácená věta neplatí!

2) sudost a lichost – některé funkce jsou symetrické, podle druhu symetrie rozlišujeme funkce sudé a liché

- fce *f* je *sudá* právě tehdy, když
  1. $\forall x \in D(f): -x \in D(f)$
  2. $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

  graf sudé funkce je souměrný podle osy y
- fce *f* je *lichá* právě tehdy, když
  1. $\forall x \in D(f): -x \in D(f)$
  2. $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$

  graf liché funkce je souměrný podle počátku soustavy souřadnic

3) omezenost

Nechť $M \subseteq D(f)$.

- fce *f* je *omezená zdola* v *M* $\Leftrightarrow \exists d \in R: \forall x \in M: f(x) \geq d$
- fce *f* je *omezená shora* v *M* $\Leftrightarrow \exists h \in R: \forall x \in M: f(x) \leq h$
- fce *f* je *omezená v M*, je-li v *M* omezená shora i zdola

  Pozn.: fce je omezená, je-li omezená v celém svém definičním oboru

4) extrémy (tento pojem je zaveden pro funkce, které jsou alespoň částečně omezené)

Nechť $M \subseteq D(f)$, $a \in M, b \in M$.

- fce *f* má v bodě *a minimum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) \geq f(a)$
- fce *f* má v bodě *a ostré minimum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) > f(a)$
- fce *f* má v bodě *b maximum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) \leq f(b)$
- fce *f* má v bodě *b ostré maximum* na M $\Leftrightarrow \forall x \in M: f(x) < f(b)$

Zápis: $f(a) = \min_{x \in M} f(x)$ $\quad f(b) = \max_{x \in M} f(x)$

5) prostá funkce

fce *f prostá* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in D(f): x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

6) periodičnost

funkce *f* se nazývá *periodická* právě tehdy, když existuje takové reálné číslo $p \neq 0$, že platí:

1. $\forall x \in D(f): x + p \in D(f)$

2. $\forall x \in D(f): f(x+p) = f(x)$

p … perioda funkce

Pozn. 1: základní perioda funkce = nejmenší kladná perioda

Pozn. *2*: graf periodické funkce se pravidelně periodicky opakuje po intervalech, jejichž délka je rovna základní periodě

Pozn. 3: typickým a současně velmi významným příkladem periodických funkcí jsou goniometrické funkce

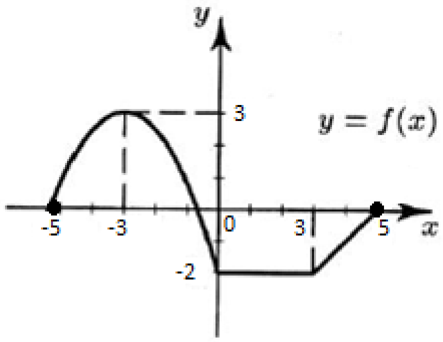
Met.: S pojmem funkce úzce souvisí pojmy, na které se definice funkce odvolává. Pokud učitel v úvodní hodině (případně dvou úvodních hodinách) zavede pojmy „uspořádaná dvojice“, „kartézský součin množin“, „binární relace“ a „zobrazení“ a pokud se studenty vyřeší několik jednoduchých úloh, které jim ozřejmí význam a podstatu těchto pojmů, může definici funkce reálné proměnné postavit na pevnější základ. Konkrétně lze pak funkci definovat jako zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ … Tento postup je lepší a rozhodně hodný doporučení.
Jestliže však učitel z nějakého důvodu nechce sahat při definování funkce do větší hloubky, stačí na střední škole funkci definovat takto:

> Nechť jsou dány dvě neprázdné množiny reálných čísel A a B. Jestliže každému $x \in A$ přiřadíme podle nějakého předpisu právě jedno $y \in B$ (tedy $y = f(x)$), pak množina f všech uspořádaných dvojic $[x; f(x)]$ se nazývá reálná funkce reálné proměnné. Zápis: $f: y = f(x)$.

