

19 Lineární lomená funkce – met.

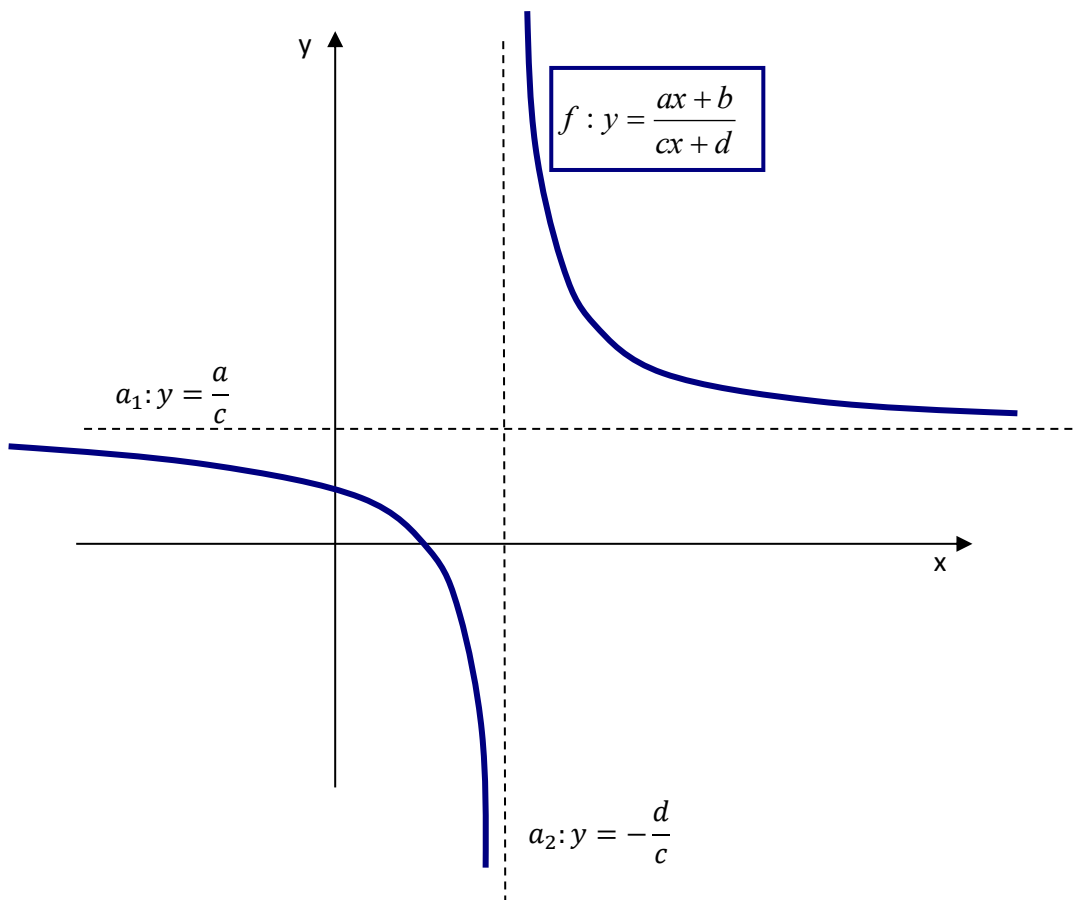
Stručný přehled teorie

Lineární lomená funkce je funkce $f : y = \frac{ax+b}{cx+d}$, kde $c \neq 0, bc - ad \neq 0$.

Grafem lineární lomené funkce je **rovnoosá hyperbola**, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné se souřadnicovými osami.

Prostřednictvím převedení rovnice lineární lomené funkce ze základního tvaru $f : y = \frac{ax+b}{cx+d}$ do podoby

$f : y = \frac{k}{x-x_0} + y_0$ získáme rovnice asymptot: a_1 (posunutá osa x): $y = y_0$; a_2 (posunutá osa y): $x = x_0$.

