

18 Kvadratická funkce – met.

Stručný přehled teorie

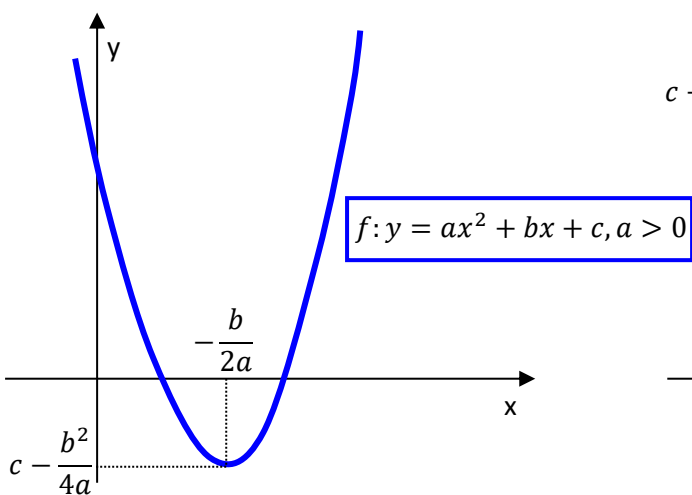
Kvadratická funkce je funkce $f: y = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Grafem kvadratické funkce je křivka zvaná parabola, která je souměrná podle osy o rovnoběžné s osou y .

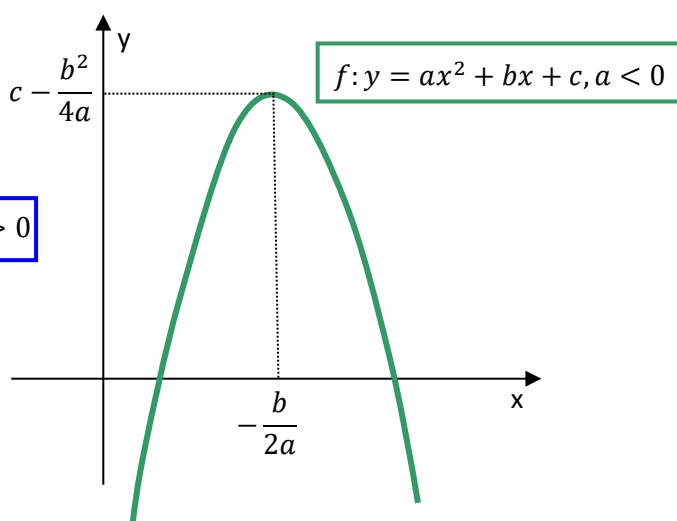
Průsečík osy o s parabolou nazýváme vrchol paraboly.

Vlastnosti kvadratických funkcí $f: y = ax^2 + bx + c$

$$a > 0$$



$$a < 0$$



- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle c - \frac{b^2}{4a}; \infty \rangle$
- Je zdola omezená, není shora omezená.
- Je rostoucí v $\langle -\frac{b}{2a}, \infty \rangle$
- Je klesající v $\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \rangle$
- V bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré minimum

- $D(f) = \mathbf{R}$, $H(f) = \langle -\infty; c - \frac{b^2}{4a} \rangle$
- Je shora omezená, není zdola omezená.
- Je rostoucí v $\langle -\infty, -\frac{b}{2a} \rangle$
- Je klesající v $\langle -\frac{b}{2a}, \infty \rangle$
- V bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré maximum

Met.: Kvadratická funkce patří k tématům určeným k probírání na ZŠ, a to v 9. třídě. Ale objem informací je tam omezen pouze na práci s funkcí typu $f: y = ax^2$ a okrajově s $f: y = \pm x^2 + c$. Středoškolská studenti tedy budou většinou vědět, že grafem kvadratické funkce je parabola a vzpomenou si i na to, jakým způsobem je tvar paraboly ovlivněn kvadratickým koeficientem a a její poloha v soustavě souřadnic koeficientem c . Probírání tématu o kvadratických funkcích na střední škole by měl učitel zahájit samozřejmě plnou informací, že **kvadratická funkce** je funkce daná rovnicí $f: y = ax^2 + bx + c$, kde a, b, c jsou reálná čísla, přičemž $a \neq 0$. Ale cesta k nakreslení grafu takové úplné kvadratické funkce by měla být vedena postupně s vysvětlováním vlivu jednotlivých přidávaných parametrů na tvar a umístění paraboly v soustavě souřadnic:

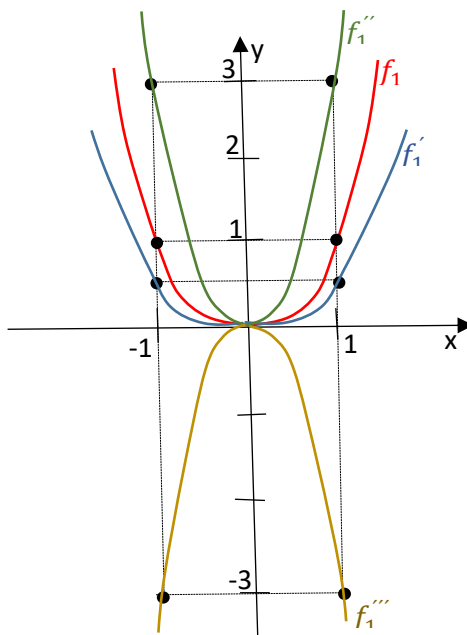
①

$$f_1: y = x^2$$

$$f_1': y = \frac{1}{2}x^2$$

$$f_1'': y = 3x^2$$

$$f_1''': y = -3x^2$$



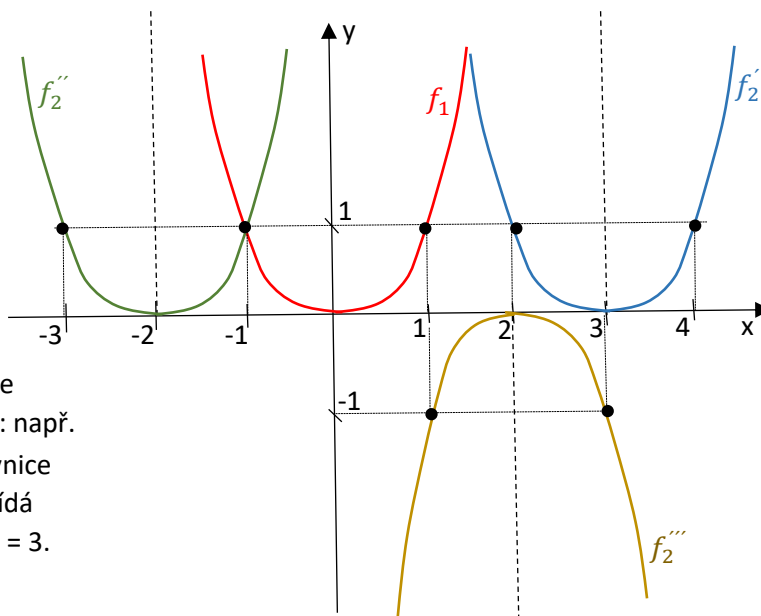
②

$$f_1: y = x^2$$

$$f_2': y = (x - 3)^2$$

$$f_2'': y = (x + 2)^2$$

$$f_2''': y = -(x - 2)^2$$



Se studenty je samozřejmě třeba krátce prodiskutovat důvod posunutí parabol: např.

f_2' : - nezápornost pravé strany rovnice
 - vrchol – bod, kterému odpovídá minimum funkce ... $y = 0$ pro $x = 3$.
 Proto $V[3; 0]$.

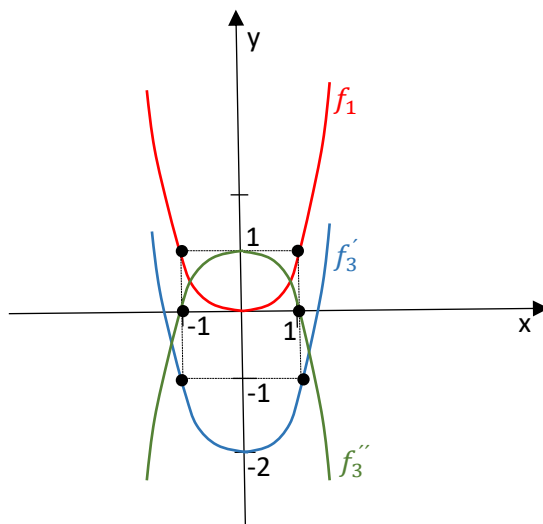
Velmi vhodné je také pro základní funkci f_1 a pro jednu nebo dvě další vybrané funkce vytvořit tabulku ...

