

# 17 Lineární funkce – met.

## Stručný přehled teorie

**Lineární funkcí** nazýváme každou funkci  $f: y = ax + b, D(f) = \mathbf{R}$

- pro  $a = 0$  je  $f$  **konstantní** funkce
- pro  $a \neq 0$  a  $b = 0$  je  $f$  **přímá úměrnost**

Grafem každé lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou  $y$ .

Pozn.: latinské slovo *linea* znamená *čára, přímka* – odsud název funkce

### Vlastnosti lineárních funkcí:

$a = 0$	$a > 0$	$a < 0$
$D(f) = \mathbf{R}$ $H(f) = \{b\}$ Je omezená Je nerostoucí a neklesající, není prostá V každém $x \in \mathbf{R}$ má maximum i minimum	$D(f) = \mathbf{R}$ $H(f) = \mathbf{R}$ Není ani shora, ani zdola omezená Je rostoucí, a tedy prostá Nemá ani maximum, ani minimum	$D(f) = \mathbf{R}$ $H(f) = \mathbf{R}$ Není ani shora, ani zdola omezená Je klesající, a tedy prostá Nemá ani maximum, ani minimum

**Lineární funkce s absolutními hodnotami** jsou takové lineární funkce, které mají v předpisu funkce jednu nebo více absolutních hodnot, ve kterých jsou výrazy s proměnnou. Grafem takové funkce je lomená čára.

Základní poznatky:

- Př. 1** Jsou dány lineární funkce:
- a)  $f: y = -3x + 4; x \in \langle -8; 11 \rangle$
  - b)  $f: y = 7x + 1; x \in (0; 6)$

U obou funkcí zakreslete graf, určete definiční obor  $D(f)$ , obor funkčních hodnot  $H(f)$ ,  $f(0)$ ,  $f(5)$ .

Pro jaké  $x \in \mathbf{R}$ , je  $f(x) = 8$ ? Určete vlastnosti funkce  $f$ .

[ a)  $D(f) = \langle -8; 11 \rangle$ ,  $H(f) = \langle -29; 28 \rangle$ ,  $f(0) = 4$ ,  $f(5) = -11$ ,  $x = -\frac{4}{3}$ , klesající, prostá, omezená, ostré globální maximum v bodě -8, ostré globální minimum v bodě 11;

b)  $D(f) = (0; 6)$ ,  $H(f) = (1; 43)$ ,  $f(0) =$  neexistuje,  $f(5) = 36$ ,  $x = 1$ , rostoucí, prostá, omezená, nemá extrém.]

**Př. 2** Graf lineární funkce prochází body A [-1; -2], B [3; 2]. Určete její rovnici. [ $y = x - 1$ ]

**Met.:** 1. způsob řešení: užitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:

Hledáme lineární funkci:  $f: y = ax + b$

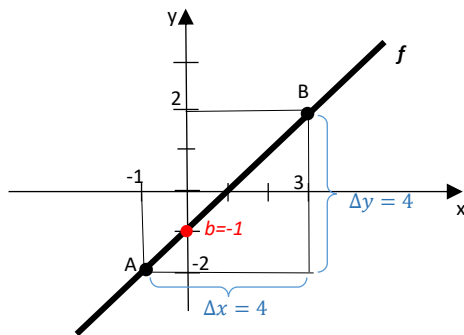
$$A \in f \quad -2 = -a + b$$

$$B \in f \quad 2 = 3a + b$$

Řešíme soustavu rovnic .....  $a = 1$ ,  $b = -1$

Hledaná funkce je  $f: y = x - 1$

2. způsob řešení: užitím grafu hledané lineární funkce – tato metoda velmi urychlí nalezení funkce, neboť minimálně koeficient  $a$  lze z grafu prakticky "přečíst" a velmi často se přímo z grafu "přečte" nebo lehce určí i koeficient  $b$ . V obtížnějších zadáních se  $b$  vypočítá z jednoduché lineární rovnice. Rozhodně se však nemusí řešit soustava rovnic.



