18 Kvadratická funkce – met.

Stručný přehled teorie

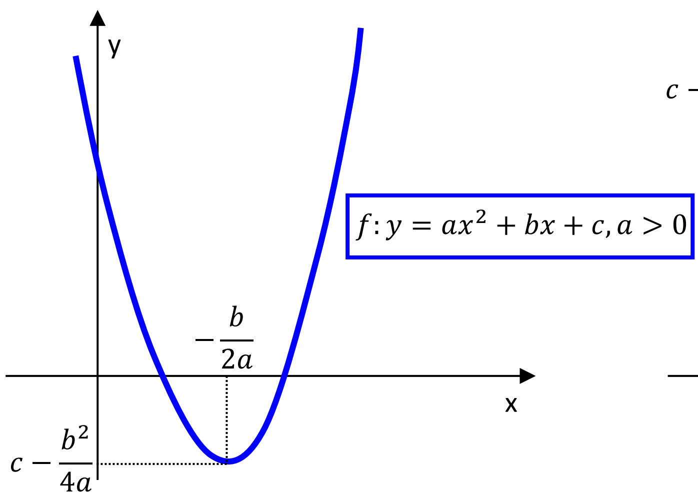
Kvadratická funkce je funkce **f: $y = ax^2 + bx + c$,** kde $a,b,c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$.

Grafem kvadratické funkce je křivka zvaná <u>parabola</u>, která je souměrná podle osy *o* rovnoběžné s osou *y*.

Průsečík osy *o* s parabolou nazýváme <u>vrchol paraboly</u>.

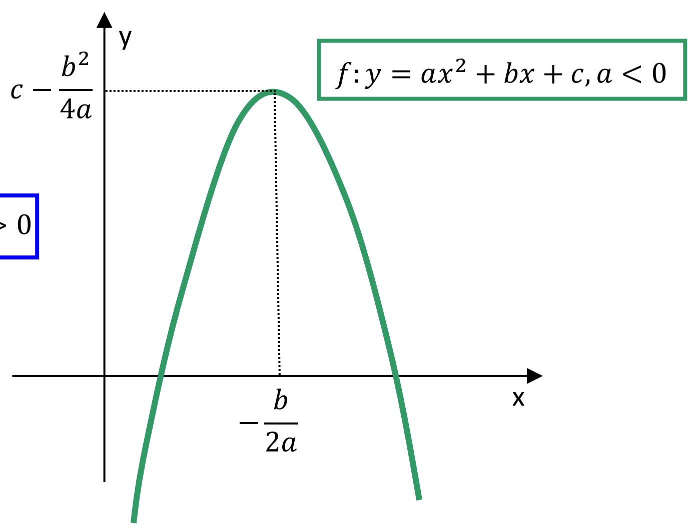
Vlastnosti kvadratických funkcí *f: $y = ax^2 + by + c$*

$\boxed{a > 0}$



- D(f) = R, H(f) = $\left\langle c - \frac{b^2}{4a}; \infty\right)$
- Je zdola omezená, není shora omezená.
- Je rostoucí v $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$
- Je klesající v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$
- V bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré minimum

$\boxed{a < 0}$



- D(f) = R, H(f) = $\left(-\infty; c - \frac{b^2}{4a}\right\rangle$
- Je shora omezená, není zdola omezená.
- Je rostoucí v $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right\rangle$
- Je klesající v $\left\langle -\frac{b}{2a}, \infty\right)$
- V bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$ má ostré maximum

Met.: Kvadratická funkce patří k tématům určeným k probrání na ZŠ, a to v 9. třídě. Ale objem informací je tam omezen pouze na práci s funkcí typu *f:* $y = ax^2$ a okrajově s *f:* $y = \pm x^2 + c$. Středoškolští studenti tedy budou většinou vědět, že grafem kvadratické funkce je parabola a vzpomenou si i na to, jakým způsobem je tvar paraboly ovlivněn kvadratickým koeficientem *a* a její poloha v soustavě souřadnic koeficientem *c*.
Probírání tématu o kvadratických funkcích na střední škole by měl učitel zahájit samozřejmě plnou informací, že kvadratická funkce je funkce daná rovnicí *f:* $y = ax^2 + bx + c$, kde *a, b, c* jsou reálná čísla, přičemž $a \neq 0$.
Ale cesta k nakreslení grafu takové úplné kvadratické funkce by měla být vedena postupně s vysvětlováním vlivu jednotlivých přidávaných parametrů na tvar a umístění paraboly v soustavě souřadnic:

