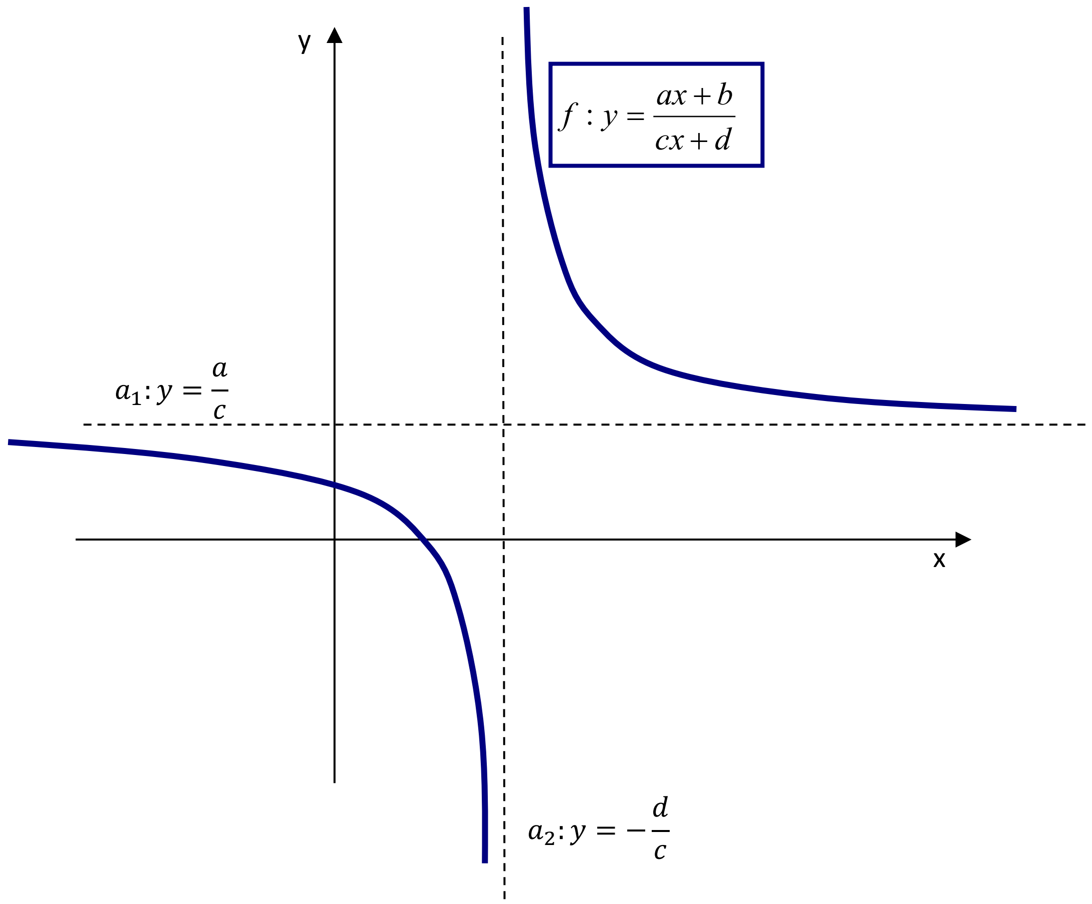
19 Lineární lomená funkce – met.

Stručný přehled teorie

Lineární lomená funkce *je funkce* $f: y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0, bc - ad \neq 0$.

Grafem lineární lomené funkce je ***rovnoosá hyperbola***, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

