17 Lineární funkce – met.

Stručný přehled teorie

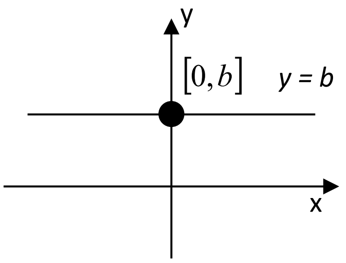
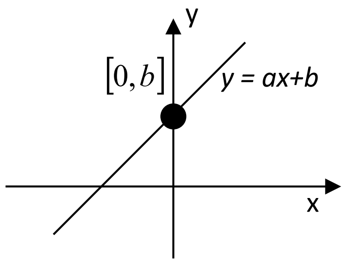
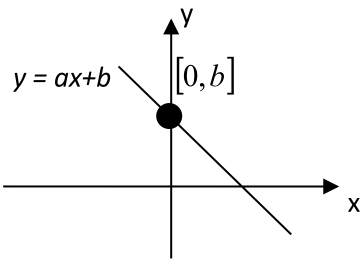
Lineární funkcí nazýváme každou funkci *f: y = ax + b, D(f) =* ***R***

- pro *a = 0* je *f* **konstantní** funkce
- pro *a ≠ 0* a *b = 0* je *f* **přímá úměrnost**

Grafem každé lineární funkce je přímka, která je různoběžná s osou y.

Pozn.: latinské slovo *linea* znamená *čára*, *přímka* – odsud název funkce

Vlastnosti lineárních funkcí:

<table>
<tr><th>a = 0</th><th>a > 0</th><th>a < 0</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>D(f) = R

H (f) = $\{b\}$

Je omezená

Je nerostoucí a neklesající, není prostá

V každém x ∈ R má maximum i minimum</td>
<td>D(f) = R

H (f) = R

Není ani shora, ani zdola omezená

Je rostoucí, a tedy prostá

Nemá ani maximum, ani minimum</td>
<td>D(f) = R

H (f) = R

Není ani shora, ani zdola omezená

Je klesající, a tedy prostá

Nemá ani maximum, ani minimum</td>
</tr>
</table>

Lineární funkce s absolutními hodnotami jsou takové lineární funkce, které mají v předpisu funkce jednu nebo více absolutních hodnot, ve kterých jsou výrazy s proměnnou. Grafem takové funkce je lomená čára.

Základní poznatky:

Př. 1 Jsou dány lineární funkce: a) f: y = -3x + 4; x $\in \langle -8; 11 \rangle$

b) f: y = 7x + 1; x $\in (0; 6)$

U obou funkcí zakreslete graf, určete definiční obor D(f), obor funkčních hodnot H (f), f (0), f (5).

Pro jaké x $\in$ R, je f (x) = 8? Určete vlastnosti funkce f.

[a) D (f) = $\langle -8;11 \rangle$, H (f) = $\langle -29;28 \rangle$, f (0) = 4, f (5) = -11, x = $-\frac{4}{3}$, klesající, prostá, omezená, ostré globální maximum v bodě -8, ostré globální minimum v bodě 11;

b) D (f) = $(0;6)$, H (f) = $(1;43)$, f (0) = neexistuje, f (5) = 36, x = 1, rostoucí, prostá, omezená, nemá extrémy.]

Př. 2 Graf lineární funkce prochází body A [-1; -2], B [3; 2]. Určete její rovnici. [y = x - 1]

Met.: 1. způsob řešení: užitím soustavy dvou rovnic o dvou neznámých:

Hledáme lineární funkci: *f: y = ax + b*

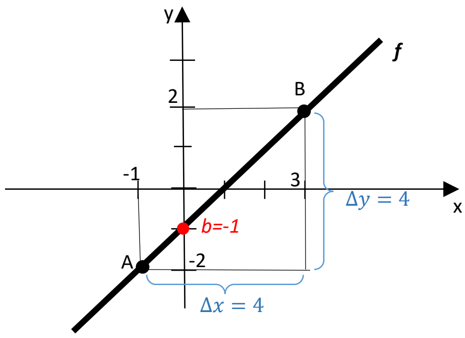
$A \in f \qquad -2 = -a + b$

$B \in f \qquad 2 = 3a + b$

Řešíme soustavu rovnic ….. *a = 1, b = -1*

Hledaná funkce je $\boxed{f: y = x - 1}$

2. způsob řešení: užitím grafu hledané lineární funkce – tato metoda velmi urychlí nalezení funkce, neboť minimálně koeficient *a* lze z grafu prakticky "přečíst" a velmi často se přímo z grafu "přečte" nebo lehce určí i koeficient *b*. V obtížnějších zadáních se *b* vypočítá z jednoduché lineární rovnice. Rozhodně se však nemusí řešit soustava rovnic.



