# **17 Lineární funkce – met.**

**Stručný přehled teorie**

**Lineární funkcí** nazýváme každou funkci *f: y = ax + b, D(f) =* ***R***

* + pro *a = 0* je *f*  **konstantní** funkce
	+ pro *a ≠ 0* a *b = 0* je *f* **přímá úměrnost**

Grafem každé lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou y.

 Pozn.: latinské slovo *linea* znamená *čára*, *přímka* – odsud název funkce

**Vlastnosti lineárních funkcí:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***a = 0*** | ***a > 0*** | ***a < 0*** |
|  y  *y = b* x |  y  *y = ax+b* x  |  y *y = ax+b* x |
| *D(f) =* ***R****H (f) =* Je omezenáJe nerostoucí a neklesající, není prostáV každém x  ***R*** má maximum i minimum | *D(f) =* ***R****H (f) =* ***R***Není ani shora, ani zdola omezenáJe rostoucí, a tedy prostáNemá ani maximum, ani minimum | *D(f) =* ***R****H (f) =* ***R***Není ani shora, ani zdola omezenáJe klesající, a tedy prostáNemá ani maximum, ani minimum |

**Lineární funkce s absolutními hodnotami** jsou takové lineární funkce, které mají v předpisu funkce jednu nebo více absolutních hodnot, ve kterých jsou výrazy s proměnnou. Grafem takové funkce je lomená čára.

Základní poznatky:

Př. 1 Jsou dány lineární funkce: a) f: y = -3x + 4; x

 b) f: y = 7x + 1; x

 U obou funkcí zakreslete graf, určete definiční obor D(f), obor funkčních hodnot H (f), f (0), f (5).

 Pro jaké xR, je f (x) = 8? Určete vlastnosti funkce f.

 [ a) D (f) = , H (f) = , f (0) = 4, f (5) = -11, x = , klesající, prostá, omezená, ostré globální maximum v bodě -8, ostré globální minimum v bodě 11;

 b) D (f) = , H (f) = , f (0) = neexistuje, f (5) = 36, x = 1, rostoucí, prostá, omezená, nemá extrémy.]

Př. 2 Graf lineární funkce prochází body A [-1; -2], B [3; 2]. Určete její rovnici. [y = x - 1]

 Met.: 1. způsob řešení: užitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých: Hledáme lineární funkci: *f: y = ax + b* $A\in f$ $-2=-a+b$ $B\in f$ $2=3a+b$ Řešíme soustavu rovnic *….. a = 1, b = -1*

Hledaná funkce je *f: y = x – 1*

2. způsob řešení: užitím grafu hledané lineární funkce – tato metoda velmi urychlí nalezení funkce, neboť minimálně koeficient *a* lze z grafu prakticky “přečíst” a velmi často se přímo z grafu “přečte” nebo lehce určí i koeficient *b*. V obtížnějších zadáních se *b* vypočítá z jednoduché lineární rovnice. Rozhodně se však nemusí řešit soustava rovnic.

y

*f: y = ax + b* $a=\frac{∆y}{∆x}=\frac{4}{4}=1$

 *b = -1*

 *f: y = x - 1*

***f***

2

B

3

-1

x

$$∆y=4$$

*b=-1*

-2

$$∆x=4$$

A

 Pozn.: Učitel jistě lehce zdůvodní, že koeficient *b* souvisí s průsečíkem grafu funkce s osou *y*. Ale při zdůvodnění způsobu výpočtu koeficientu *a* narazí na řadu problémů: • studenti neznají pojem *směrový úhel* a *směrnice přímky*; • znalost základních goniometrických funkcí se omezuje pouze na ostré úhly. Přesto určitě stojí za to seznámit je s tímto způsobem určení rovnice lineární funkce. Může se prozatím omezit na informaci, že koeficient *a* souvisí s funkcí tangens úhlu, který přímka, jež je grafem dané lineární funkce, svírá s kladnou poloosou *x*. Absolutní hodnota funkce tangens se určí z pravoúhlého trojúhelníku „zavěšeného“ na přímku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. O kladnosti či zápornosti koeficientu *a* se pak rozhodne podle toho, zda je funkce rostoucí ($a>0$), nebo je klesající ($a<0$).

 Př. 2A Graf lineární funkce prochází body A [-6; 12], B [3; 2]. Určete její rovnici.