③

$$f_1: y = x^2$$

$$f_3': y = x^2 - 2$$

$$f_3'': y = -x^2 + 1$$

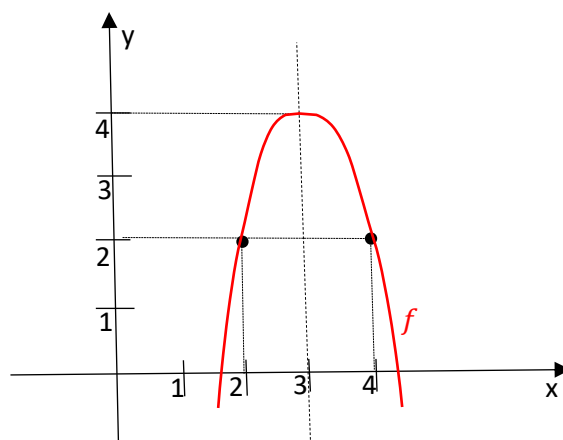


④

$$f: y = -2(x - 3)^2 + 4$$

Z rovnice lze určit:

- souřadnice vrcholu paraboly $V[3; 4]$
- tvar a polohu paraboly v soustavě souřadnic



Jakmile se studenti naučí kreslit parabolu odpovídající poslednímu typu rovnice, tedy $f: y = a(x - m)^2 + n$, může učitel obrátit jejich pozornost na skutečnost, že kvadratická funkce bývá nejčastěji zadána v souladu s definicí $f: y = ax^2 + bx + c$. A s takto zadanou funkcí zatím studenti pracovat neumí.

Z toho logicky vyplývá, že se studenti musí naučit převádět výraz $ax^2 + bx + c$ do tvaru $a(x - m)^2 + n$.

Je jistě dobré ukázat jim převod obecně zadaného kvadratického trojčlenu:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a};$$

Odsud $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

Učitel může tento převod ukázat sám, nebo jej zadá studentům, přičemž rychlou a správnou práci jednotlivců drobně ocení (úpravy výrazů se probíraly dříve, takže by to neměl být pro nikoho problém). V druhém případě je namístě napsat pak správné řešení na tabuli.

Po práci s obecným převodem by měl následovat ihned konkrétní příklad:

$$\text{př. 1 } f: y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x^2 - 2x + 1) + 1 + 2 = -2(x - 1)^2 + 3 \quad \dots \quad V[1; 3]$$

$$\text{př. 2 } f: y = \frac{3}{4}x^2 - 3x - \frac{7}{2} = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) - \frac{7}{2} - 3 = \frac{3}{4}(x - 2)^2 - \frac{13}{2} \quad \dots \quad V\left[2; \frac{13}{2}\right].$$

Občas se v některé třídě najdou studenti (zpravidla ti se solidní mechanickou pamětí), kteří vezmou za vděk „vzorcem“ $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$, domnívají se, že k nalezení vrcholu paraboly stačí dosadit do „hotového“ předpisu a uvedený převod neprovádět. Takový přístup studentů nesmí učitel připustit. Jednak by to znamenalo nezbytnost (ale nepochybně i krátkodobost) zcela zbytečné zpaměťové znalosti a nedůstojného dosazování do nějakých výrazů, jednak budou podobný převod studenti potřebovat během středoškolského studia mnohokrát (např. u všech kuželoseček).

Základní poznatky:

Př. 1 Načrtněte grafy funkcí (graf s průsečíky a vrcholem):

a) $f: y = -(x - 2)^2 + 5$

$[V[2,5], [0,1], [\pm\sqrt{5} + 2,0]]$

b) $g: y = x^2 - 5x + 6$

$[V[\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}], [0,6], [2,0], [3,0]]$

c) $h: y = 2x^2 + 5x - 1$

$[V[-\frac{5}{4}, -\frac{33}{8}], [0, -1], [-\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}, 0]]$

d) $p: y = -0,5x^2 + x + 2$

$[V[1, \frac{5}{2}], [0,2], [1 \pm \sqrt{5}, 0]]$

Met.: 1.c) $h: y = 2x^2 + 5x - 1 = 2(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}) - 1 - \frac{25}{8} = 2(x + \frac{5}{4})^2 - \frac{33}{8} \dots V[-\frac{5}{4}; -\frac{33}{8}]$