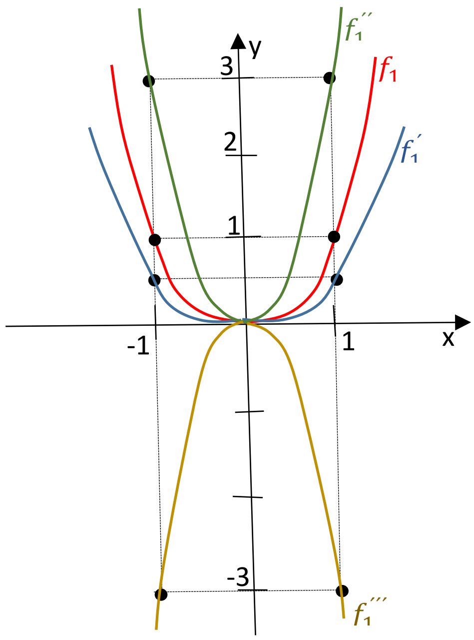
①

$f_1: y = x^2$

$f_1': y = \frac{1}{2}x^2$

$f_1'': y = 3x^2$

$f_1''': y = -3x^2$



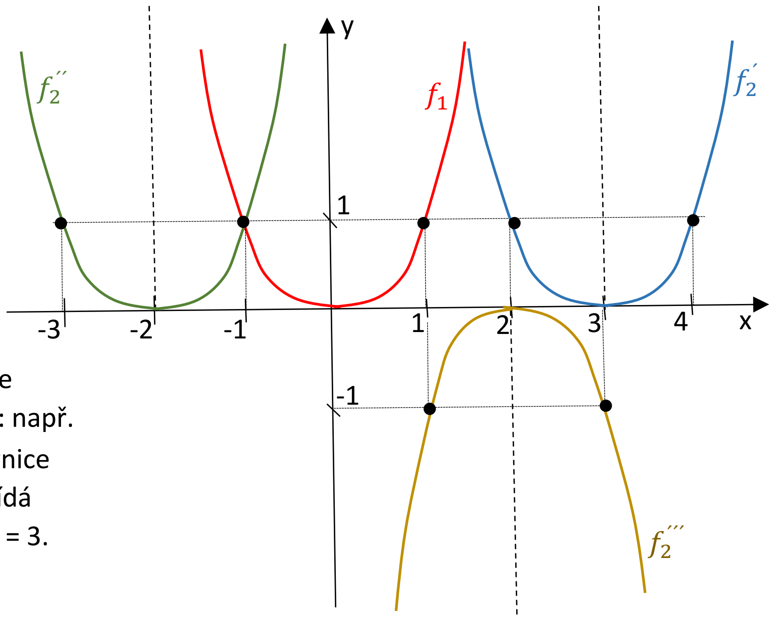
②

$f_1: y = x^2$

$f_2': y = (x-3)^2$

$f_2'': y = (x+2)^2$

$f_2''': y = -(x-2)^2$



Se studenty je samozřejmě třeba krátce prodiskutovat důvod posunutí parabol: např.

f_2': - nezápornost pravé strany rovnice
- vrchol – bod, kterému odpovídá minimum funkce … y = 0 pro x = 3. Proto $V[3; 0]$.

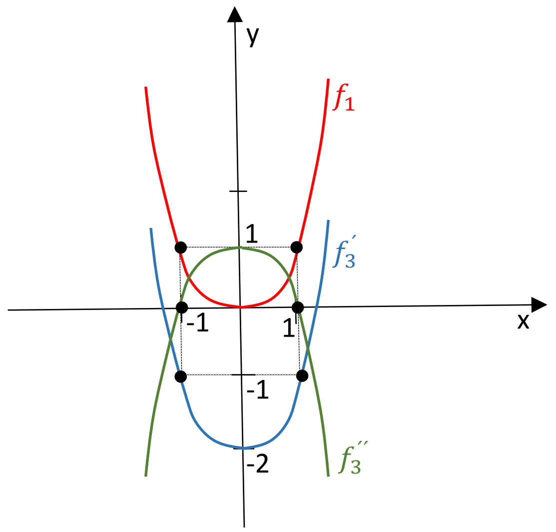
Velmi vhodné je také pro základní funkci f_1 a pro jednu nebo dvě další vybrané funkce vytvořit tabulku …