$$f: y = ax + b \quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{4} = 1$$

$$b = -1$$

$$f: y = x - 1$$

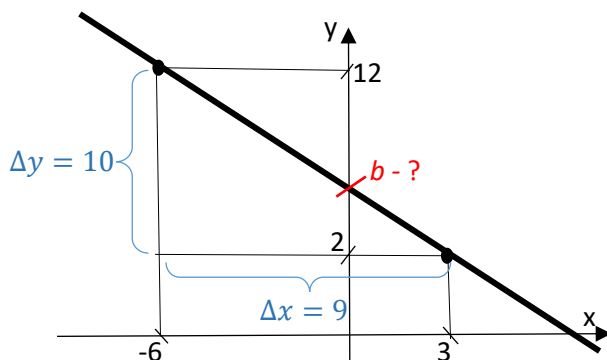
Pozn.: Učitel jistě lehce zdůvodní, že koeficient  $b$  souvisí s průsečíkem grafu funkce s osou  $y$ . Ale při zdůvodnění způsobu výpočtu koeficientu  $a$  narazí na řadu problémů:

- studenti neznají pojem *směrový úhel* a *směrnice přímky*;
- znalost základních goniometrických funkcí se omezuje pouze na ostré úhly.

Přesto určitě stojí za to seznámit je s tímto způsobem určení rovnice lineární funkce. Může se prozatím omezit na informaci, že koeficient  $a$  souvisí s funkcí tangens úhlu, který přímka, jež je grafem dané lineární funkce, svírá s kladnou poloosou  $x$ . Absolutní hodnota funkce tangens se určí z pravouhlého trojúhelníku „zavěšeného“ na přímku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. O kladnosti či zápornosti koeficientu  $a$  se pak rozhodne podle toho, zda je funkce rostoucí ( $a > 0$ ), nebo je klesající ( $a < 0$ ).

**Př. 2A** Graf lineární funkce prochází body A [-6; 12], B [3; 2]. Určete její rovnici.

**Met.:** Toto je příklad zadání s největší komplikací, na jakou lze při použití 2. způsobu řešení narazit:



Stačí načrtnout od ruky:

Hledaná funkce je  $f: y = ax + b$ ;

$f$  je klesající, proto  $a < 0$  ...  $a = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10}{9}$

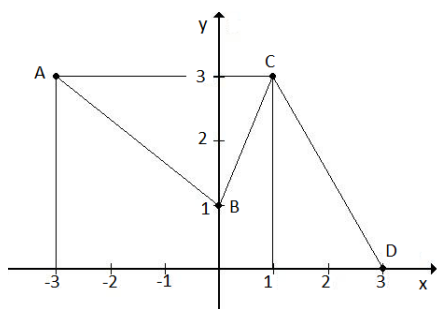
$$b - ? \quad B \in f \dots 2 = -\frac{10}{9} \cdot 3 + b \rightarrow b = \frac{16}{3}$$

Funkce

$$f: y = -\frac{10}{9}x + \frac{16}{3}$$

Typové příklady standardní náročnosti

**Př. 3** Určete rovnici funkce, jejíž graf je na obrázku – lomená čára A B C D.



$$[f = f_1 \cup f_2 \cup f_3, f_1: y = -\frac{2}{3}x + 1; x \in \langle -3; 0 \rangle,$$

$$f_2: y = 2x + 1; x \in (0; 1), f_3: y = -\frac{3}{2}x + \frac{9}{2}; x \in \langle 1; 3 \rangle]$$

**Met.:** Pokud učitel přesvědčí studenty, aby přijali za svůj právě 2. způsob řešení předcházející úlohy, pak je celá úloha 3 řešitelná z paměti, bez jediného výpočtu.

