# **18 Kvadratická funkce – met.**

**Stručný přehled teorie**

**Kvadratická funkce** je funkce **f: y = ax2 +bx +c**, kde a,b,c**R**, a ≠ 0.

Grafem kvadratické funkce je křivka zvaná parabola, která je souměrná podle osy *o* rovnoběžné s osou *y*.

Průsečík osy *o* s parabolou nazýváme vrchol paraboly**.**

Vlastnosti kvadratických funkcí *f: y = ax2 + by + c*

 *a > 0 a < 0*

y

y

$$f:y=ax^{2}+bx+c,a<0$$

$$c-\frac{b^{2}}{4a}$$

$$ f:y=ax^{2}+bx+c,a>0$$

$$-\frac{b}{2a}$$

x

x

$$-\frac{b}{2a}$$

$$c-\frac{b^{2}}{4a}$$

* D(f) = R, H(f) = 
* Je shora omezená, není zdola omezená.
* Je rostoucí v 
* Je klesající v 
* V bodě x0 = má ostré maximum
* D(f) = R, H(f) = 
* Je zdola omezená, není shora omezená.
* Je rostoucí v
* Je klesající v 
* V bodě x0 = má ostré minimum

# Met.: Kvadratická funkce patří k tématům určeným k probrání na ZŠ, a to v 9. třídě. Ale objem informací je tam omezen pouze na práci s funkcí typu *f: y = ax2* a okrajově s *f: y =* $\pm $*x2 + c*. Středoškolští studenti tedy budou většinou vědět, že grafem kvadratické funkce je parabola a vzpomenou si i na to, jakým způsobem je tvar paraboly ovlivněn kvadratickým koeficientem *a* a její poloha v soustavě souřadnic koeficientem *c*.

 Probírání tématu o kvadratických funkcích na střední škole by měl učitel zahájit samozřejmě plnou informací, že kvadratická funkce je funkce daná rovnicí *f: y = ax2 + bx + c*, kde *a, b, c* jsou reálná čísla, přičemž $a\ne 0$. Ale cesta k nakreslení grafu takové úplné kvadratické funkce by měla být vedena postupně s vysvětlováním vlivu jednotlivých přidávaných parametrů na tvar a umístění paraboly v soustavě souřadnic:

 ①

$$f\_{1}$$

$$f\_{1}^{´}$$

$$f\_{1}^{´´}$$

x

y

1

-1

1

2

3

-3

$$f\_{1}^{´´´}$$

 $f\_{1}:y=x^{2}$

 $f\_{1}^{´}:y=\frac{1}{2}x^{2}$

 $f\_{1}^{´´}:y=3x^{2}$

 $f\_{1}^{´´´}:y=-3x^{2}$

 ②

x

y

1

2

3

4

-1

-2

-3

1

$$f\_{1}$$

$$f\_{2}^{´}$$

$$f\_{2}^{´´ }$$

-1

$$f\_{2}^{´´´}$$

 $f\_{1}:y=x^{2}$

 $f\_{2}^{´}:y=\left(x-3\right)^{2}$

 $f\_{2}^{´´ }:y=\left(x+2\right)^{2}$

 $f\_{2}^{´´´}:y=-\left(x-2\right)^{2}$

Se studenty je samozřejmě třeba krátce prodiskutovat důvod posunutí parabol: např. $f\_{2}^{´}$: ⁃ nezápornost pravé strany rovnice ⁃ vrchol – bod, kterému odpovídá minimum funkce … y = 0 pro x = 3. Proto $V\left[3;0\right]$.

Velmi vhodné je také pro základní funkci *f1* a pro jednu nebo dvě další vybrané funkce vytvořit tabulku …

x

y

-2

-1

1

1

-1

$$f\_{1}$$

$$f\_{3}^{´}$$

$$f\_{3}^{´´}$$

 ③

 $f\_{1}:y=x^{2}$

 $f\_{3}^{´}:y=x^{2}-2$

 $f\_{3}^{´´}:y=- x^{2}+1$

x

y

1

2

3

4

1

2

4

3

$$f$$

 ④

 $f:y= -2\left(x-3\right)^{2}+4$

 Z rovnice lze určit:

 • souřadnice vrcholu paraboly $V\left[3;4\right]$

 • tvar a polohu paraboly v soustavě souřadnic

 Jakmile se studenti naučí kreslit parabolu odpovídající poslednímu typu rovnice, tedy *f:* *y = a(x – m)2 + n*, může učitel obrátit jejich pozornost na skutečnost, že kvadratická funkce bývá nejčastěji zadána v souladu s definicí *f: y = ax2 + bx + c*. A s takto zadanou funkcí zatím studenti pracovat neumí. Z toho logicky vyplývá, že se studenti musí naučit převádět výraz *ax2 + bx + c* do tvaru *a(x – m)2 + n*. Je jistě dobré ukázat jim převod obecně zadaného kvadratického trojčlenu: $y=ax^{2}+bx+c=a\left(x^{2}+\frac{b}{a}x\right)+c=a\left(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}}\right)+c-\frac{b^{2}}{4a}=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}+ c-\frac{b^{2}}{4a}$ ; Odsud $V\left[-\frac{b}{2a};c-\frac{b^{2}}{4a}\right]$ .

 Učitel může tento převod ukázat sám, nebo jej zadá studentům, přičemž rychlou a správnou práci jednotlivců drobně ocení (úpravy výrazů se probíraly dříve, takže by to neměl být pro nikoho problém). V druhém případě je namístě napsat pak správné řešení na tabuli. Po práci s obecným převodem by měl následovat ihned konkrétní příklad: př. 1 $f:y=-2x^{2}+4x+1=-2\left(x^{2}-2x+1\right)+1+2=-2\left(x-1\right)^{2}+3 … V\left[1;3\right]$ př. 2 $f:y=\frac{3}{4}x^{2}-3x-\frac{7}{2}=\frac{3}{4}\left(x^{2}-4x+4\right)-\frac{7}{2}-3=\frac{3}{4}\left(x-2\right)^{2}-\frac{13}{2} … V\left[2; \frac{13}{2}\right]$.

Občas se v některé třídě najdou studenti (zpravidla ti se solidní mechanickou pamětí), kteří vezmou za vděk „vzorcem“ $V\left[-\frac{b}{2a};c-\frac{b^{2}}{4a}\right]$ , domnívají se, že k nalezení vrcholu paraboly stačí dosadit do „hotového“ předpisu a uvedený převod neprovádět. Takový přístup studentů nesmí učitel připustit. Jednak by to znamenalo nezbytnost (ale nepochybně i krátkodobost) zcela zbytečné zpaměťové znalosti a nedůstojného dosazování do nějakých výrazů, jednak budou podobný převod studenti potřebovat během středoškolského studia mnohokrát (např. u všech kuželoseček).

Základní poznatky:

Př. 1 Načrtněte grafy funkci (graf s průsečíky a vrcholem):
 a) $f:y=-\left(x-2\right)^{2}+5$ $\left[V\left[2,5\right], \left[0,1\right], [\pm \sqrt{5}+2,0]\right]$

1. $g: y= x^{2}-5x+6$ $\left[V\left[\frac{5}{2},-\frac{1}{4}\right], \left[0,6\right], \left[2,0\right], [3,0]\right]$
2. $h: y= 2x^{2}+ 5x-1$ $\left[V\left[-\frac{5}{4},-\frac{33}{8}\right], \left[0,-1\right], \left[-\frac{5}{4}\pm \frac{\sqrt{33}}{4},0\right]\right]$
3. $p: y= -0,5x^{2}+x+2$ $\left[V\left[1, \frac{5}{2}\right], \left[0,2\right], \left[1\pm \sqrt{5},0\right]\right]$

Met.: 1.c) $h:y=2x^{2}+5x-1=2\left(x^{2}+\frac{5}{2}x+\frac{25}{16}\right)-1-\frac{25}{8}=2\left(x+\frac{5}{4}\right)^{2}-\frac{33}{8} … V\left[-\frac{5}{4}; -\frac{33}{8}\right]$ U každé funkce, jejíž graf se má kreslit, je nezbytné určit souřadnice všech průsečíků s oběma osami souřadnic. Ty je nejlepší určovat z té rovnice funkce, jejíž pravá strana představuje klasický kvadratický trojčlen: 1. Průsečík s osou x … Px - ? platí: y = 0 $y=2x^{2}+5x-1=0$ $x\_{1,2}=\frac{-5\pm \sqrt{25+8}}{4}=\frac{-5\pm \sqrt{33}}{4}$ ; $P\_{x1}\left[\frac{-5-\sqrt{33}}{4};0\right] , P\_{x2}\left[\frac{-5+\sqrt{33}}{4};0\right] $

 2. Průsečík s osou y … Py - ? platí: x = 0 $y=2.0^{2}+5.0-1=-1$; $P\_{y}\left[0;-1\right]$

x

y

$$-\frac{5}{4}$$

$$-\frac{33}{8}$$

-1

$$\frac{-5+\sqrt{33}}{4}$$

$$\frac{-5-\sqrt{33}}{4}$$

h

-1

-2

-3

Učitel může vyvolat diskusi o souvislosti polohy vrcholu paraboly a jejích průsečíků s osou *x,* pokud tyto existují. Vzhledem k souměrnosti paraboly podle její osy lze x-ovou souřadnici vrcholu vypočítat také pomocí středu úsečky Px1 Px2 jako aritmetický průměr x-ových souřadnic těchto průsečíků.