③

$f_1: y = x^2$

$f_3': y = x^2 - 2$

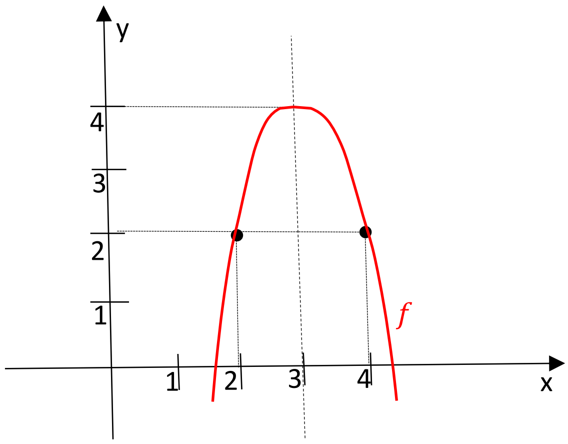
$f_3'': y = -x^2 + 1$



④

Z rovnice lze určit:

- souřadnice vrcholu paraboly $V[3; 4]$
- tvar a polohu paraboly v soustavě souřadnic



Jakmile se studenti naučí kreslit parabolu odpovídající poslednímu typu rovnice, tedy *f: y = a(x – m)²+ n*, může učitel obrátit jejich pozornost na skutečnost, že kvadratická funkce bývá nejčastěji zadána v souladu s definicí *f: y = ax² + bx + c*. A s takto zadanou funkcí zatím studenti pracovat neumí.

Z toho logicky vyplývá, že se studenti musí naučit převádět výraz $ax^2 + bx + c$ do tvaru $a(x - m)^2 + n$.

Je jistě dobré ukázat jim převod obecně zadaného kvadratického trojčlenu:

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x \qquad\right) + c \qquad = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a};$$

Odsud $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

Učitel může tento převod ukázat sám, nebo jej zadá studentům, přičemž rychlou a správnou práci jednotlivců drobně ocení (úpravy výrazů se probíraly dříve, takže by to neměl být pro nikoho problém). V druhém případě je namístě napsat pak správné řešení na tabuli.

Po práci s obecným převodem by měl následovat ihned konkrétní příklad:

př. 1 $f: y = -2x^2 + 4x + 1 = -2(x^2 - 2x + 1) + 1 + 2 = -2(x - 1)^2 + 3$ ... $V[1; 3]$

př. 2 $f: y = \frac{3}{4}x^2 - 3x - \frac{7}{2} = \frac{3}{4}(x^2 - 4x + 4) - \frac{7}{2} - 3 = \frac{3}{4}(x - 2)^2 - \frac{13}{2}$ ... $V\left[2; \frac{13}{2}\right]$.

Občas se v některé třídě najdou studenti (zpravidla ti se solidní mechanickou pamětí), kteří vezmou za vděk „vzorcem“ $V\left[-\frac{b}{2a}; c - \frac{b^2}{4a}\right]$, domnívají se, že k nalezení vrcholu paraboly stačí dosadit do „hotového“ předpisu a uvedený převod neprovádět. Takový přístup studentů nesmí učitel připustit. Jednak by to znamenalo nezbytnost (ale nepochybně i krátkodobost) zcela zbytečné zpaměťové znalosti a nedůstojného dosazování do nějakých výrazů, jednak budou podobný převod studenti potřebovat během středoškolského studia mnohokrát (např. u všech kuželoseček).

Základní poznatky:

Př. 1 Načrtněte grafy funkcí (graf s průsečíky a vrcholem):

a) $f: y = -(x-2)^2 + 5$ $\quad [V[2,5],\ [0,1], [\pm\sqrt{5}+2,0]]$

b) $g: y = x^2 - 5x + 6$ $\quad \left[V\left[\frac{5}{2}, -\frac{1}{4}\right],\ [0,6], [2,0], [3,0]\right]$

c) $h: y = 2x^2 + 5x - 1$ $\quad \left[V\left[-\frac{5}{4}, -\frac{33}{8}\right],\ [0,-1], \left[-\frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{33}}{4}, 0\right]\right]$

d) $p: y = -0{,}5x^2 + x + 2$ $\quad \left[V\left[1, \frac{5}{2}\right],\ [0,2], [1\pm\sqrt{5}, 0]\right]$

Met.: 1.c) ***h***: $y = 2x^2 + 5x - 1 = 2\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{25}{16}\right) - 1 - \frac{25}{8} = 2\left(x + \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{33}{8}$ ...