f: y = ax + b $\quad a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{4} = 1$

b = -1

$\boxed{f: y = x - 1}$

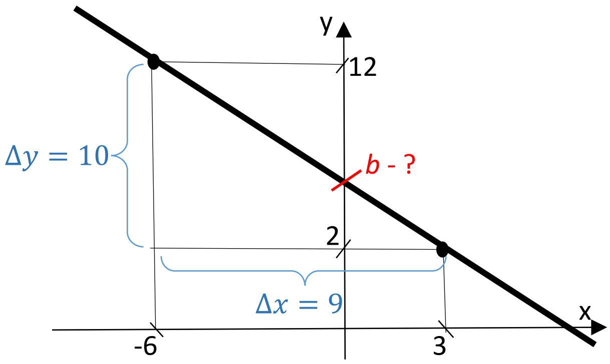
Pozn.: Učitel jistě lehce zdůvodní, že koeficient *b* souvisí s průsečíkem grafu funkce s osou *y*. Ale při zdůvodnění způsobu výpočtu koeficientu *a* narazí na řadu problémů:

- studenti neznají pojem *směrový úhel* a *směrnice přímky*;
- znalost základních goniometrických funkcí se omezuje pouze na ostré úhly.

Přesto určitě stojí za to seznámit je s tímto způsobem určení rovnice lineární funkce. Může se prozatím omezit na informaci, že koeficient *a* souvisí s funkcí tangens úhlu, který přímka, jež je grafem dané lineární funkce, svírá s kladnou poloosou *x*. Absolutní hodnota funkce tangens se určí z pravoúhlého trojúhelníku „zavěšeného" na přímku, jehož odvěsny jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami. O kladnosti či zápornosti koeficientu *a* se pak rozhodne podle toho, zda je funkce rostoucí ($a > 0$), nebo je klesající ($a < 0$).

Př. 2A Graf lineární funkce prochází body A [-6; 12], B [3; 2]. Určete její rovnici.

Met.: Toto je příklad zadání s největší komplikací, na jakou lze při použití 2. způsobu řešení narazit:



Stačí náčrt od ruky:

Hledaná funkce je *f: y = ax + b*;

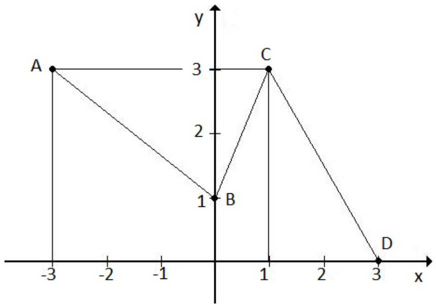
f je klesající, proto $a < 0$ … $a = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10}{9}$

b - ? $\quad B \in f$ … $2 = -\frac{10}{9}.3 + b \rightarrow b = \frac{16}{3}$

Funkce $\boxed{f: y = -\frac{10}{9}x + \frac{16}{3}}$

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 3 Určete rovnici funkce, jejíž graf je na obrázku – lomená čára A B C D.



[f = $f_1 \cup f_2 \cup f_3$, f_1: y=$-\dfrac{2}{3}x+1; x \in \langle -3;0 \rangle$,

f_2: y = 2x+1; x $\in$ (0; 1), f_3: y =$-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{2}; x \in \langle 1;3 \rangle$]

Met.: Pokud učitel přesvědčí studenty, aby přijali za svůj právě 2. způsob řešení předcházející úlohy, pak je celá úloha 3 řešitelná zpaměti, bez jediného výpočtu.

Př. 4 Sestrojte graf funkce f: y = |x+3| - 2.|x-1| + |x|

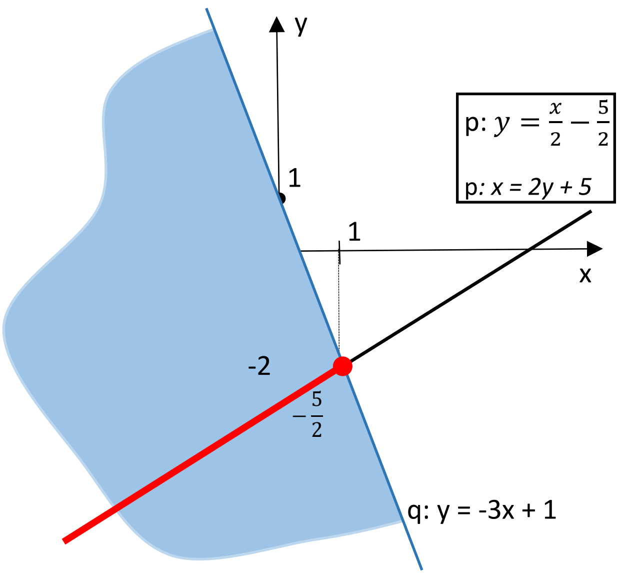
[Nulovými body jsou čísla -3; 0; 1. Graf tvoří části funkcí: y = -5, y = 2x+1, y = 4x+1, y = 5]