Pozn.: $\frac{-5-\sqrt{33}}{4}\~2,69; \frac{-5+\sqrt{33}}{4} \~0,19$. Výpočet přibližných hodnot je zde jistě potřebný. Do grafu se však musí zapsat ***přesné*** hodnoty!!!

Př. 2 Pomocí grafu funkce určete řešení nerovnic:
a) $x^{2}+1<0$ $[K=∅]$
b) $x^{2}-2\geq 0$ $[K=(-\infty ,-\sqrt{2}]∪[\sqrt{2},\infty )]$

Př. 3 Státní maturita 2017


Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 4 Načrtněte grafy funkcí:
a)$f\_{1}:y=x^{2}-5x+6$
b) $f\_{2}:y=x^{2}-5\left|x\right|+6$
c) $f\_{3}: y=\left|x^{2}- 5\left|x\right| +6\right|$
Met.: Vzhledem k velmi úzké souvislosti funkcí *f1, f2*, a *f3* stojí rozhodně za to zamyslet se se studenty nad možností zjednodušení cest k jejich grafům. Pro učitele se zde naskýtá ideální možnost poskytnout studentům radost z objevování jednotlivých kroků, které by měly vést až k poznání, že stačí podrobně prostudovat pouze funkci *f1* a grafy zbývajících dvou funkcí z ní už logicky vyplynou.

 $f\_{1}:y=x^{2}-5x+6= \left(x^{2}-5x+\frac{25}{4}\right)+6-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^{2}-\frac{1}{4} … V\left[\frac{5}{2};-\frac{1}{4}\right]$ Průsečíky s osami: 1. s osou x …. y = 0 $x^{2}-5x+6=0$ $\left(x-2\right).\left(x-3\right)=0$ $x=2 \bigvee\_{}^{} x=3$ $P\_{x1}\left[2;0\right] , P\_{x2}\left[3;0\right]$ 2. s osou y …. x = 0 $y=0^{2}-5.0+6=6$ $P\_{y}\left[0;6\right]$

x

y

6

2

3

-3

-2

$$-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$-\frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$f\_{1}$$

$$f\_{2}$$

$$f\_{3}$$

$f\_{2}:y=x^{2}-5\left|x\right|+6$ je funkce sudá, proto je její graf souměrný podle osy *y*. Pro $x\geq 0$ má funkce ***f2***  evidentně stejnou rovnici jako *f1*, což znamená, že pro $x\geq 0$ ***f2*** kopíruje graf *f1*. Část grafu ***f2*** vlevo od osy *y* je souměrný s částí nakreslenou vpravo od osy *y* pro nezáporná *x*, osou souměrnosti je osa *y*.

***f3***$: y=\left|x^{2}- 5\left|x\right| +6\right|$je rovněž sudá funkce, která se od $f\_{2}$ liší pouze vnější absolutní hodnotou. Ta určuje, že všechny funkční hodnoty ***f3*** jsou nezáporné. To ale znamená, že všechny části grafu funkce $f\_{2}$ , které odpovídají nezáporným funkčním hodnotám (tedy se nacházejí “nad” osou x), jsou společné i pro ***f3***. A ty části grafu $f\_{2}$, které odpovídají záporným funkčním hodnotám, se pro graf ***f3*** “překlopí” “nad” osu *x* jako jejich obrazy v osové souměrnosti podle osy *x*.