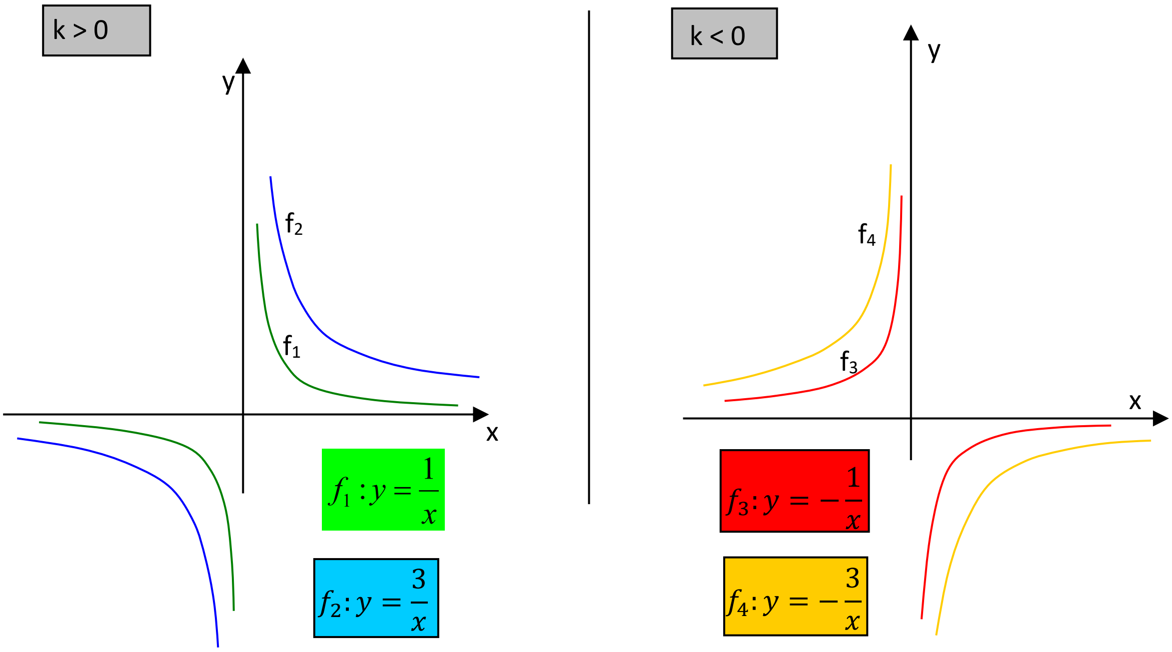
Prostřednictvím převedení rovnice lineární lomené funkce ze základního tvaru $f: y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ do podoby $f: y = \dfrac{k}{x - x_0} + y_0$ získáme rovnice asymptot: *a_1* (posunutá osa x): $y = y_0$; *a_2* (posunutá osa y): $x = x_0$.



Vlastnosti:

- $D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}; H(f) = R - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
- není ani sudá ani lichá;
- v intervalech $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ a $\left(-\frac{d}{c}; \infty\right)$ má stejný typ monotónnosti;
- není omezená;
- nemá extrémy;
- je prostá

Speciálním případem (pro $x_0 = 0$, $y_0 = 0$) je **nepřímá úměrnost**, což je funkce $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{x}}$, k≠0, D(f)=R – {0}.
Graf nepřímé úměrnosti má asymptoty přímo v souřadnicových osách.



Vlastnosti:

- $D(f) = R - \{0\}; H(f) = R - \{0\}$
- je lichá;
- pro k > 0 je v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ klesající,
  pro k < 0 je v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ rostoucí;
- není omezená;
- nemá extrémy;
- je prostá

Met.: Na základní škole se studenti setkali s nepřímou úměrností dvakrát:
Nejprve byla v 8. třídě představena jako takový typ závislosti jedné veličiny (y) na jiné veličině (x), pro který platí : $x.y = k$, neboli $y = \frac{k}{x}$, přičemž se zdůrazňovala práce s výhradně kladnými veličinami. I přesto už byla křivka nacházející se pouze v I. kvadrantu představena jako část *hyperboly*.
Do 9. třídy jsou už jako jedno z probíraných témat zařazeny funkce. K nepřímé úměrnosti jako k funkci typu f:y $= \frac{k}{x}$, kde $k \in R - \{0\}$, už je přidán pojem definičního oboru $D(f) = R - \{0\}$, grafem je celá hyperbola a dokonce jsou probrány vlastnosti růstu či klesání funkce.