V každém případě pak musí učitel vést studenty k tomu, aby v co největší možné míře dokázali určovat všechny základní vlastnosti funkcí jak z grafu funkce, tak z její rovnice.

Základní poznatky

Př. 1 Určete všechny základní vlastnosti funkce zadané graficky:



[$D(f) = \langle -5;5 \rangle$, $H(f) = \langle -2;3 \rangle$. Není ani sudá, ani lichá. Není monotónní. Lze ale například určit, že na $\langle -3;0 \rangle$ je klesající nebo na $\langle -5;-3 \rangle$ je rostoucí nebo na $\langle 3;5 \rangle$ je rostoucí. Na $\langle -3;3 \rangle$ je nerostoucí a na $\langle 0;5 \rangle$ je neklesající. Je omezená, neboť je současně omezená shora $(h = 3)$ i zdola $(d = -2)$. Ostré globální maximum má v bodě -3, ostré lokální minimum má v bodě -5, neostrá globální minima má ve všech bodech intervalu $\langle 0;3 \rangle$. Periodická není. Prostá není.]

Met.: Většinu vlastností studenti dokážou z grafu určit bez potíží. K chybě občas dochází snad jen při určení podobného extrému, jako je např v bodě -3. Graf je pro argumenty v okolí -3 zaoblený. Z toho někteří studenti usuzují, že v -3 je neostré maximum. Na podobné omyly musí být učitel připravený. Určitě je vhodné vyvolat ve třídě diskusi o typu extrému v daném bodě, případně i o jiných vlastnostech, o nichž se domnívá, že by v jejich určení mohli studenti chybovat. Správně reagovat znamená nasměrovat pozornost studentů na definice příslušných vlastností a na důkladné pochopení jejich podstaty.

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 2 Určete definiční obory funkcí

a) $f_a : y = x^2 + x + 4$ $\quad [D(f_a) = R]$

b) $f_b : y = \dfrac{x-1}{x+3}$ $\quad [D(f_b) = R - \{-3\}]$

c) $f_c : y = \sqrt{\dfrac{x-3}{3-x}}$ $\quad [D(f_c) = \varnothing]$

d) $f_d : y = \sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ $\quad [D(f_d) = (-\infty; -2\rangle \cup (3;\infty)]$

e) $f_e : y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}}$ $\quad [D(f_e) = (3;\infty)]$

f) $f_f : y = \dfrac{1}{\sqrt{1-|x|}}$ $\quad [D(f_f) = (-1;1)]$

Met.: Při určování definičního oboru z rovnice funkce musí studenti prokázat, jak dobře zvládli stanovení podmínek, za kterých mají výrazy smysl, ale také jak ovládají řešení nejrůznějších typů rovnic a nerovnic. Obojí se probíralo zpravidla v předcházejícím školním roce. Učitel má v úvodu tématu o funkcích ideální příležitost věnovat úlohám podobného typu jednu nebo dvě vyučovací hodiny, aby si studenti tuto látku zopakovali. Měl by velmi pečlivě vybírat zadání, aby se nezabředlo do příliš komplikovaných výpočtů, ale aby se upevnily základy, které třeba dříve dělaly studentům potíže. Zároveň může využít této příležitosti, aby poukázal na propojenost různých matematických témat, která už studenti probírali či probírají, a aby upozornil na to, že v budoucnu budou studenti určovat definiční obor při vyšetřování průběhu každé funkce. Je nezbytné, aby dokázali tento základní krok provést bez nejmenší chyby a zaváhání.

Př. 3 Rozhodněte o sudosti či lichosti funkcí:

a) $f_a : y = x + x^3$ [lichá]

b) $f_b : y = x^2 + 3x - 1$ [ani S, ani L]

c) $f_c : y = 3|x| + 1$ [sudá]

d) $f_d : y = 1 + \sqrt{x}$ [ani S, ani L]

Met.: Nejčastější chybou, které se při rozhodování (příp. dokazování) o sudosti či lichosti funkce studenti dopouštějí, je ignorování první definiční podmínky této vlastnosti, tj. ignorování nutnosti souměrnosti definičního oboru funkce podle počátku soustavy souřadnic. Pokud definiční obor funkce není souměrný podle počátku soustavy souřadnic, nemá smysl pouštět se do kontroly splnění druhé definiční podmínky, protože funkce už nemůže být ani sudá ani lichá.