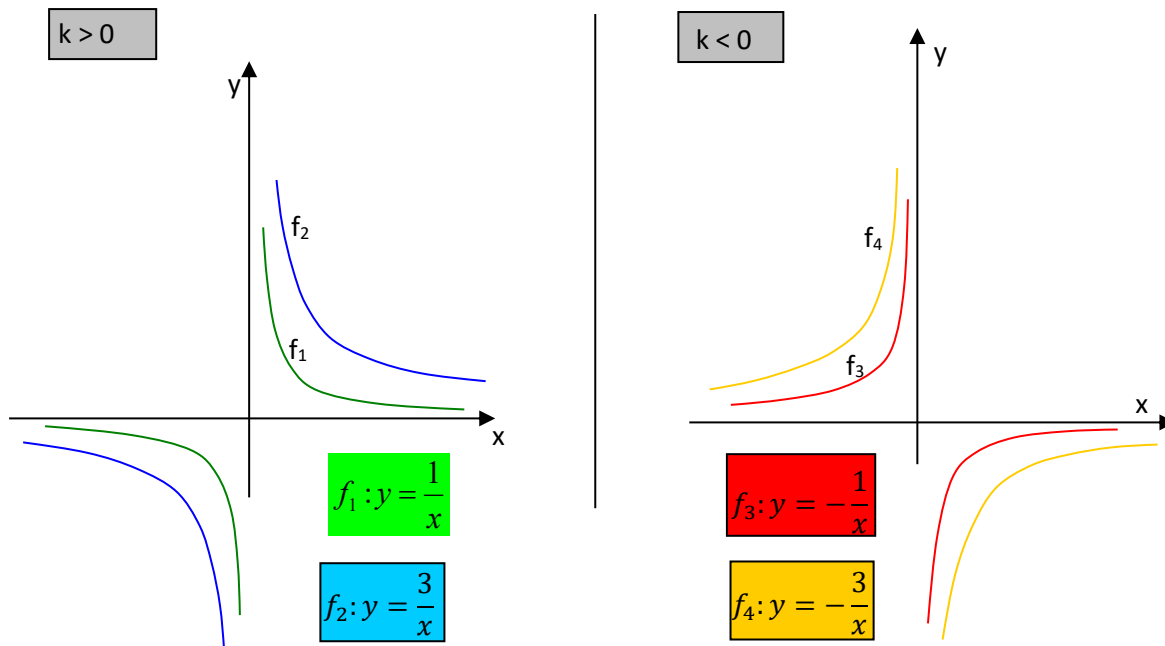


Vlastnosti:

- $D(f) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{d}{c}\right\}; H(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{a}{c}\right\}$
- není ani sudá ani lichá;
- v intervalech $\left(-\infty; -\frac{d}{c}\right)$ a $\left(-\frac{d}{c}; \infty\right)$ má stejný typ monotónnosti;
- není omezená;
- nemá extrém;
- je prostá

Speciálním případem (pro $x_0 = 0, y_0 = 0$) je **nepřímá úměrnost**, což je funkce $f: y = \frac{k}{x}, k \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

Graf nepřímé úměrnosti má asymptoty přímo v souřadnicových osách.



Vlastnosti:

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}; H(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
- je lichá;
- pro $k > 0$ je v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ klesající, pro $k < 0$ je v intervalech $(-\infty; 0)$ a $(0; \infty)$ rostoucí;
- není omezená;
- nemá extrém;
- je prostá

Met.: Na základní škole se studenti setkali s nepřímou úměrností dvakrát: Nejprve byla v 8. třídě představena jako takový typ závislosti jedné veličiny (y) na jiné veličině (x), pro který platí: $x \cdot y = k$, neboli $y = \frac{k}{x}$, přičemž se zdůrazňovala práce s výhradně kladnými veličinami. I přesto už byla křivka nacházející se pouze v I. kvadrantu představena jako část *hyperboly*. Do 9. třídy jsou už jako jedno z probíraných témat zařazeny funkce. K nepřímé úměrnosti jako k funkci typu $f: y = \frac{k}{x}$, kde $k \in \mathbb{R} - \{0\}$, už je přidán pojem definičního oboru $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, grafem je celá hyperbola a dokonce jsou probrány vlastnosti růstu či klesání funkce.

Základní poznatky

Př. 1 Promyslete rozdíly mezi grafy funkcí:

a) $f_1: y = \frac{1}{x}$

b) $f_2: y = \frac{1}{x} + 1$

c) $f_3: y = \frac{1}{x+1}$

d) $f_4: y = \frac{2}{x}$

e) $f_5: y = \frac{-2}{x}$

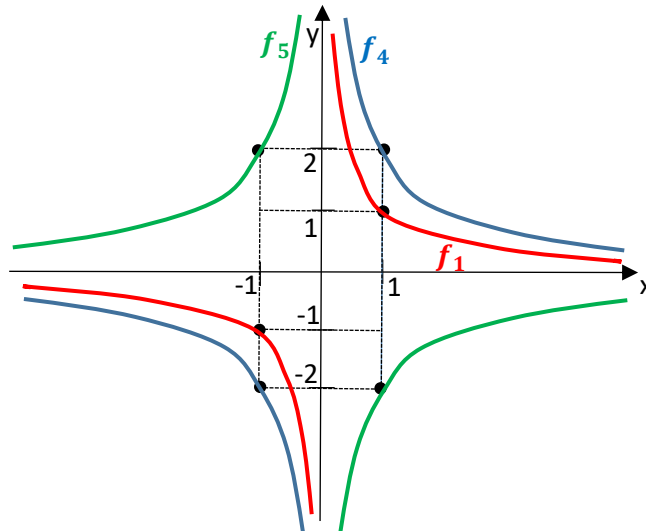
f) $f_6: y = \frac{2}{x-1} - 3$

Met.: Přesto, že úlohy a), d), e) by studenti měli zvládat jako látku probranou na ZŠ, měl by je učitel zopakovat a nakreslit všechny tři grafy do jedné souřadnicové soustavy, aby si studenti připomněli, jak mění se koeficient k ovlivňuje tvar a polohu hyperboly.

a) $f_1: y = \frac{1}{x}$

d) $f_4: y = \frac{2}{x}$

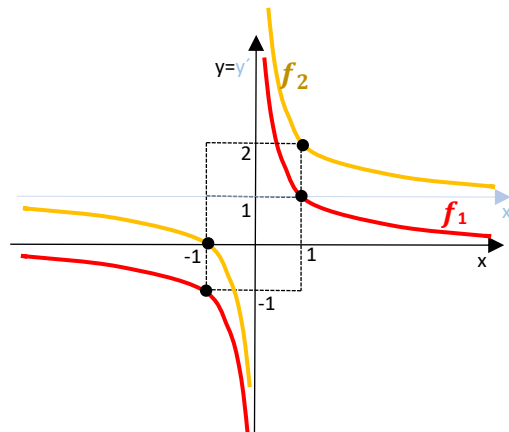
e) $f_5: y = \frac{-2}{x}$



Grafy zbývajících funkcí je dobré kreslit vždy do samostatné soustavy souřadnic spolu s grafem funkce f_1 :