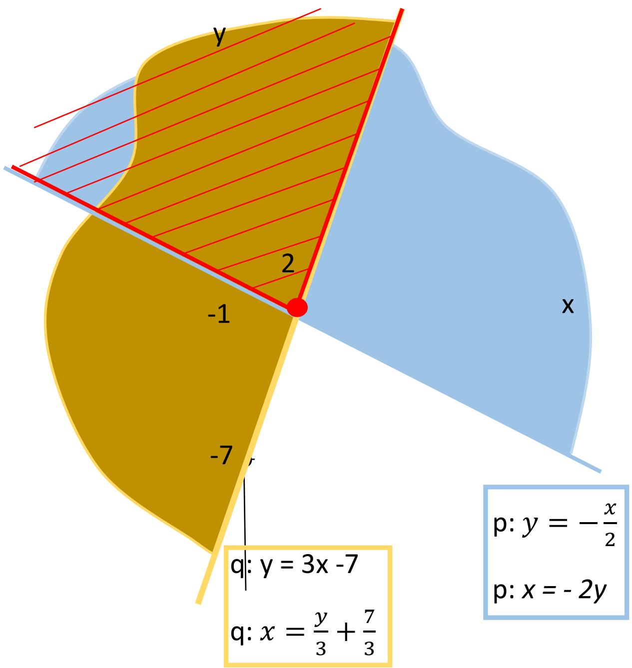
Př. 5 Užitím grafů lineárních funkcí řešte graficky soustavy rovnic a nerovnic a zapište množinu všech kořenů:

a) x – 2y = 5
3x + y ≤ 1

b) x + 2y ≥ 0
3x – y ≤ 7

Met.:





Řešení tohoto typu úloh bylo podrobně rozebráno v kapitole *04 Lineární rovnice a nerovnice a jejich soustavy*. V tomto místě je pouze navíc věnována větší pozornost různým možnostem zápisu množiny řešení soustavy nerovnic, příp. rovnic a nerovnic, o dvou neznámých.

Zápis množiny řešení lze provést v podstatě dvěma základními způsoby:

a) $K = \left\{[x;y] \in R \times R: y = \frac{x}{2} - \frac{5}{2} \wedge x \leq 1\right\}$ nebo $K = \{[x;y] \in R \times R: x = 2y + 5 \wedge y \leq -2\}$;

b) $K = \left\{[x;y] \in R \times R: x \in \langle -2y; \frac{y}{3} + \frac{7}{3} \rangle \wedge y \geq -1\right\}$

nebo $K = \left\{[x;y] \in R \times R: y \geq -\frac{x}{2}\ pro\ x \leq 2\right\} \cup \{[x;y] \in R \times R: y \geq 3x - 7\ pro\ x \geq 2\}$

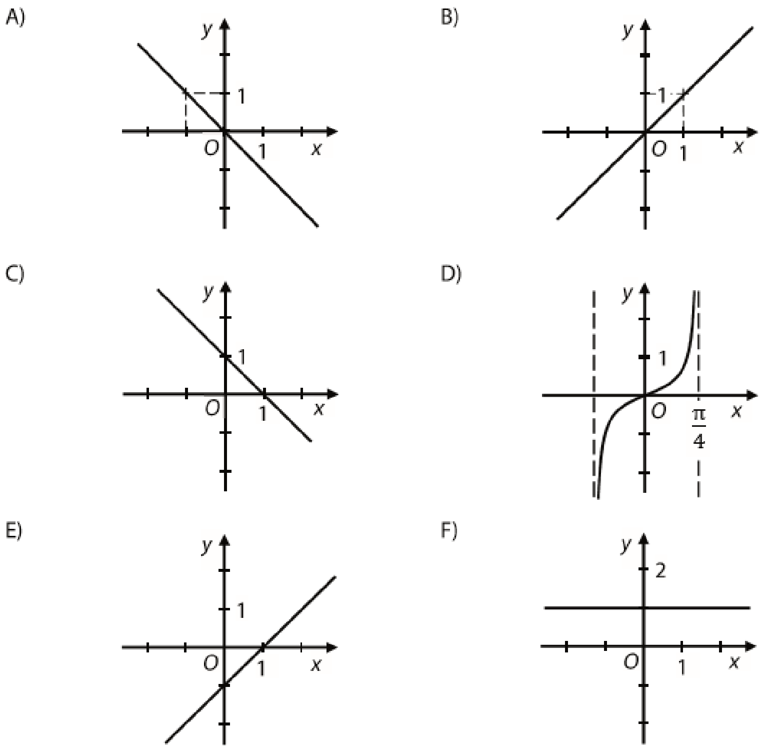
Př. 6 MA – Jaro 2017 Přiřaďte ke každému předpisu funkce (25.1 – 25.4) odpovídající graf funkce A – F.