Řeš.: 3.a) I. *$D(f_a) = R$* .... symetričnost splněna;

II. Nechť $x \in R \dots libovolné$; $f_a(x) = x + x^3$

$f_a(-x) = (-x) + (-x)^3 = -x - x^3 = -(x + x^3) = -f_a(x)$

$-f_a(x) = -(x + x^3)$

Tozn.: funkce f_a je lichá

---

c) I. *$D(f_c) = R$* .... symetričnost splněna;

II. Nechť $x \in R \dots libovolné$; $f_c(x) = 3|x| + 1$

$f_c(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1 = f_c(x)$

Tozn.: funkce f_c je sudá

---

d) I. *$D(f_d) = R_0^+$* ..... *$D(f_d)$* není souměrný podle počátku soustavy souřadnic, takže funkce f_d nemůže být ani sudá, ani lichá

Př. 4 Rozhodněte o druhu monotónnosti funkcí, případně jejich monotónnost dokažte:

a) $f_a : y = 6x + 1$ [rostoucí]

b) $f_b : y = -2x - 1$ [klesající]

c) $f_c : y = 3x^2$ [není monotónní]

d) $f_d : y = 2$ [nerostoucí,neklesající]

Met.: Rozhodnutí o druhu monotónnosti lze provést na základě znalosti typu funkce a tvaru jejího grafu. Ale důkaz musí být proveden v souladu s definicí:

a) Nechť zvolíme libovolně $x_1 \in D(f_a) = R \wedge x_2 \in D(f_a) = R$.

Pak $f_a(x_1) = 6x_1 + 1$, $f_a(x_2) = 6x_2 + 1$.

Nechť $x_1 < x_2$ /.6

$6x_1 < 6x_2$ / + 1

$6x_1 + 1 < 6x_2 + 1$

$f_a(x_1) < f_a(x_2)$ Tozn., že funkce f_a je rostoucí.

---

b) Nechť zvolíme libovolně $x_1 \in D(f_b) = R \wedge x_2 \in D(f_b) = R$.
Pak $f_b(x_1) = -2x_1 - 1, \quad f_b(x_2) = -2x_2 - 1$.

Nechť $\quad x_1 < x_2 \; /.(-2)$

$$-2x_1 > -2x_2 \; / -1$$

$$-2x_1 - 1 > -2x_2 - 1$$

$f_b(x_1) > f_b(x_2)$ Tozn., že funkce f_b je klesjící.

Př. 5 Zjistěte, zda jsou funkce omezené, případně jejich omezenost dokažte:

a) $f_a : y = \frac{1}{2}x + 1$ [není omezená]

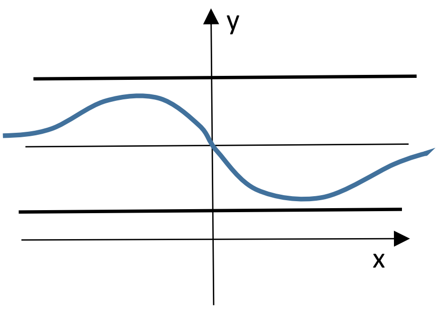
b) $f_b : y = -x + 1$ [není omezená]

c) $f_c : y = -x^2$ [není omezená, je omezená shora]

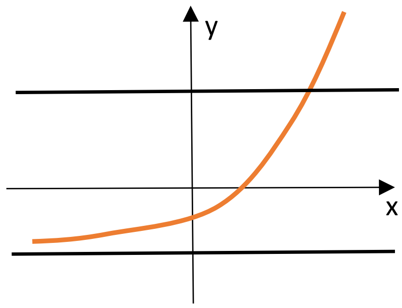
d) $f_d : y = -1$ [je omezená]

e) $f_e : y = \frac{10}{x^2+2}$ [je omezená]