Základní poznatky

Př. 1 Promyslete rozdíly mezi grafy funkcí:

a) $f_1\colon y = \frac{1}{x}$

b) $f_2\colon y = \frac{1}{x} + 1$

c) $f_3\colon y = \frac{1}{x+1}$

d) $f_4\colon y = \frac{2}{x}$

e) $f_5\colon y = \frac{-2}{x}$

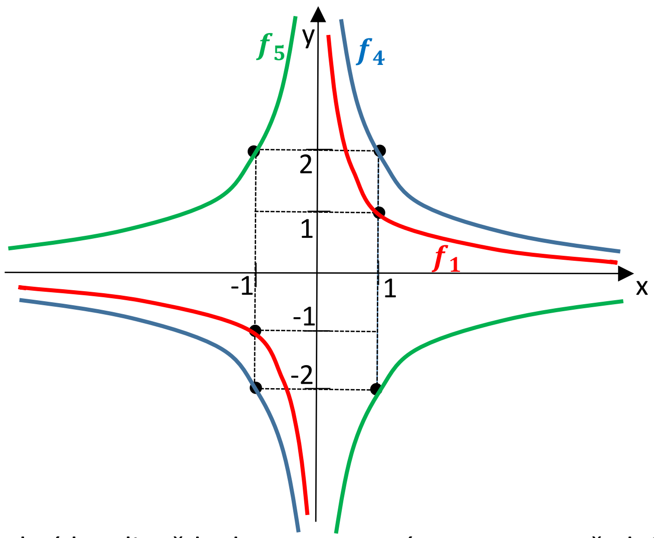
f) $f_6\colon y = \frac{2}{x-1} - 3$

Met.: Přesto, že úlohy a), d), e) by studenti měli zvládat jako látku probranou na ZŠ, měl by je učitel zopakovat a nakreslit všechny tři grafy do jedné souřadnicové soustavy, aby si studenti připomněli, jak měnící se koeficient *k* ovlivňuje tvar a polohu hyperboly.

a) $\boxed{f_1\colon y = \frac{1}{x}}$

d) $\boxed{f_4\colon y = \frac{2}{x}}$

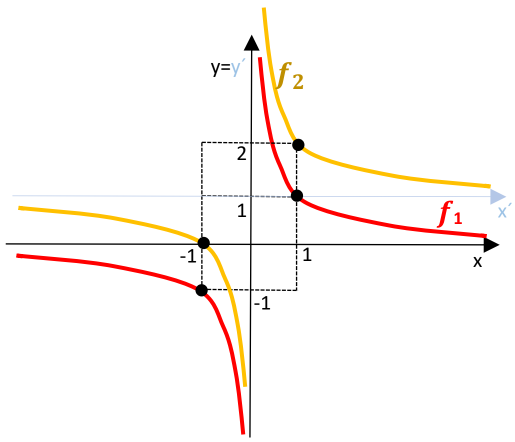
e) $\boxed{f_5\colon y = \frac{-2}{x}}$



Grafy zbývajících funkcí je dobré kreslit vždy do samostatné soustavy souřadnic spolu s grafem funkce f_1:

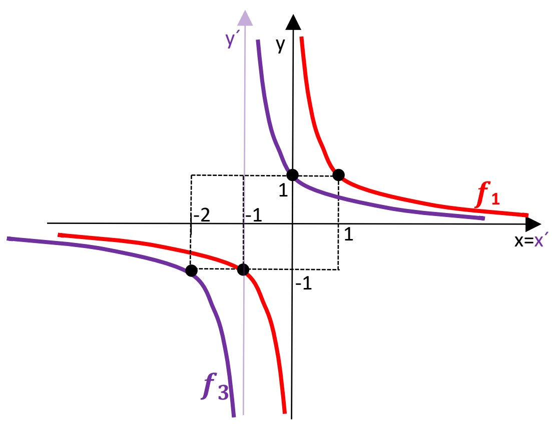
a) $\boxed{f_1\colon y = \frac{1}{x}}$

b) $\boxed{f_2\colon y = \frac{1}{x} + 1}$



a) $\boxed{f_1\colon y = \frac{1}{x}}$

c) $\boxed{f_3\colon y = \frac{1}{x+1}}$



a) $\boxed{f_1: y = \frac{1}{x}}$

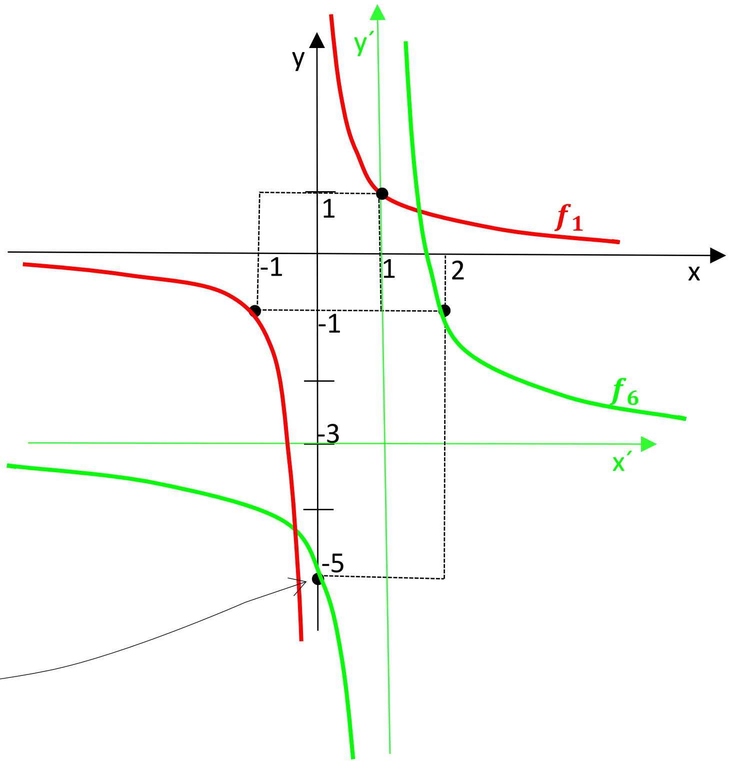
e) $\boxed{f_6: y = \frac{2}{x-1} - 3}$

$\underbrace{y´: x=1 \quad x´: y=-3}$

Pro zjištění, ve kterých kvadrantech vytvořených těmito asymptotami, leží větve hyperboly, stačí vypočítat jeden průsečík s některou souřadnicovou osou:

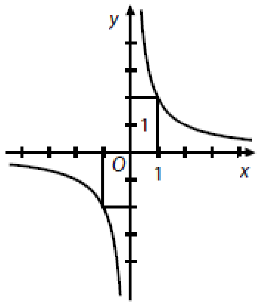
$P_y - ? \ldots x = 0 \rightarrow y = -5$

$P_y[0; -5]$

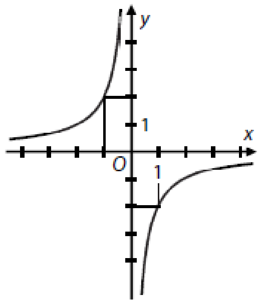


Př. 2 Nalezněte grafy lineárních lomených funkcí a přiřaďte k nim jejich funkční předpisy (zdroj: státní maturita, květen 2016)

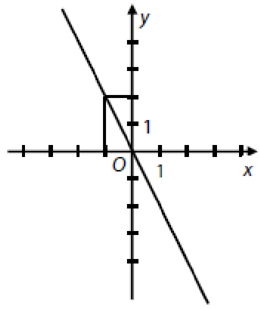
25.1



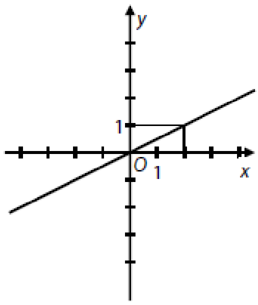
25.2



25.3



25.4



A) $y = \frac{2}{x^{-1}}$

B) $y = \frac{-x}{2^{-1}}$

C) $y = 2^{-1} \cdot x$

D) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$

E) $y = -2 \cdot x^{-1}$

F) $y = -2^{-1} \cdot x^{-1}$

Met.: Přiřazení funkčních předpisů jednotlivým grafům musí předcházet úprava rovnic:

A) $y = \frac{2}{x^{-1}} = 2x$

B) $y = \frac{-x}{2^{-1}} = -2x$

C) $y = 2^{-1}.x = \frac{x}{2}$

D) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{x}$

E) $y = -2.x^{-1} = \frac{-2}{x}$

F) $y = -2^{-1}.x^{-1} = -\frac{1}{2x} = -\frac{\frac{1}{2}}{x}$

$[25.1\ D), 25.2\ E), 25.3\ B), 25.4\ C)]$

Př. 3 Nalezněte grafy funkcí, určete $D(f)$ a $H(f)$

$a)\ f_1\colon y = \frac{-x+2}{3x-1}$ $\left[f_1\colon y = \frac{\frac{5}{9}}{x-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3},\ a_1\colon y = -\frac{1}{3},\ a_2\colon x = \frac{1}{3}\right]$