25.1 $y = tg\dfrac{\pi}{4}$ ....

25.2 $y = x \cdot tg\dfrac{3\pi}{4}$ ....

25.3 $y = x \cdot tg\dfrac{5\pi}{4}$ ....

25.4 $y = x + tg\dfrac{7\pi}{4}$ ....



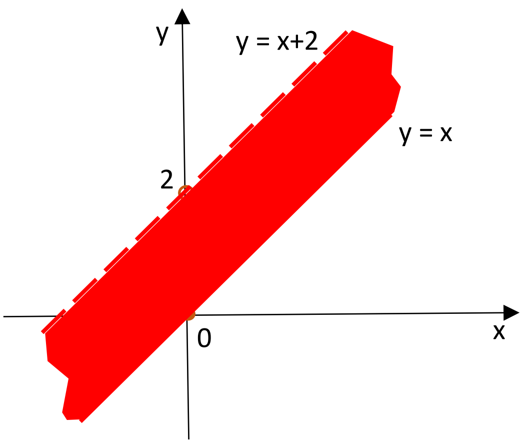
[F, A, B, E]

Rozšiřující cvičení

Př. 7 Určete množinu S všech lineárních funkcí y = x + b; b $\in \langle 0;2)$

[Pás rovnoběžných přímek, ohraničených přímkami y = x a y = x+2, druhá do pásu nepatří.]

Met.:

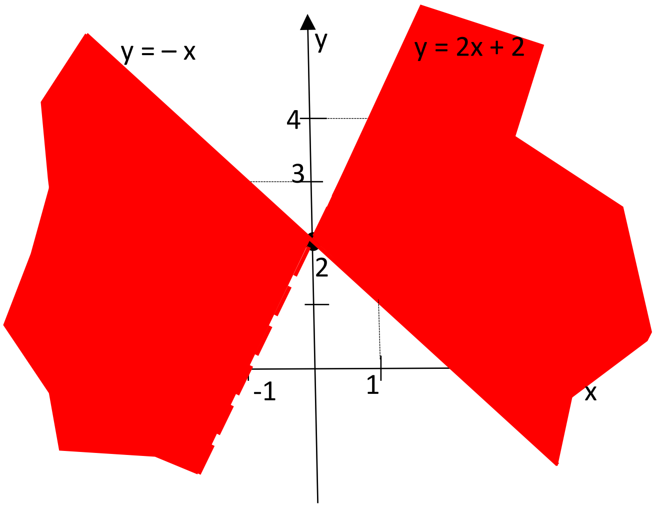


Diskuse o řešení by měla být vedena tak, aby si studenti uvědomili, že koeficient lineárního členu je konstantní a má hodnotu a = 1. Tím je dáno, že každá přímka, která patří do hledané množiny S svírá s kladnou poloosou *x* úhel 45°, je tedy rovnoběžná s osou I. a III. kvadrantu. Koeficient *b* pak určuje y-ovou souřadnici průsečíků přímek s osou *y*.

Př. 8 Určete množinu S všech lineárních funkcí y = ax + 2; $a \in \left(-1; 2\right\rangle$

[Svazek přímek, které prochází bodem [0; 2] a jsou ohraničené přímkami: y = -x+2 a y = 2x+2, první uvedená do svazku nepatří.]

Met.:



Skutečnost, že se koeficient *b* rovná 2, znamená, že všechny přímky hledané množiny S procházejí bodem $[0; 2]$. Určit rovnice a polohu hraničních přímek svazku je rovněž snadné. Jediným problémem, který je třeba se studenty důkladně prodiskutovat, může být výběr dvojice vrcholových úhlů, která je obrazem svazku přímek S.