Př. 5 Určete předpis kvadratické funkce, která má minimum v bodě [-2; -2] a prochází bodem [-1;1].
 [Realisticky.cz – 2.5.5, $y=3\left(x+2\right)^{2}-2$]

 Met.: Vzhledem k tomu, že jsou zadány souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem hledané kvadratické funkce, zvolíme pro řešení rovnici *f:* *y = a(x – m)2 + n.* V ní figuruje celkem 5 proměnných, přičemž za 4 z nich můžeme dosadit jednak zmíněné souřadnice vrcholu (*m, n*) a pak za *x* a *y* souřadnice bodu, o němž víme, že jím parabola také prochází: $1=a\left(-1+2\right)^{2}-2$ . Odsud *a = 3*. Hledaná rovnice funkce bude tedy *f:* *y = 3(x + 2)2 – 2,* a jistěbude vhodné ji převést do tvaru *f: y = 3x2 + 12x + 10*.

Př. 6 Pro kterou kvadratickou funkci platí: $f(0)=1 ; f(2)=-1 ; f(1)=-1$ ? $[y=x^{2}-3x+1]$
 Met.: Na rozdíl od předcházející úlohy zvolíme v této úloze pro řešení rovnici *f: y = ax2 + bx + c.* $ f\left(0\right)=1 … 1=a.0^{2}+b.0+c … 1= c$$f\left(2\right)=-1… -1=a.2^{2}+b.2+c … -1=4a+2b+c$$f\left(1\right)=-1… -1=a.1^{2}+b.1+c … -1= a + b+ c$

soustava tří rovnic o třech neznámých … *a = 1, b = -3, c = 1*

 Hledaná funkce je *f: y = x2 - 3x + 1.*

Př. 7 Sestrojte graf funkce $f: y= 2x+|1-x^{2}|$
 [Pro $x\in \left〈-1,1\right〉 y=-x^{2}+2x+1, $v dalších intervalech $y=x^{2}+2x-1$.]

 Met.: Tabulka: nulové body jsou $\pm 1$

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | $$\left(-\infty ;\left.-1\right⟩\right.$$ | $$\left⟨-1;\left.1\right⟩\right.$$ | $$\left⟨1;\left.\infty \right)\right.$$ |
| $$\left|1-x^{2}\right|$$ | $$x^{2}-1$$ | $$1-x^{2}$$ | $$x^{2}-1$$ |
| *f* | $$y=2x+x^{2}-1=x^{2}+2x-1$$ | $$y=2x+1-x^{2}=-x^{2}+2x+1$$ | $$y=x^{2}+2x-1$$ |

$\left(-\infty ;\left.-1\right⟩\bigcup\_{}^{}\left⟨1;\left.\infty \right)\right.\right.$ : 1. Vrchol: $y=x^{2}+2x-1=\left(x^{2}+2x+1\right)-1-1=\left(x+1\right)^{2}-2 … V\left[-1; -2\right]$ 2. Průsečíky s osami: *Px* - ? y=0 $x^{2}+2x-1=0$ $x\_{1,2}=\frac{-2\pm \sqrt{8}}{2}=-1\pm \sqrt{2}$ $P\_{x1}\left[-1-\sqrt{2};0\right]$ $P\_{x2}\left[-1+\sqrt{2};0\right]$

 *Py* - ? $x=0 y=0^{2}+2.0-1=-1$ $P\_{y}\left[0;-1\right]$ 3.Je třeba ještě určit souřadnice bodů odpovídajících krajním bodům intervalů: $f\left(-1\right)=-2 …A\left[-1;-2\right] ; f\left(1\right)=2 …B\left[1;2\right]$

$\left⟨-1;\left.1\right⟩\right.$ : 1. Vrchol: $y=-x^{2}+2x+1=-\left(x^{2}-2x+1\right)+1+1=-\left(x-1\right)^{2}+2 … W\left[1;2\right]$ 2. Průsečíky s osami: *Qx* - ? $y=0 -x^{2}+2x+1=0$ $x\_{1,2}=\frac{-2\pm \sqrt{8}}{-2}=1\pm \sqrt{2}$ $Q\_{x1}\left[1-\sqrt{2};0\right]$ $Q\_{x2}\left[1+\sqrt{2};0\right]$ *Qy* - ? $x=0 y=…=1 $ $Q\_{y}\left[0;1\right]$ 3. Souřadnice bodů odpovídajících krajním bodům intervalu: $f\left(-1\right)=-2 …A\left[-1;-2\right] ; f\left(1\right)=2 …B\left[1;2\right]$

 Graf:

x

y

1

1

-1

-1

2

2

-2

-2

$$1+\sqrt{2}$$

$$1-\sqrt{2}$$

-$1-\sqrt{2}$

-$1+\sqrt{2}$

$$f$$

Studenti zatím neznají pojem spojitosti funkce. Musí se jim tedy aspoň sdělit, že grafem je souvislá křivka. Proto je důležitý výpočet souřadnic bodů v krajních bodech intervalů, kde na sebe jednotlivé části křivek musí navazovat