 Met.: Toto je příklad zadání s největší komplikací, na jakou lze při použití 2. způsobu řešení narazit:

Stačí náčrt od ruky:

Hledaná funkce je *f: y = ax + b*;

*f* je klesající, proto $a<0$ … $a=-\frac{∆y}{∆x}=-\frac{10}{9}$

b - ? $B\in f… 2=-\frac{10}{9}.3+b \rightarrow b=\frac{16}{3}$

Funkce $f:y=-\frac{10}{9}x+\frac{16}{3}$

-6

3

12

2

*b -* ?

$$∆x=9$$

$$∆y=10$$

x

y

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 3 Určete rovnici funkce, jejíž graf je na obrázku – lomená čára A B C D.



[f = f1f2f3, f1: y=,

f2: y = 2x+1; x (0; 1), f3: y =]

Met.: Pokud učitel přesvědčí studenty, aby přijali za svůj právě 2. způsob řešení předcházející úlohy, pak je celá úloha 3 řešitelná zpaměti, bez jediného výpočtu.

Př. 4 Sestrojte graf funkce f: y = |x+3| - 2.|x-1| + |x| [Nulovými body jsou čísla -3; 0; 1. Graf tvoří části funkcí: y = -5, y = 2x+1, y = 4x+1, y = 5]

Př. 5 Užitím grafů lineárních funkcí řešte graficky soustavy rovnic a nerovnic a zapište množinu všech kořenů:

 a) x – 2y = 5 b) x + 2y 

 3x + y  3x – y 

 Met.:

q: y = -3x + 1

p: $y=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$

p*: x = 2y + 5*

1

1

x

y

$$-\frac{5}{2}$$

-2

p: $y=-\frac{x}{2}$

p: *x = - 2y*

q: y = 3x -7

q: $x=\frac{y}{3}+\frac{7}{3}$

x

y

-1

-7

2

Řešení tohoto typu úloh bylo podrobně rozebráno v kapitole *04 Lineární rovnice a nerovnice a jejich soustavy*. V tomto místě je pouze navíc věnována větší pozornost různým možnostem zápisu množiny řešení soustavy nerovnic, příp. rovnic a nerovnic, o dvou neznámých.

Zápis množiny řešení lze provést v podstatě dvěma základními způsoby:

1. $K=\left\{\left[x;y\right]\in R×R:y=\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\bigwedge\_{}^{}x\leq 1\right\}$ nebo $K=\left\{\left[x;y\right]\in R×R:x=2y+5\bigwedge\_{}^{}y\leq -2\right\}$;
2. $K=\left\{\left[x;y\right]\in R×R:x\in \left〈-2y; \frac{y}{3}+\frac{7}{3}\right〉\bigwedge\_{}^{}y\geq -1\right\}$ nebo $K=\left\{\left[x;y\right]\in R×R:y\geq -\frac{x}{2} pro x\leq 2\right\}\bigcup\_{}^{}\left\{\left[x;y\right]\in R×R:y\geq 3x-7 pro x\geq 2\right\}$

Př. 6 MA – Jaro 2017 Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1 – 25.4) odpovídající graf funkce A – F.

25.1  …….

 25.2  …….

25.3  …….

 25.4  …….



[F, A, B, E]

Rozšiřující cvičení

Př. 7 Určete množinu S všech lineárních funkcí y = x + b; b [Pás rovnoběžných přímek, ohraničených přímkami y = x a y = x+2, druhá do pásu nepatří.]

 Met.:

0

2

x

y

S

y = x

y = x+2

Diskuse o řešení by měla být vedena tak, aby si studenti

uvědomili, že koeficient lineárního členu je konstantní

a má hodnotu a = 1. Tím je dáno, že každá přímka, která patří

do hledané množiny S svírá s kladnou poloosou *x* úhel 45°, je

tedy rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu. Koeficient *b* pak

určuje y-ovou souřadnici průsečíků přímek s osou *y*.

Př. 8 Určete množinu S všech lineárních funkcí y = ax + 2; a [Svazek přímek, které prochází bodem [0; 2] a jsou ohraničené přímkami: y = -x+2 a y = 2x+2, první uvedená do svazku nepatří.]

 Met.:

2

x

y

y = 2x + 2

y = – x

4

1

-1

3

S

Skutečnost, že se koeficient *b* rovná 2, znamená,

že všechny přímky hledané množiny S procházejí

bodem $\left[0;2\right]$. Určit rovnice a polohu hraničních

přímek svazku je rovněž snadné. Jediným problémem,

který je třeba se studenty důkladně prodiskutovat,

může být výběr dvojice vrcholových úhlů, která je

obrazem svazku přímek S.