U každé funkce, jejíž graf se má kreslit, je nezbytné určit souřadnice všech průsečíků s oběma osami souřadnic. Ty je nejlepší určovat z té rovnice funkce, jejíž pravá strana představuje klasický kvadratický trojčlen: 1. Průsečík s osou x ... P_x - ? platí: $y = 0$

$y = 2x^2 + 5x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4};$

$P_{x1}[\frac{-5-\sqrt{33}}{4}; 0], P_{x2}[\frac{-5+\sqrt{33}}{4}; 0]$

2. Průsečík s osou y ... P_y - ? platí: $x = 0$

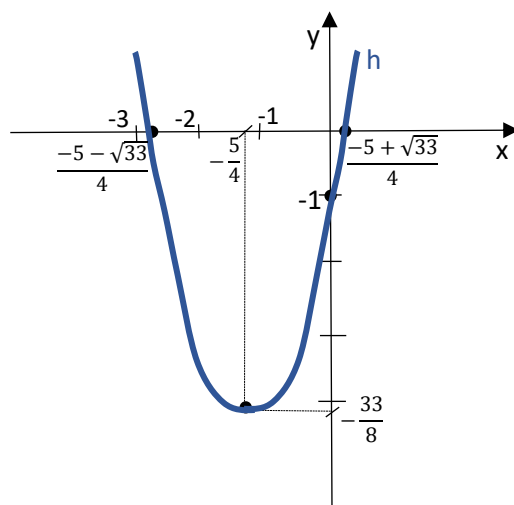
$y = 2 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 - 1 = -1;$

$P_y[0; -1]$

Učitel může vyvolat diskusi o souvislosti polohy vrcholu paraboly a jejích průsečíků s osou x, pokud tyto existují. Vzhledem k souměrnosti paraboly podle její osy lze x-ovou souřadnici vrcholu vypočítat také pomocí středu úsečky $P_{x1} P_{x2}$ jako aritmetický průměr x-ových souřadnic těchto průsečíků.

Pozn.: $\frac{-5-\sqrt{33}}{4} \sim 2,69;$ $\frac{-5+\sqrt{33}}{4} \sim 0,19$. Výpočet přibližných hodnot je zde jistě potřebný.

Do grafu se však musí zapsat **přesné** hodnoty!!!



Př. 2 Pomocí grafu funkce určete řešení nerovnic:

a) $x^2 + 1 < 0$

$[K = \emptyset]$

b) $x^2 - 2 \geq 0$

$[K = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)]$

Př. 3 Státní maturita 2017

16 Grafem kvadratické funkce $f: y = 9 - x^2$ pro $x \in \mathbf{R}$ je parabola.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

	A	N
16.1 Vrchol paraboly je $V[0; 9]$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16.2 Jeden z průsečíků paraboly se souřadnicovými osami je $P[-3; 0]$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16.3 $f(0) = -3$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
16.4 Obor hodnot funkce f je $H_f = \langle 9; +\infty \rangle$.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 4 Načrtněte grafy funkcí:

a) $f_1: y = x^2 - 5x + 6$

b) $f_2: y = x^2 - 5|x| + 6$

c) $f_3: y = |x^2 - 5|x| + 6|$

Met.: Vzhledem k velmi úzké souvislosti funkcí f_1, f_2 , a f_3 stojí rozhodně za to zamyslet se se studenty nad možností zjednodušení cest k jejich grafům. Pro učitele se zde naskýtá ideální možnost poskytnout studentům radost z objevování jednotlivých kroků, které by měly vést až k poznání, že stačí podrobně prostudovat pouze funkci f_1 a grafy zbývajících dvou funkcí z ní už logicky vyplynou.

$f_1: y = x^2 - 5x + 6 = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + 6 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \dots V\left[\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right]$

Průsečíky s osami: 1. s osou $x \dots y = 0$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$