**Př. 4** Sestrojte graf funkce  $f: y = |x+3| - 2 \cdot |x-1| + |x|$

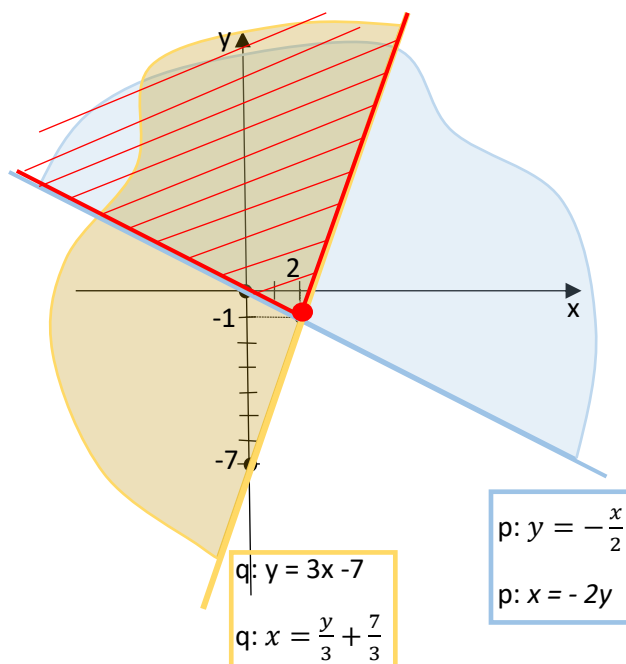
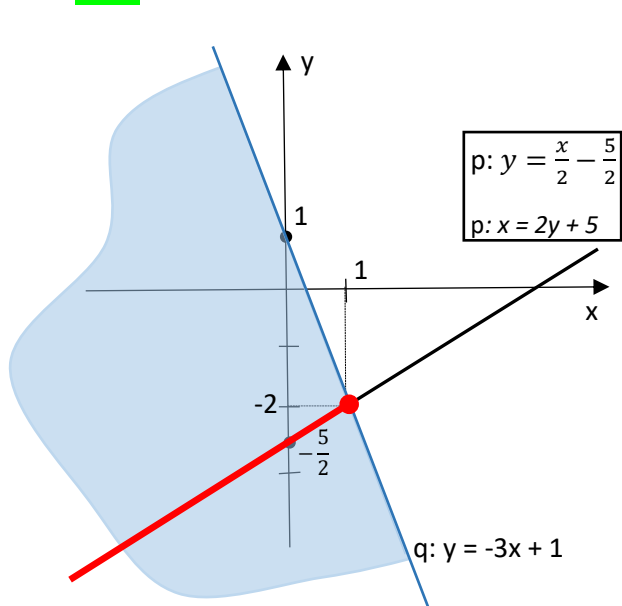
[Nulovými body jsou čísla -3; 0; 1. Graf tvoří části funkcí:  $y = -5$ ,  $y = 2x+1$ ,  $y = 4x+1$ ,  $y = 5$ ]

**Př. 5** Užitím grafů lineárních funkcí řešte graficky soustavy rovnic a nerovnic a zapište množinu všech kořenů:

a)  $x - 2y = 5$   
 $3x + y \leq 1$

b)  $x + 2y \geq 0$   
 $3x - y \leq 7$

**Met.:**



Řešení tohoto typu úloh bylo podrobně rozebráno v kapitole 04 *Lineární rovnice a nerovnice a jejich soustavy*. V tomto místě je pouze navíc věnována větší pozornost různým možnostem zápisu množiny řešení soustavy nerovnic, příp. rovnic a nerovnic, o dvou neznámých.

Zápis množiny řešení lze provést v podstatě dvěma základními způsoby:

a)  $K = \left\{ [x; y] \in R \times R: y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \wedge x \leq 1 \right\}$  nebo  $K = \{ [x; y] \in R \times R: x = 2y + 5 \wedge y \leq -2 \};$

b)  $K = \left\{ [x; y] \in R \times R: x \in \langle -2y; \frac{y}{3} + \frac{7}{3} \rangle \wedge y \geq -1 \right\}$

nebo  $K = \left\{ [x; y] \in R \times R: y \geq -\frac{x}{2} \text{ pro } x \leq 2 \right\} \cup \{ [x; y] \in R \times R: y \geq 3x - 7 \text{ pro } x \geq 2 \}$

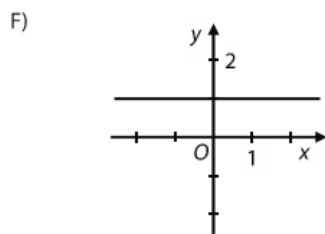
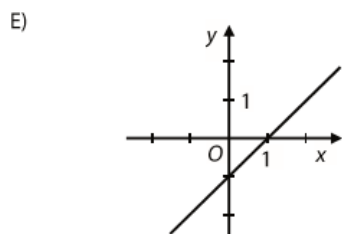
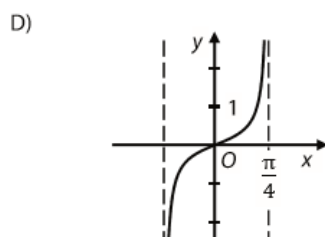
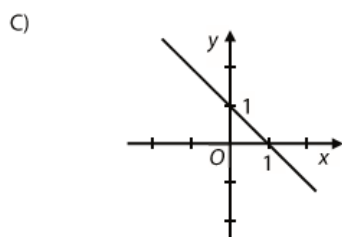
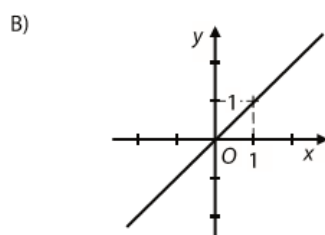
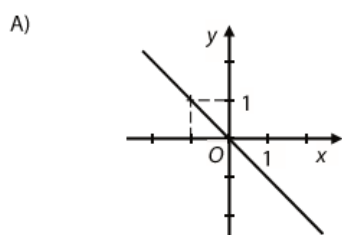
**Př. 6** MA – Jaro 2017 Přiřadte ke každému předpisu funkce (25.1 – 25.4) odpovídající graf funkce A – F.