U každé funkce, jejíž graf se má kreslit, je nezbytné určit souřadnice všech průsečíků s oběma osami souřadnic. Ty je nejlepší určovat z té rovnice funkce, jejíž pravá strana představuje klasický kvadratický trojčlen: 1. Průsečík s osou x ... P_x - ? platí: y = 0

$$y = 2x^2 + 5x - 1 = 0$$

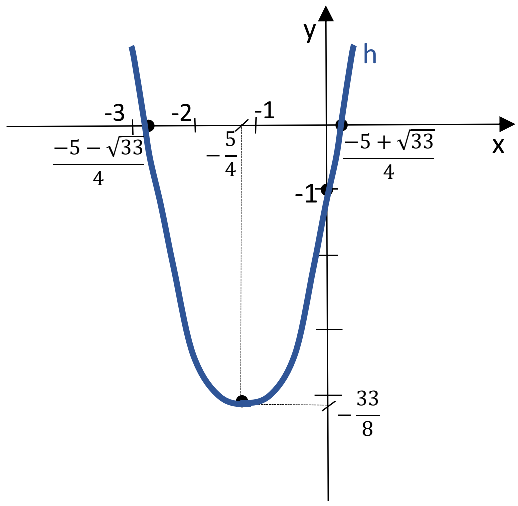
$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4};$$

2. Průsečík s osou y ... P_y - ? platí: x = 0

$$y = 2.0^2 + 5.0 - 1 = -1;$$

Učitel může vyvolat diskusi o souvislosti polohy vrcholu paraboly a jejích průsečíků s osou *x*, pokud tyto existují. Vzhledem k souměrnosti paraboly podle její osy lze x-ovou souřadnici vrcholu vypočítat také pomocí středu úsečky P_{x1} P_{x2} jako aritmetický průměr x-ových souřadnic těchto průsečíků.

Pozn.: $\frac{-5-\sqrt{33}}{4} \sim 2{,}69$; $\frac{-5+\sqrt{33}}{4} \sim 0{,}19$. Výpočet přibližných hodnot je zde jistě potřebný.
Do grafu se však musí zapsat ***přesné*** hodnoty!!!



Př. 2 Pomocí grafu funkce určete řešení nerovnic:

a) $x^2 + 1 < 0$ $\quad [K = \emptyset]$

b) $x^2 - 2 \geq 0$ $\quad [K = (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)]$

Př. 3 Státní maturita 2017

16 Grafem kvadratické funkce $f: y = 9 - x^2$ pro $x \in \mathbf{R}$ je parabola.

Rozhodněte o každém z následujících tvrzení (16.1–16.4), zda je pravdivé (A), či nikoli (N).

		A	N
16.1	Vrchol paraboly je $V[0;\ 9]$.	☐	☐
16.2	Jeden z průsečíků paraboly se souřadnicovými osami je $P[-3;\ 0]$.	☐	☐
16.3	$f(0) = -3$	☐	☐
16.4	Obor hodnot funkce f je $\mathrm{H}_f = \langle 9;\ +\infty)$.	☐	☐

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 4 Načrtněte grafy funkcí:

a) $\boldsymbol{f_1}: y = x^2 - 5x + 6$

b) $\boldsymbol{f_2}: y = x^2 - 5|x| + 6$

c) $\boldsymbol{f_3}: y = |x^2 - 5|x| + 6|$

Met.: Vzhledem k velmi úzké souvislosti funkcí f_1, f_2, a f_3 stojí rozhodně za to zamyslet se se studenty nad možností zjednodušení cest k jejich grafům. Pro učitele se zde naskýtá ideální možnost poskytnout studentům radost z objevování jednotlivých kroků, které by měly vést až k poznání, že stačí podrobně prostudovat pouze funkci f_1 a grafy zbývajících dvou funkcí z ní už logicky vyplynou.

$\boldsymbol{f_1}: y = x^2 - 5x + 6 = \left(x^2 - 5x + \frac{25}{4}\right) + 6 - \frac{25}{4} = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ ... $\boxed{V\left[\frac{5}{2}; -\frac{1}{4}\right]}$