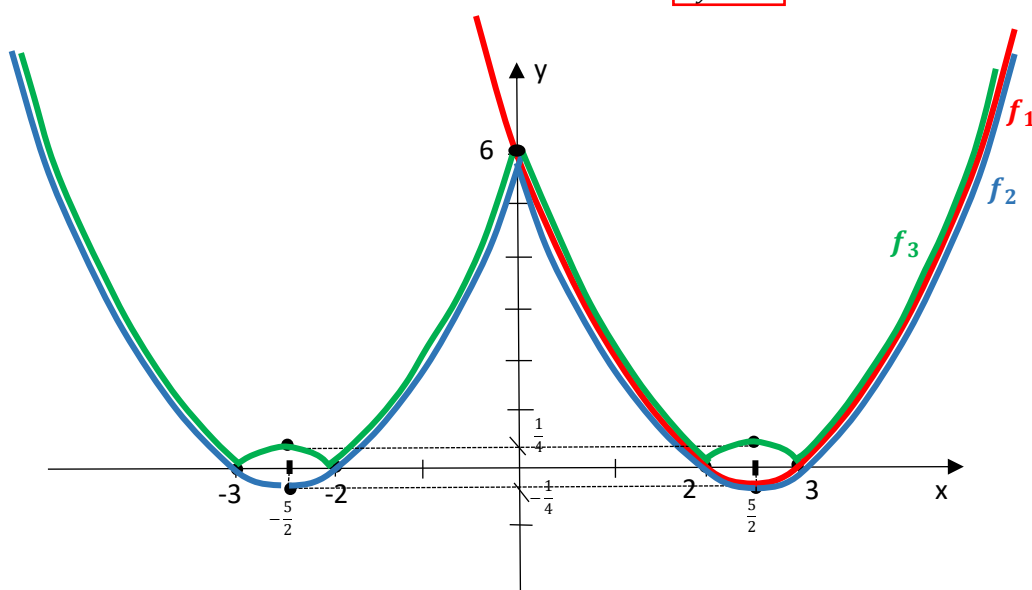
$x = 2 \vee x = 3$

$P_{x1}[2; 0], P_{x2}[3; 0]$

2. s osou $y \dots x = 0$

$y = 0^2 - 5 \cdot 0 + 6 = 6$

$P_y[0; 6]$



$f_2: y = x^2 - 5|x| + 6$ je funkce sudá, proto je její graf souměrný podle osy y . Pro $x \geq 0$ má funkce f_2 evidentně stejnou rovnici jako f_1 , což znamená, že pro $x \geq 0$ f_2 kopíruje graf f_1 . Část grafu f_2 vlevo od osy y je souměrný s částí nakreslenou vpravo od osy y pro nezáporná x , osou souměrnosti je osa y .

$f_3: y = |x^2 - 5|x| + 6|$ je rovněž sudá funkce, která se od f_2 liší pouze vnější absolutní hodnotou. Ta určuje, že všechny funkční hodnoty f_3 jsou nezáporné. To ale znamená, že všechny části grafu funkce f_2 , které odpovídají nezáporným funkčním hodnotám (tedy se nacházejí "nad" osou x), jsou společně i pro f_3 . A ty části grafu f_2 , které odpovídají záporným funkčním hodnotám, se pro graf f_3 "překlopí" "nad" osu x jako jejich obrazy v osově souměrnosti podle osy x .

Př. 5 Určete předpis kvadratické funkce, která má minimum v bodě $[-2; -2]$ a prochází bodem $[-1; 1]$.

[Realisticky.cz – 2.5.5, $y = 3(x + 2)^2 - 2$]

Met.: Vzhledem k tomu, že jsou zadány souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem hledané kvadratické funkce, zvolíme pro řešení rovnici $f: y = a(x - m)^2 + n$. V ní figuruje celkem 5 proměnných, přičemž za 4 z nich můžeme dosadit jednak zmíněné souřadnice vrcholu (m, n) a pak za x a y souřadnice bodu, o němž víme, že jí parabola také prochází: $1 = a(-1 + 2)^2 - 2$. Odsud $a = 3$. Hledaná rovnice funkce bude tedy $f: y = 3(x + 2)^2 - 2$ a jistě bude vhodné ji převést do tvaru $f: y = 3x^2 + 12x + 10$.

Př. 6 Pro kterou kvadratickou funkci platí: $f(0) = 1$; $f(2) = -1$; $f(1) = -1$? $[y = x^2 - 3x + 1]$

Met.: Na rozdíl od předcházející úlohy zvolíme v této úloze pro řešení rovnici $f: y = ax^2 + bx + c$.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \dots \begin{array}{l} 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ \dots \\ 1 = c \end{array} \\ f(2) = -1 \dots \begin{array}{l} -1 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ \dots \\ -1 = 4a + 2b + c \end{array} \\ f(1) = -1 \dots \begin{array}{l} -1 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ \dots \\ -1 = a + b + c \end{array} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{soustava tří rovnic} \\ \text{o třech neznámých} \\ \dots a = 1, b = -3, c = 1 \end{array}$$

Hledaná funkce je $f: y = x^2 - 3x + 1$.