25.1  $y = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$  .....

25.2  $y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{3\pi}{4}$  .....

25.3  $y = x \cdot \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$  .....

25.4  $y = x + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$  .....



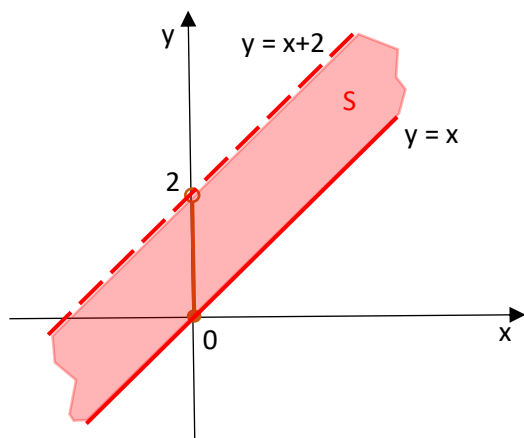
[F, A, B, E]

Rozšiřující cvičení

**Př. 7** Určete množinu S všech lineárních funkcí  $y = x + b$ ;  $b \in (0; 2)$

[Pás rovnoběžných přímek, ohraničených přímkami  $y = x$  a  $y = x+2$ , druhá do pásu nepatří.]

**Met.:**

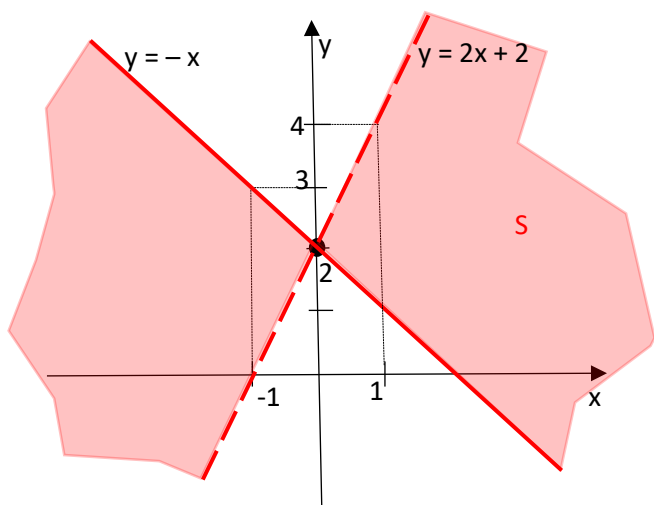


Diskuse o řešení by měla být vedena tak, aby si studenti uvědomili, že koeficient lineárního členu je konstantní a má hodnotu  $a = 1$ . Tím je dáno, že každá přímka, která patří do hledané množiny S svírá s kladnou poloosou  $x$  úhel  $45^\circ$ , je tedy rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu. Koeficient  $b$  pak určuje  $y$ -ovou souřadnici průsečíků přímek s osou  $y$ .

**Př. 8** Určete množinu  $S$  všech lineárních funkcí  $y = ax + 2$ ;  $a \in (-1; 2)$

[Svazek přímek, které prochází bodem  $[0; 2]$  a jsou ohraničené přímkami:  $y = -x + 2$  a  $y = 2x + 2$ , první uvedená do svazku nepatří.]

**Met.:**



Skutečnost, že se koeficient  $b$  rovná 2, znamená, že všechny přímky hledané množiny  $S$  procházejí bodem  $[0; 2]$ . Určit rovnice a polohu hraničních přímek svazku je rovněž snadné. Jediným problémem, který je třeba se studenty důkladně prodiskutovat, může být výběr dvojice vrcholových úhlů, která je obrazem svazku přímek  $S$ .