Průsečíky s osami: 1. s osou x .... y = 0

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x - 2).(x - 3) = 0$

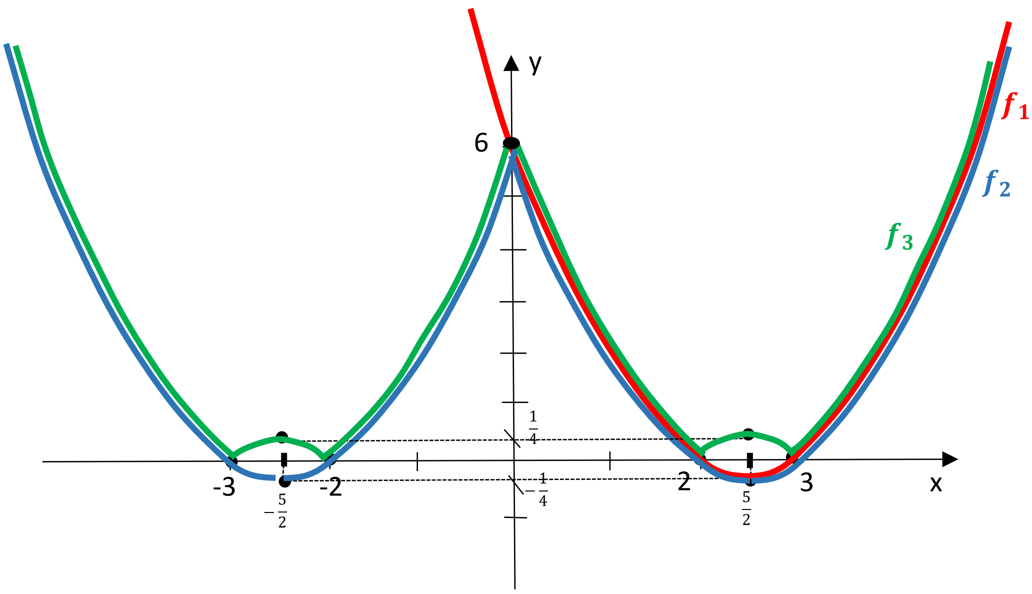
$x = 2 \ \vee \ x = 3$

$\boxed{P_{x1}[2; 0]}$, $\boxed{P_{x2}[3; 0]}$

2. s osou y .... x = 0

$y = 0^2 - 5.0 + 6 = 6$

$\boxed{P_y[0; 6]}$



f_2: $y = x^2 - 5|x| + 6$ je funkce sudá, proto je její graf souměrný podle osy *y*. Pro $x \geq 0$ má funkce f_2 evidentně stejnou rovnici jako f_1, což znamená, že pro $x \geq 0$ f_2 kopíruje graf f_1. Část grafu f_2 vlevo od osy *y* je souměrný s částí nakreslenou vpravo od osy *y* pro nezáporná *x*, osou souměrnosti je osa *y*.

f_3: $y = |x^2 - 5|x| + 6|$ je rovněž sudá funkce, která se od f_2 liší pouze vnější absolutní hodnotou. Ta určuje, že všechny funkční hodnoty f_3 jsou nezáporné. To ale znamená, že všechny části grafu funkce f_2, které odpovídají nezáporným funkčním hodnotám (tedy se nacházejí "nad" osou x), jsou společné i pro f_3. A ty části grafu f_2, které odpovídají záporným funkčním hodnotám, se pro graf f_3 "překlopí" "nad" osu *x* jako jejich obrazy v osové souměrnosti podle osy *x*.

Př. 5 Určete předpis kvadratické funkce, která má minimum v bodě [-2; -2] a prochází bodem [-1;1].

[Realisticky.cz – 2.5.5, $y = 3(x+2)^2 - 2$]

Met.: Vzhledem k tomu, že jsou zadány souřadnice vrcholu paraboly, která je grafem hledané kvadratické funkce, zvolíme pro řešení rovnici *f: y = a(x – m)*[2] *+ n*. V ní figuruje celkem 5 proměnných, přičemž za 4 z nich můžeme dosadit jednak zmíněné souřadnice vrcholu (*m, n*) a pak za *x* a *y* souřadnice bodu, o němž víme, že jím parabola také prochází: $1 = a(-1+2)^2 - 2$. Odsud *a = 3*. Hledaná rovnice funkce bude tedy $\boxed{f: y = 3(x+2)^2 - 2}$ a jistě bude vhodné ji převést do tvaru $\boxed{f: y = 3x^2 + 12x + 10}$.

Př. 6 Pro kterou kvadratickou funkci platí: $f(0) = 1$; $f(2) = -1$; $f(1) = -1$? [$y = x^2 - 3x + 1$]

Met.: Na rozdíl od předcházející úlohy zvolíme v této úloze pro řešení rovnici *f: y = ax*[2] *+ bx + c*.

$$\left.\begin{array}{lcl} f(0) = 1 \ \ldots & \boxed{\begin{array}{l} 1 = a.0^2 + b.0 + c \\ -1 = a.2^2 + b.2 + c \\ -1 = a.1^2 + b.1 + c \end{array}} & \ldots \boxed{\begin{array}{l} 1 = \quad\quad\quad\ c \\ -1 = 4a + 2b + c \\ -1 = a + b + c \end{array}} \\ f(2) = -1 \ldots & & \ldots \\ f(1) = -1 \ldots & & \ldots \end{array}\right\}$$

soustava tří rovnic o třech neznámých … *a = 1, b = -3, c = 1*

Hledaná funkce je $\boxed{f: y = x^2 - 3x + 1.}$

Př. 7 Sestrojte graf funkce $\boxed{f: y = 2x + |1 - x^2|}$

[Pro $x \in \langle -1,1 \rangle$ $y = -x^2 + 2x + 1$, v dalších intervalech $y = x^2 + 2x - 1$.]