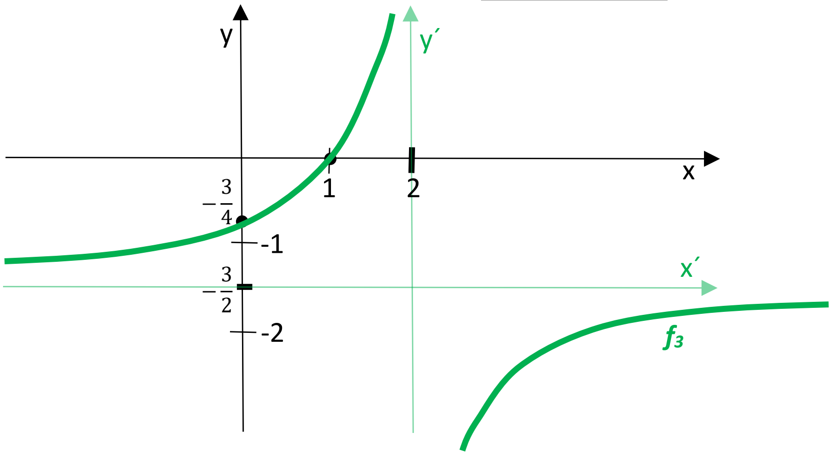
$b)\ f_2\colon y = \left|\frac{-x+2}{3x-1}\right|$ $\left[z\, f_1,\ f_2(x) \geq 0\ pro\ \forall x \in D(f_2),\ a_3\colon y = \frac{1}{3}\right]$

$c)\ f_3\colon y = \frac{-3x+3}{2x-4}$ $\left[f_3\colon y = \frac{-\frac{3}{2}}{x-2} - \frac{3}{2},\ a_1\colon y = -\frac{3}{2},\ a_2\colon x = 2\right]$

$d)\ f_4\colon y = \left|\frac{-3x+3}{2x-4}\right|$ $\left[z\, f_3,\ f_4(x) \geq 0\ pro\ \forall x \in D(f_4), a_3\colon y = \frac{3}{2}\right]$

Met.: c) Rovnici funkce f_3: $y = \frac{-3x+3}{2x-4}$ je třeba nejprve upravit do podoby, ze které lze určit rovnice obou asymptot:

- Úprava rovnice: $y = \frac{-3x+3}{2x-4} = (-3x+3):(2x-4) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2x-4} = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$;
- Funkce: $\boxed{f_3\colon y = \frac{-3x+3}{2x-4} = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{x-2}}$
- Asymptoty: $\boxed{y'\colon x = 2 \quad x'\colon y = -\frac{3}{2}}$
- Průsečíky s osami souřadnic - pro výpočet použijeme původní (tedy neupravenou) rovnici funkce: *P_x* - ? *y = 0* pro *x = 1* $\boxed{P_x[1;0]}$
  Py - ? *x = 0* pro $y = -\frac{3}{4}$ $\boxed{P_y\left[0; -\frac{3}{4}\right]}$
- Graf:



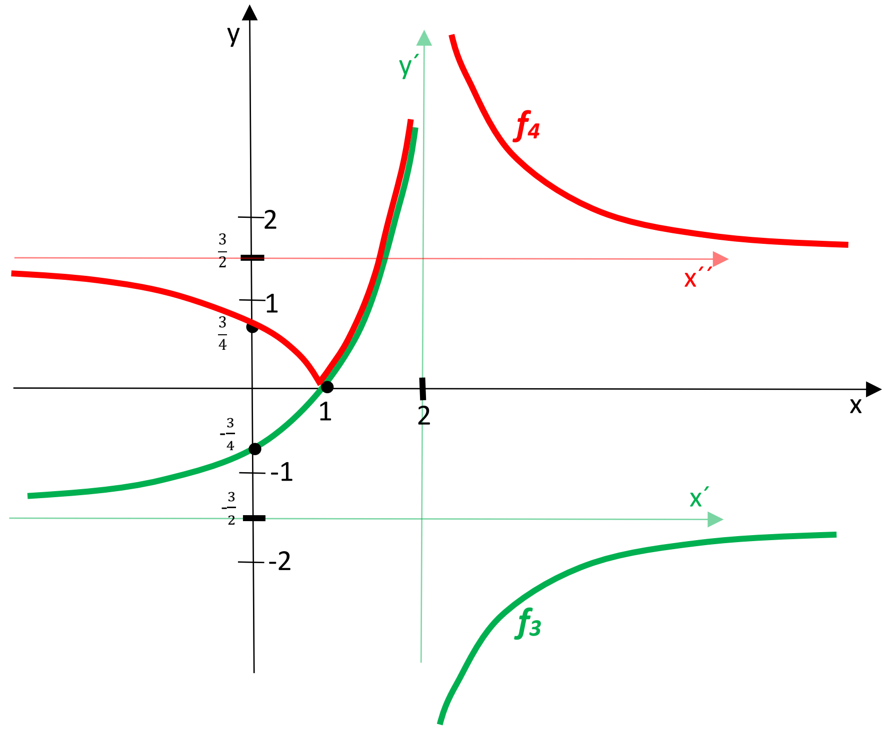
d) Nakreslit graf funkce $f_4\colon y = \left|\frac{-3x+3}{2x-4}\right|$ znamená nejprve pracovat s funkcí f_3, provést potřebné úpravy a výpočty a nakreslit graf funkce $f_3\colon y = \frac{-3x+3}{2x-4}$. Potom je třeba využít:

1) $D_{(f_3)} = D_{(f_4)}$;

2) ▫ $\forall x \in D_{(f_3)}$, kde $f_3(x) \geq 0$, *platí*: $f_4(x) = f_3(x)$;
▫ $\forall x \in D_{(f_3)}$, kde $f_3(x) < 0$, *platí*: $f_4(x) = -f_3(x)$.

Tozn., že části grafu funkce f_3 , které se nacházejí „nad" osou *x*, jsou společné pro f_3 i f_4.
Ty části grafu funkce f_3 , které se nacházejí „pod" osou *x*, se pak využijí jako vzory, jejichž obrazy v osové souměrnosti podle osy *x* doplní celý graf funkce f_4.

Pozn.: Studentům zpravidla souvislost grafů typu f_3 a f_4 nedělá potíže. Nejčastější chybou, které se však řada z nich dopouští, je to, že zapomenou v osové souměrnosti podle osy *x* zobrazit kromě částí grafu f_3 také asymptotu x´´…



Př. 4 Nalezněte graf funkce $f: y = \frac{x+1}{x-2}$, určete $D(f)$ a $H(f)$. Dále nalezněte inverzní funkci f^{-1}, její graf a $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$. $\left[f^{-1}: y = \frac{2x+1}{x-1}\right]$

Met.: Funkce *f* – úpravy a výpočty vedoucí až ke grafu a určení $D(f)$ a $H(f)$ se provedou výše uvedeným způsobem.

Funkce f^{-1}: Nejprve je třeba najít rovnici. $\boxed{f^{-1}:} x = \frac{y+1}{y-2} \rightarrow xy - y = 2x + 1 \rightarrow \boxed{y = \frac{2x+1}{x-1}}$.

Ta se rovněž zpracuje výše uvedeným způsobem.

Graf funkce f^{-1} je třeba nakreslit do téže soustavy souřadnic jako graf funkce *f*. Kontrolou správnosti řešení by pak měla být souměrnost obou grafů podle osy I. a III. kvadrantu.

Rozšiřující cvičení

Př. 5 Nakreslete grafy funkcí a určete jejich definiční obor (zdroj: J. Petáková 58/15, řeš. 226/15)

$a)\ f: y = \frac{1-x^2}{x^3-1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$ $\left[f: y = -\frac{1}{x}, D(f) = R - \{0, \pm 1\}\right]$

$b)\ f: y = 1 + \frac{2}{1 - \frac{2}{1+\frac{2}{x}}}$ $\left[f: y = \frac{x+6}{2-x}, D(f) = R - \{0, \pm 2\}\right]$

Met.: Zjednodušením výrazů na pravé straně obou rovnic získáme

v případě a) nepřímou úměrnost,

v případě b) lineární lomenou funkci.

Při kreslení grafů je třeba zohlednit podmínky!!!