Rozšiřující cvičení

Př. 8 Zemědělec chce postavit výběh pro kuřata ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu výběhu bude tvořit hospodářská budova. Celkem má k dispozici 20 m pletiva. Jaké mají být rozměry výběhu, aby jeho plocha byla co největší? [Realisticky.cz – 2.5.5, rozměry 5 m x 10 m]

Met.: S úlohou, jejíž řešení vyžaduje nalezení extrému funkce, se studenti setkávají poprvé právě při probírání kvadratické funkce. Učitel je si jistě vědom, že podobné úlohy budou řešit mnohem rychleji, snadněji a pohodlněji, až je seznámí se základy diferenciálního počtu. V současné fázi výuky je vhodné použít podobné úlohy především ze dvou důvodů:

▪ matematizací úloh z běžného života se nepochybně výuka matematiky oživí,
 ▪ učitel může využít této a podobných jednoduchých úloh, aby už nyní vedl studenty ke schopnosti určit správně funkci, jejíž extrém je třeba nalézt, a také provést další kroky, které bude nutné provádět i později, až se bude k výpočtům používat derivací.

 Dáno: *d = 20 m*

 Funkce, u níž hledáme extrém: Obsah pravoúhelníku *y = S = a.b*

 Proměnné:  *a, b* … naše funkce musí vyjadřovat závislost y = S pouze na jedné nezávislé proměnné – je tedy nutné vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé, případně pomocí konstant:

x

y

50

5

0

10

S

*a + 2b = 20*, proto *a = 20 – 2b*

*y = S = a.b = (20 – 2b).b*

*y = S =* $-2b^{2}+20b$

$$y=-2\left(b^{2}-10b+25\right)+50$$

$y=-2\left(b-5\right)^{2}+50$

$V\left[5;50\right]$

$$P\_{x}: -2b^{2}+20b=0$$

$-2b\left(b-10\right)=0 … P\_{x1}\left[0;0\right], P\_{x2}\left[10;0\right], $

$$P\_{y}: P\_{y}=P\_{x1}$$

*a*

*b*

Z grafu je dobře vidět, že funkce *S =* $-2b^{2}+20b$nabývá maxima pro *b = 5 m.* Odsud *a = 20 – 2b = 10 m.*

Studentům zcela jistě prospěje, když se spolu s učitelem nad nakresleným grafem zamyslí a podiskutují o něm: ▫ proč má smysl uvažovat pouze část paraboly „nad“ osou *x*? Pozn. Pokud by učitel zadal na pár minut studentům za úkol jako samostatnou práci najít tuto parabolu, spousta z nich by ji nakreslila „celou“ … ▫ co znamená číslo 50 představující *y*-ovou souřadnici vrcholu paraboly? ▫ jaký význam pro řešení úlohy mají průsečíky paraboly s osou *x*? Jak by vypadal výběh, kdyby proměnná *b* nabyla hodnoty odpovídající *x*-ové souřadnici některého z těchto průsečíků? …………..

Př. 9 Státní maturita 2017 Matematika+

Zapište předpis funkce f. $ \left[f\left(x\right)=2x^{2}-1\right]$

Met.: Tuto úlohu nelze zadat studentům v době, kdy se teprve probírá kvadratická funkce, protože goniometrické funkce se probírají později a studenti netuší, jak vypadá graf funkce $g:y=\cos(x-2.)$

 Možná by ale stálo za to zvážit zjednodušení zadání náhradou goniometrické funkce funkcí konstantní $h:y=-1.$ Základní úvaha o řešení by zůstala stejná, úloha by byla zvládnutelná všemi studenty, výsledek úlohy by byl stejný a učitel by mohl šikovné řešitele odměnit podle nastavených pravidel.

Řeš.: Dáno: Kvadratická funkce (graf je parabola) je sudá (parabola je souměrná podle osy y). $f\left(1\right)=1 , vzhledem k sudosti funkce musí také f\left(-1\right)=1$.

 

***f***

*g*

 Má-li mít graf hledané kvadratické funkce *f* s grafem funkce *g* právě jeden společný bod, musí to být bod $\left[0;-1\right]$ , který bude zároveň vrcholem paraboly. Rovnice funkce: *f:* *y = a(x – m)2 + n* $f:1=a\left(1-0\right)^{2}-1, odsud a=2$$f:y=2x^{2}-1$