Met.: Tabulka: nulové body jsou ± 1

	$(-\infty; -1)$	$\langle -1; 1 \rangle$	$(1; \infty)$
$\lvert 1 - x^2 \rvert$	$x^2 - 1$	$1 - x^2$	$x^2 - 1$
f	$y = 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x - 1$	$y = 2x + 1 - x^2 = -x^2 + 2x + 1$	$y = x^2 + 2x - 1$

$\boxed{(-\infty; -1) \cup (1; \infty):}$

1. Vrchol: $\boxed{y = x^2 + 2x - 1} = (x^2 + 2x + 1) - 1 - 1 = \boxed{(x+1)^2 - 2}$ … $\boxed{V[-1; -2]}$
2. Průsečíky s osami:

P_x - ? y=0 $x^2 + 2x - 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$ $\boxed{P_{x1}[-1 - \sqrt{2}; 0]}$ $\boxed{P_{x2}[-1 + \sqrt{2}; 0]}$

P_y - ? $x = 0$ $y = 0^2 + 2.0 - 1 = -1$ $\boxed{P_y[0; -1]}$

3.Je třeba ještě určit souřadnice bodů odpovídajících krajním bodům intervalů:

$f(-1) = -2$ … ; $f(1) = 2$ …

$\boxed{\langle -1; 1 \rangle:}$

1. Vrchol: $\boxed{y = -x^2 + 2x + 1} = -(x^2 - 2x + 1) + 1 + 1 = \boxed{-(x-1)^2 + 2}$ … $\boxed{W[1; 2]}$
2. Průsečíky s osami: Q_x - ? $y = 0$ $-x^2 + 2x + 1 = 0$

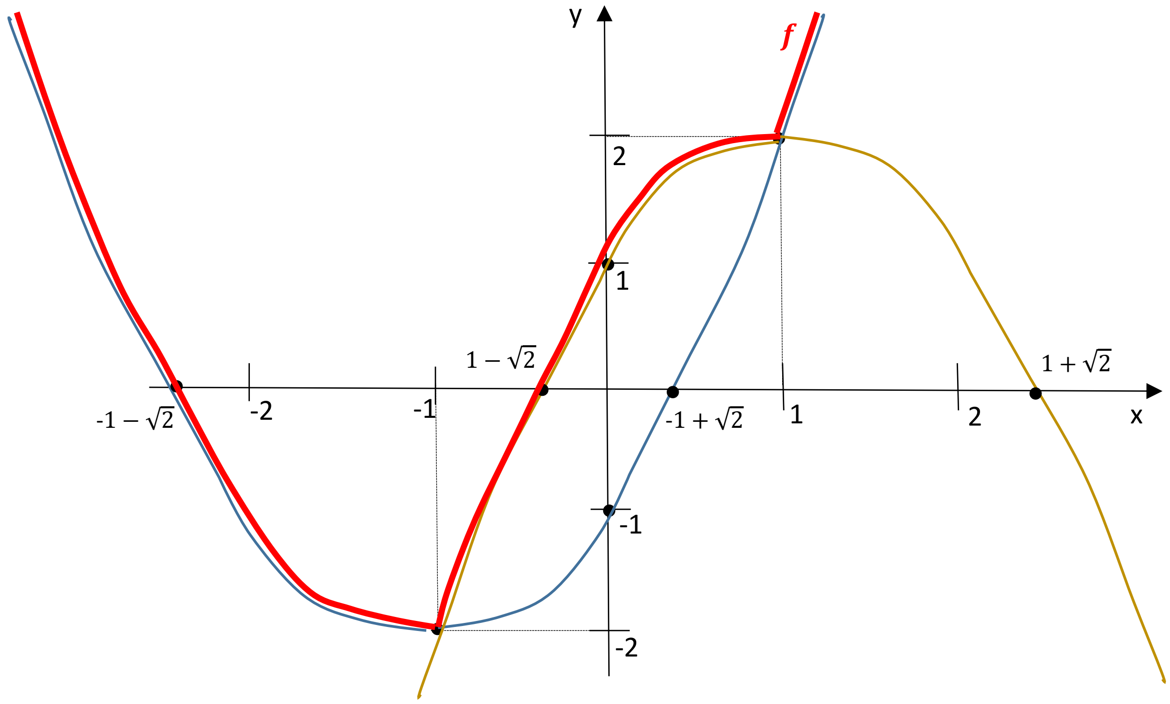
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{-2} = 1 \pm \sqrt{2}$ $\boxed{Q_{x1}[1 - \sqrt{2}; 0]}$ $\boxed{Q_{x2}[1 + \sqrt{2}; 0]}$