Př. 7 Sestrojte graf funkce $f: y = 2x + |1 - x^2|$

[Pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$ $y = -x^2 + 2x + 1$, v dalších intervalech $y = x^2 + 2x - 1$.]

Met.: Tabulka: nulové body jsou ± 1

	$(-\infty; -1)$	$\langle -1; 1 \rangle$	$\langle 1; \infty$
$ 1 - x^2 $	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
f	$y = 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x - 1$	$y = 2x + 1 - x^2 = -x^2 + 2x + 1$	$y = x^2 + 2x - 1$

$(-\infty; -1) \cup \langle 1; \infty$): 1. Vrchol: $y = x^2 + 2x - 1 = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 1 = (x + 1)^2 - 2 \dots V[-1; -2]$

2. Průsečíky s osami:

$P_x - ? \quad y = 0 \quad x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} \quad P_{x1}[-1 - \sqrt{2}; 0] \quad P_{x2}[-1 + \sqrt{2}; 0]$

$P_y - ? \quad x = 0 \quad y = 0^2 + 2 \cdot 0 - 1 = -1 \quad P_y[0; -1]$

3. Je třeba ještě určit souřadnice bodů odpovídajících krajním bodům intervalů:

$f(-1) = -2 \dots A[-1; -2]; \quad f(1) = 2 \dots B[1; 2]$

$\langle -1; 1 \rangle$: 1. Vrchol: $y = -x^2 + 2x + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 1 = -(x - 1)^2 + 2 \dots W[1; 2]$

2. Průsečíky s osami: $Q_x - ? \quad y = 0 \quad -x^2 + 2x + 1 = 0$

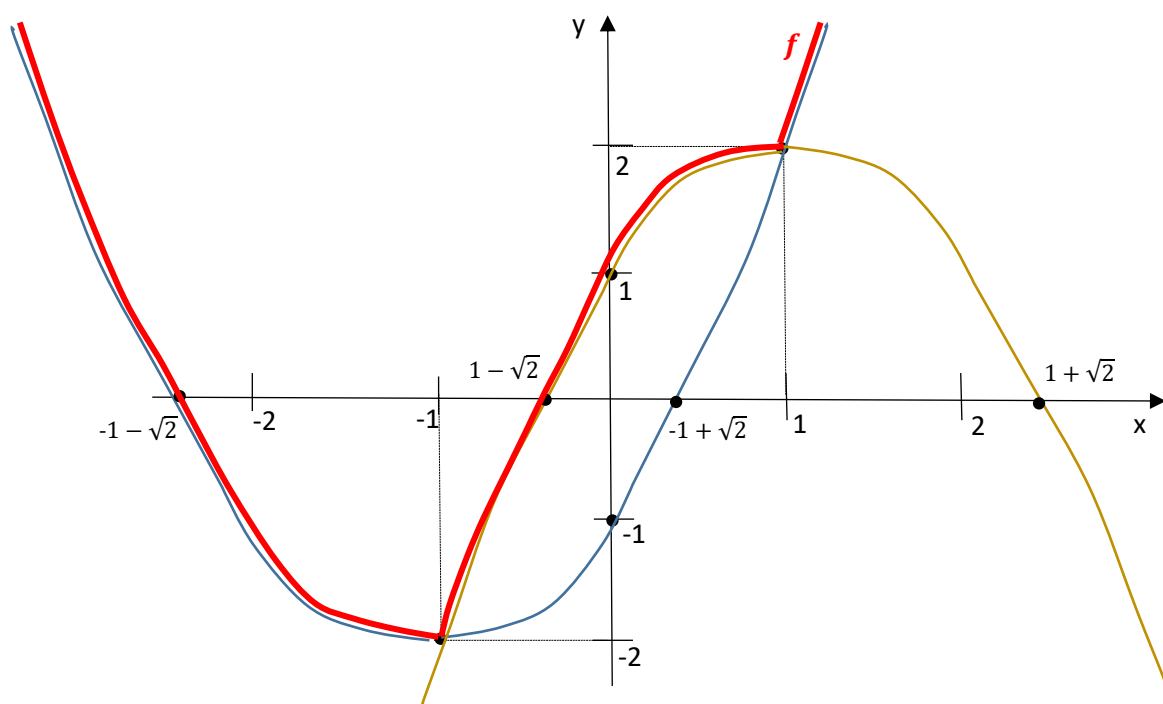
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2} \quad Q_{x1}[1 - \sqrt{2}; 0] \quad Q_{x2}[1 + \sqrt{2}; 0]$