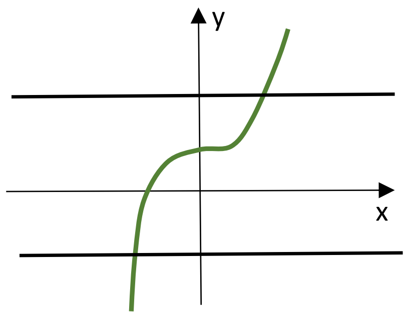
Met.: Vlastnost omezenosti funkce může učitel studentům velmi přiblížit, jestliže ji uvede do souvislosti s možností (či nemožností) umístit celý graf funkce do pásu dvou rovnoběžek s osou x.



funkce omezená



funkce není omezená, ale je omezená zdola



funkce není omezená, a to ani částečně

Ať už chceme dokázat, že je daná funkce omezená, nebo že funkce omezená není, vždy musíme vycházet z definice omezenosti funkce.

Doporučení: Nejprve ukázat, jak se dokazuje, že funkce omezená je, pak teprve (např. podle toho, zda je učitel časově v souladu s tematickým plánem, nebo je v časové tísni) zvážit práci s funkcí, která omezena není.

e) $f_e : y = \frac{10}{x^2+2}$ Zdá se, že funkce f_e bude omezená neboť $\forall x \in R: (f_e(x) > 0) \wedge f_e(x) \leq 5$.

Důkaz provedeme PŘÍMO: 1) Omezenost shora: h = 5

$$\frac{10}{x^2+2} \leq 5$$

$$10 \leq 5x^2 + 10$$

$\forall x \in R: \quad 0 \leq 5x^2$ platí vždy

Směr vedení důkazu!!!

cbd.

2) Omezenost zdola: d = 0

$\forall x \in R: \quad x^2 + 2 > 0$

$\frac{10}{x^2+2} > 0$ platí vždy cbd.

Funkce f_e je omezená shora i zdola, je tedy omezená. Cbd.

a) $f_a : y = \frac{1}{2}x + 1$ je lineární funkce s kladným koeficientem lineárního členu. Je tedy rostoucí a evidentně není omezená. S tímto konstatováním se většina studentů na základě představy grafu funkce f_a nepochybně spokojí. Ve zvídavé třídě se však mohou najít studenti, kteří se zeptají, jak by se dalo dokázat, že funkce f_a není omezená. Žádnou otázku učitel nesmí nechat bez odpovědi. Může však podle situace zvážit, zda např. následující důkaz ukáže ve třídě, nebo jen zájemcům mimo vyučovací hodinu.

SPOREM: Předpokládejme, že dokazované tvrzení o tom, že funkce f_a není omezená, neplatí. To by ovšem znamenalo, že je funkce f_a omezená, a tedy je omezená shora i zdola.

1) Uvažujme nejprve např. omezenost shora:

Předpokládejme, že f_a je omezená shora. Tozn., že existuje horní mez, tedy reálné číslo h takové, že $\forall x \in R: f(x) = \frac{1}{2}x + 1 \leq h$.

Ověřme, pro která *x* to bude platit: Evidentně to bude pro taková *x*, pro něž $x + 2 \leq 2h$, tedy pro $x \leq 2h - 2$. Daná nerovnost evidentně neplatí pro všechna reálná *x*, nýbrž pouze pro ta, která jsou menší nebo rovna $2h - 2$. To je ale SPOR S PŘEDPOKLADEM. Předpoklad o omezenosti funkce f_a shora byl chybný, tozn., že funkce f_a omezená shora není … cbd.

2) Omezenost zdola - analogicky bychom dokázali, že funkce f_a není omezená ani zdola.

Př. 6 Dokažte, že funkce $f : y = 2x + 1$ má na intervalu $\langle -1;3 \rangle$ v bodě 3 ostré maximum a v -1 ostré minimum.