Q_y - ? $x = 0$ $y = \cdots = 1$ $\boxed{Q_y[0; 1]}$

3. Souřadnice bodů odpovídajících krajním bodům intervalu:

$f(-1) = -2$ … ; $f(1) = 2$ …

Graf:



Studenti zatím neznají pojem spojitosti funkce. Musí se jim tedy aspoň sdělit, že grafem je souvislá křivka. Proto je důležitý výpočet souřadnic bodů v krajních bodech intervalů, kde na sebe jednotlivé části křivek musí navazovat

Rozšiřující cvičení

Př. 8 Zemědělec chce postavit výběh pro kuřata ve tvaru pravoúhelníku tak, že jednu stranu výběhu bude tvořit hospodářská budova. Celkem má k dispozici 20 m pletiva. Jaké mají být rozměry výběhu, aby jeho plocha byla co největší? [Realisticky.cz – 2.5.5, rozměry 5 m x 10 m]

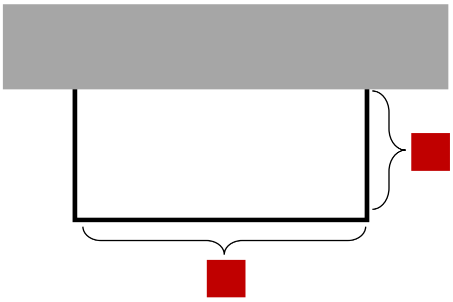
Met.: S úlohou, jejíž řešení vyžaduje nalezení extrému funkce, se studenti setkávají poprvé právě při probírání kvadratické funkce. Učitel je si jistě vědom, že podobné úlohy budou řešit mnohem rychleji, snadněji a pohodlněji, až je seznámí se základy diferenciálního počtu. V současné fázi výuky je vhodné použít podobné úlohy především ze dvou důvodů:

- matematizací úloh z běžného života se nepochybně výuka matematiky oživí,
- učitel může využít této a podobných jednoduchých úloh, aby už nyní vedl studenty ke schopnosti určit správně funkci, jejíž extrém je třeba nalézt, a také provést další kroky, které bude nutné provádět i později, až se bude k výpočtům používat derivací.

[redacted]: [redacted]

[redacted], u níž hledáme extrém: [redacted] [redacted]

[redacted] [redacted] … naše funkce musí vyjadřovat závislost y = S pouze na jedné nezávislé proměnné – je tedy nutné vyjádřit jednu proměnnou pomocí druhé, případně pomocí konstant:



a + 2b = 20, proto *a = 20 – 2b*

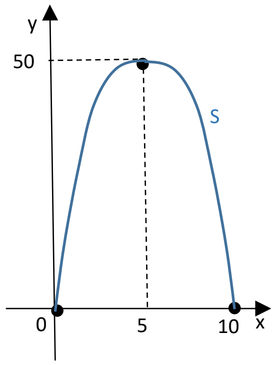
y = S = a.b = (20 – 2b).b

$\boxed{y = S = -2b^2 + 20b}$

$y = -2(b^2 - 10b + 25) + 50$

$y = -2(b - 5)^2 + 50$

$\boxed{V[5; 50]}$



P_x: $-2b^2 + 20b = 0$

$-2b(b - 10) = 0$ … $\boxed{P_{x1}[0; 0]}$, $\boxed{P_{x2}[10; 0]}$,

P_y: $\boxed{P_y = P_{x1}}$

Z grafu je dobře vidět, že funkce *S* = $-2b^2 + 20b$ nabývá maxima pro *b = 5 m*. Odsud *a = 20 – 2b = 10 m*. Studentům zcela jistě prospěje, když se spolu s učitelem nad nakresleným grafem zamyslí a podiskutují o něm:

- proč má smysl uvažovat pouze část paraboly „nad“ osou *x*?