$Q_y - ? \quad x = 0 \quad y = \dots = 1 \quad Q_y[0; 1]$

3. Souřadnice bodů odpovídajících krajním bodům intervalu:

$f(-1) = -2 \dots A[-1; -2]; \quad f(1) = 2 \dots B[1; 2]$

Graf:



Studenti zatím neznají pojem spojitosti funkce. Musí se jim tedy aspoň sdělit, že grafem je souvislá křivka. Proto je důležitý výpočet souřadnic bodů v krajních bodech intervalů, kde na sebe jednotlivé části křivek musí navazovat

Rozšiřující cvičení

Př. 8 Zemědělec chce postavit výběh pro kuřata ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu výběhu bude tvořit hospodářská budova. Celkem má k dispozici 20 m pletiva. Jaké mají být rozměry výběhu, aby jeho plocha byla co největší?
[Realisticky.cz – 2.5.5, rozměry 5 m x 10 m]

Met.: S úlohou, jejíž řešení vyžaduje nalezení extrému funkce, se studenti setkávají poprvé právě při probírání kvadratické funkce. Učitel je si jistě vědom, že podobné úlohy budou řešit mnohem rychleji, snadněji a pohodlněji, až je seznámí se základy diferenciálního počtu. V současné fázi výuky je vhodné použít podobné úlohy především ze dvou důvodů:

- matematizací úloh z běžného života se nepochybně výuka matematiky ožíví,
- učitel může využít této a podobných jednoduchých úloh, aby už nyní vedl studenty ke schopnosti určit správně funkci, jejíž extrém je třeba nalézt, a také provést další kroky, které bude nutné provádět i později, až se bude k výpočtům používat derivací.

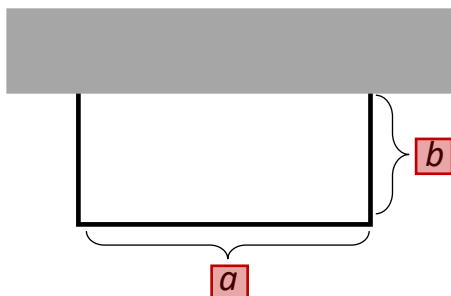
Dáno: $d = 20 \text{ m}$

Funkce, u níž hledáme extrém:

Obsah pravoúhelníku $y = S = a \cdot b$

Proměnné:

a, b ... naše funkce musí vyjadřovat závislost $y = S$ pouze na jedné nezávislé proměnné – je tedy nutné vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé, případně pomocí konstant:



$$a + 2b = 20, \text{ proto } a = 20 - 2b$$

$$y = S = a \cdot b = (20 - 2b) \cdot b$$

$$y = S = -2b^2 + 20b$$

$$y = -2(b^2 - 10b + 25) + 50$$

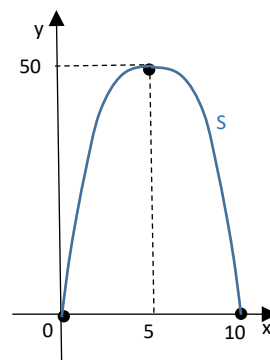
$$y = -2(b - 5)^2 + 50$$

$$V[5; 50]$$

$$P_x: -2b^2 + 20b = 0$$

$$-2b(b - 10) = 0 \dots P_{x1}[0; 0], P_{x2}[10; 0]$$

$$P_y: P_y = P_{x1}$$



Z grafu je dobře vidět, že funkce $S = -2b^2 + 20b$ nabývá maxima pro $b = 5 \text{ m}$. Odsud $a = 20 - 2b = 10 \text{ m}$. Studentům zcela jistě prospěje, když se spolu s učitelem nad nakresleným grafem zamyslí a podiskutují o něm:

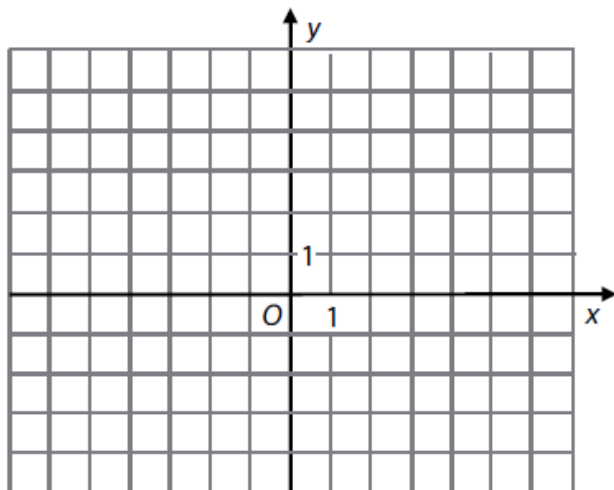
- proč má smysl uvažovat pouze část paraboly „nad“ osou x ?
Pozn. Pokud by učitel zadal na pár minut studentům za úkol jako samostatnou práci najít tuto parabolu, spousta z nich by ji nakreslila „celou“ ...
 - co znamená číslo 50 představující y -ovou souřadnici vrcholu paraboly?
 - jaký význam pro řešení úlohy mají průsečíky paraboly s osou x ? Jak by vypadal výběh, kdyby proměnná b nabyla hodnoty odpovídající x -ové souřadnici některého z těchto průsečíků?
-

Př. 9 Státní maturita 2017 Matematika+

Kvadratická funkce f je sudá,

$$f(1) = 1$$

a graf funkce f má právě jeden společný bod s grafem funkce $g: y = \cos x - 2$.

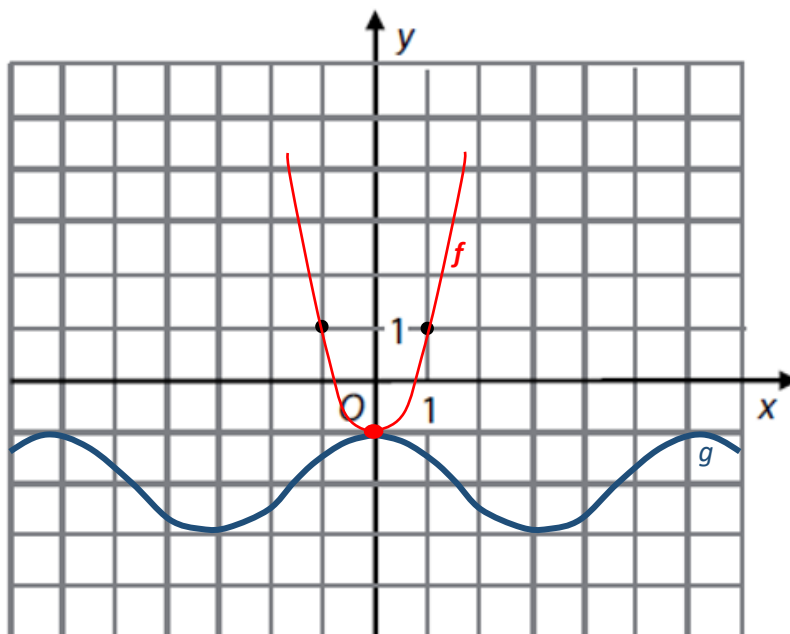


Zapište předpis funkce f .

$$[f(x) = 2x^2 - 1]$$

Met.: Tuto úlohu nelze zadat studentům v době, kdy se teprve probírá kvadratická funkce, protože goniometrické funkce se probírají později a studenti netuší, jak vypadá graf funkce $g: y = \cos x - 2$. Možná by ale stálo za to zvážit zjednodušení zadání náhradou goniometrické funkce funkcí konstantní $h: y = -1$. Základní úvaha o řešení by zůstala stejná, úloha by byla zvládnutelná všemi studenty, výsledek úlohy by byl stejný a učitel by mohl šikovně řešitele odměnit podle nastavených pravidel.

Řeš.: Dáno: Kvadratická funkce (graf je parabola) je sudá (parabola je souměrná podle osy y).
 $f(1) = 1$, vzhledem k sudosti funkce musí také $f(-1) = 1$.



Má-li mít graf hledané kvadratické funkce f s grafem funkce g právě jeden společný bod, musí to být bod $[0; -1]$, který bude zároveň vrcholem paraboly.

Rovnice funkce: $f: y = a(x - m)^2 + n$ $f: 1 = a(1 - 0)^2 - 1$, odsud $a = 2$

$$f: y = 2x^2 - 1$$