Př. 7 Nalezněte inverzní funkci f^{-1} k funkci f a obě zakreslete do jednoho obrázku:

a) $f : y = 3x - 2$, $x \in \langle -1;2 \rangle$. $\left[f^{-1} : y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \quad x \in \langle -5;4 \rangle \right]$

b) $f : y = \frac{1}{2}x^2$, $x \in \langle 0;\infty)$. $\left[f^{-1} : y = \sqrt{2x}, \quad x \in \langle 0;\infty) \right]$

Met.: Grafy funkce dané a funkce k ní inverzní jsou souměrně sdružené podle osy I. a III. kvadrantu. Zdálo by se, že na začátku tématu o funkcích je pojem inverzní funkce jen okrajovou záležitostí. Učitel si však musí být vědom toho, že o důkladné pochopení podstaty a souvislosti funkce dané a funkce k ní inverzní bude zanedlouho opírat vysvětlení např. exponenciálních a logaritmických funkcí. Proto je velmi důležité nepodcenit tuto látku, ale probrat ji velmi pečlivě s důrazem na kontrolu, že studenti všechny důležité souvislosti opravdu dobře pochopili.

Př. 8 Načrtněte graf funkce f, víte-li, že platí současně:

- $D(f) = \langle -3;\infty) - \{0\}$
- $f(-3) = -2$
- Průsečíky grafu funkce f s osou x jsou v bodech $P_1[-1;0]$ a $P_2[5;0]$.
- V intervalu $\langle -3;0)$ je funkce f rostoucí a není omezená shora.
- V intervalu $\langle -3;3 \rangle - \{0\}$ je funkce f sudá.
- V intervalu $\langle 3;\infty)$ je funkce f rostoucí a omezená shora číslem $h = 4$.

a) Z grafu určete obor funkčních hodnot funkce f.
b) Určete souřadnice průsečíku grafu funkce f s osou y.
c) Je funkce f omezená zdola v definičním oboru?
d) Určete maximum funkce f v definičním oboru.
e) Určete minimum funkce f v definičním oboru.
f) Je funkce f prostá v definičním oboru?
g) Určete alespoň jeden interval, ve kterém je funkce f prostá. [Petáková 26/28, řešení 187/28]

Met.: Úloha 8 je velmi zdařile zvolená, formulovaná a naplněná řadou úkolů. Většinou totiž dosud studenti k zadané funkci určovali vlastnosti. Tato úloha vyžaduje naopak k zadaným vlastnostem vyhledat funkci. Učitel jí může na závěr probírání tématu o vlastnostech funkcí velmi dobře využít k tomu, aby si zkontroloval, jak dobře studenti tuto látku pochopili. Ideálně by měl nakopírovat zadání tak, aby dostal každý student své vlastní. Zdroj by rozhodně neměl být uveden, aby se zamezilo možnosti najít ve Sbírce úloh výsledek bez práce. Práci na nakreslení grafu funkce a zodpovězení otázek z úlohy 8 by měl učitel zadat ve třídě k samostatnému řešení s dostatečnou časovou dotací. Během doby, kdy budou studenti na úloze pracovat, by měl učitel procházet třídou a sledovat, jak jsou obratní, co jim dělá potíže, eventuálně přidělovat nějaké body či malé jedničky (podle zavedeného systému). Na závěr by měl být celý příklad vyřešen na tabuli, aby si i nejslabší studenti mohli uvědomit chyby a nakreslit a zapsat správné řešení.

Rozšiřující cvičení

Př. 9 Jsou dány množiny $A=\langle -1;2)$, $B=\{-2,0,1\}$. Sestrojte graf

a) A x B b) A x A c) B x B

Př. 10 Sestrojte graf binární relace $V=\{[x,y]\in R\times R: \quad \wedge \quad \wedge \quad\}$

[pětiúhelník ABCDE kromě vrcholů A, C, D, E a kromě stran CD a AE, kde A[-3;1], B[0;1], C[2;3], D[2;4], E[-3;4]]

Met.: Mezi rozšiřující cvičení byly poslední dvě úlohy zařazeny nikoliv z důvodu náročnosti, jsou samozřejmě velmi jednoduché, ale proto, že učitel při zavádění pojmu funkce nemusel stavět na znalosti kartézského součinu a binární relace a tyto pojmy tak nemusí být pro studenty známé.

10.