  Pozn. Pokud by učitel zadal na pár minut studentům za úkol jako samostatnou práci najít tuto parabolu, spousta z nich by ji nakreslila „celou“ …
- co znamená číslo 50 představující *y*-ovou souřadnici vrcholu paraboly?
- jaký význam pro řešení úlohy mají průsečíky paraboly s osou *x*? Jak by vypadal výběh, kdyby proměnná *b* nabyla hodnoty odpovídající *x*-ové souřadnici některého z těchto průsečíků?

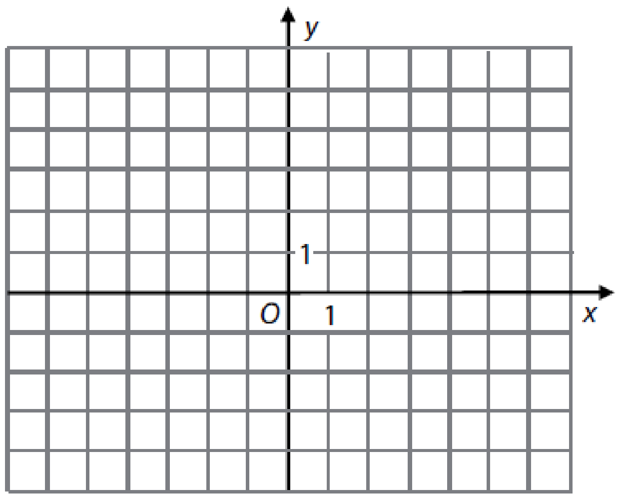
…………..

Př. 9 Státní maturita 2017 Matematika+

Kvadratická funkce f je sudá,

$f(1) = 1$

a graf funkce f má právě jeden společný bod s grafem funkce g: $y = \cos x - 2$.

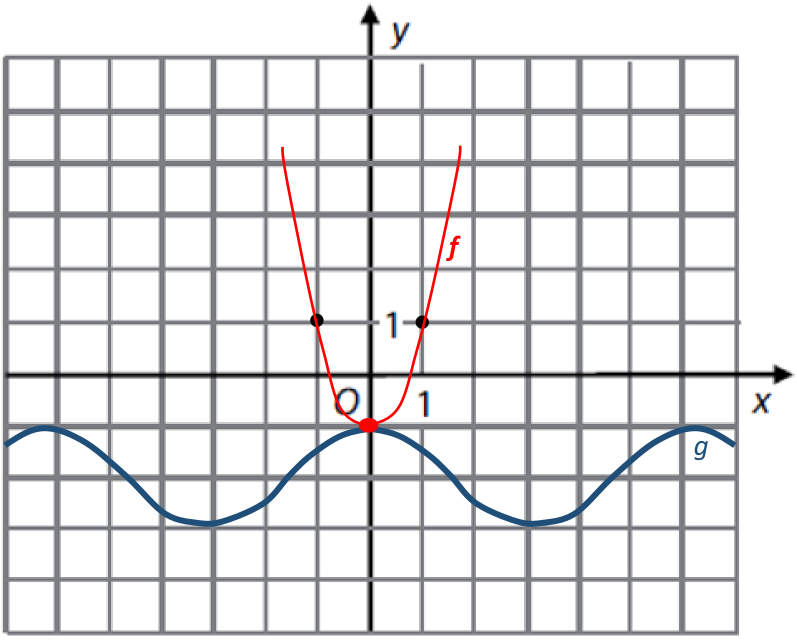


Zapište předpis funkce f. $[f(x) = 2x^2 - 1]$

Met.: Tuto úlohu nelze zadat studentům v době, kdy se teprve probírá kvadratická funkce, protože goniometrické funkce se probírají později a studenti netuší, jak vypadá graf funkce $g\colon y = \cos x - 2$. Možná by ale stálo za to zvážit zjednodušení zadání náhradou goniometrické funkce funkcí konstantní $h\colon y = -1$. Základní úvaha o řešení by zůstala stejná, úloha by byla zvládnutelná všemi studenty, výsledek úlohy by byl stejný a učitel by mohl šikovné řešitele odměnit podle nastavených pravidel.

Řeš.: Dáno: Kvadratická funkce (graf je parabola) je sudá (parabola je souměrná podle osy y).

$f(1) = 1$, vzhledem k sudosti funkce musí také $f(-1) = 1$.



Má-li mít graf hledané kvadratické funkce *f* s grafem funkce *g* právě jeden společný bod, musí to být bod $[0; -1]$, který bude zároveň vrcholem paraboly.

Rovnice funkce: *f: y = a(x – m)² + n* $f\colon 1 = a(1-0)^2 - 1$, odsud $a = 2$

$f\colon y = 2x^2 - 1$