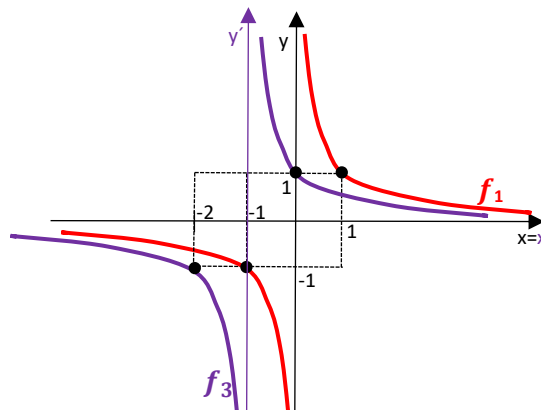
a) $f_1: y = \frac{1}{x}$

b) $f_2: y = \frac{1}{x} + 1$



a) $f_1: y = \frac{1}{x}$

c) $f_3: y = \frac{1}{x+1}$



a) $f_1: y = \frac{1}{x}$

e) $f_6: y = \frac{2}{x-1} - 3$

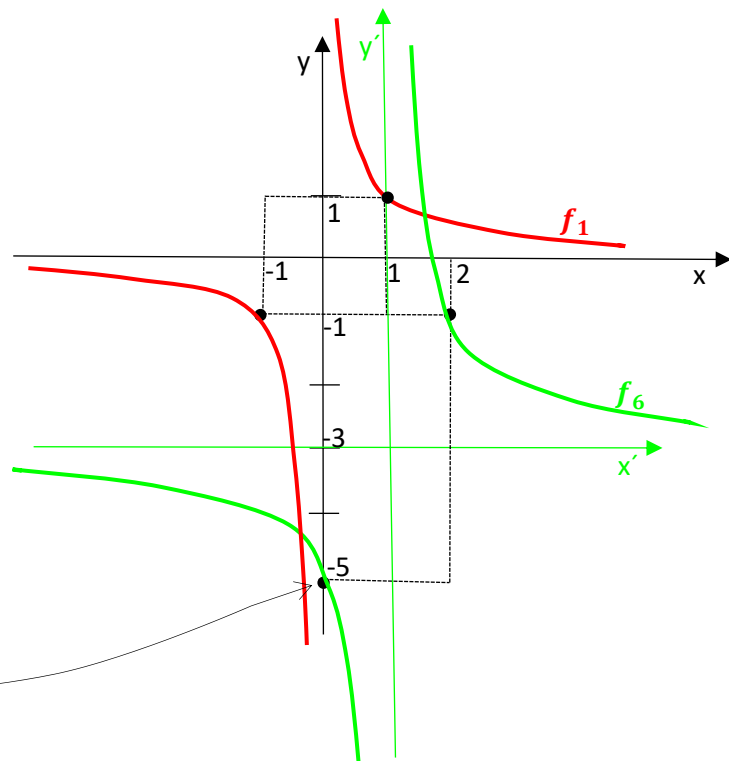
$y': x=1$

$x': y = -3$

Pro zjištění, ve kterých kvadrantech vytvořených těmito asymptotami, leží větve hyperboly, stačí vypočítat jeden průsečík s některou souřadnicovou osou:

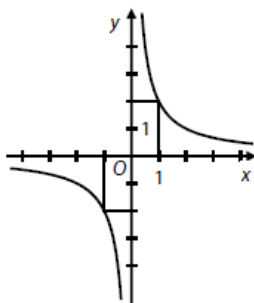
$P_y - ? \dots x = 0 \rightarrow y = -5$

$P_y[0; -5]$

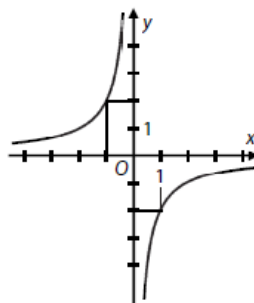


Př. 2 Nalezněte grafy lineárních lomených funkcí a přiřadte k nim jejich funkční předpisy (zdroj: státní maturita, květen 2016)

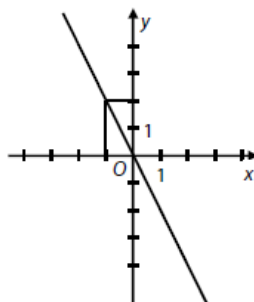
25.1



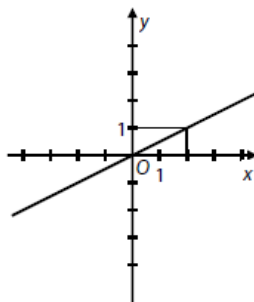
25.2



25.3



25.4



A) $y = \frac{2}{x-1}$

B) $y = \frac{-x}{2-1}$

C) $y = 2^{-1} \cdot x$

D) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1}$

E) $y = -2 \cdot x^{-1}$

F) $y = -2^{-1} \cdot x^{-1}$

Met.: Přiřazení funkčních předpisů jednotlivým grafům musí předcházet úprava rovnic:

A) $y = \frac{2}{x-1} = 2x$

B) $y = \frac{-x}{2-1} = -2x$

C) $y = 2^{-1} \cdot x = \frac{x}{2}$

D) $y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-1} = \frac{2}{x}$

E) $y = -2 \cdot x^{-1} = \frac{-2}{x}$

F) $y = -2^{-1} \cdot x^{-1} = -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x}$

[25.1 D), 25.2 E), 25.3 B), 25.4 C)]

Typové příklady standardní náročnosti

Př. 3 Nalezněte grafy funkcí, určete $D(f)$ a $H(f)$

a) $f_1: y = \frac{-x+2}{3x-1}$ $\left[f_1: y = \frac{\frac{5}{9}}{x-\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}, a_1: y = -\frac{1}{3}, a_2: x = \frac{1}{3} \right]$

b) $f_2: y = \left| \frac{-x+2}{3x-1} \right|$ $\left[z f_1, f_2(x) \geq 0 \text{ pro } \forall x \in D(f_2), a_3: y = \frac{1}{3} \right]$

c) $f_3: y = \frac{-3x+3}{2x-4}$ $\left[f_3: y = \frac{-\frac{3}{2}}{x-2} - \frac{3}{2}, a_1: y = -\frac{3}{2}, a_2: x = 2 \right]$

d) $f_4: y = \left| \frac{-3x+3}{2x-4} \right|$ $\left[z f_3, f_4(x) \geq 0 \text{ pro } \forall x \in D(f_4), a_3: y = \frac{3}{2} \right]$

Met.: c) Rovnici funkce $f_3: y = \frac{-3x+3}{2x-4}$ je třeba nejprve upravit do podoby, ze které lze určit rovnice obou asymptot:

▪ Úprava rovnice: $y = \frac{-3x+3}{2x-4} = (-3x+3):(2x-4) = -\frac{3}{2} - \frac{3}{2x-4} = -\frac{3}{2} - \frac{\frac{3}{2}}{x-2}$;

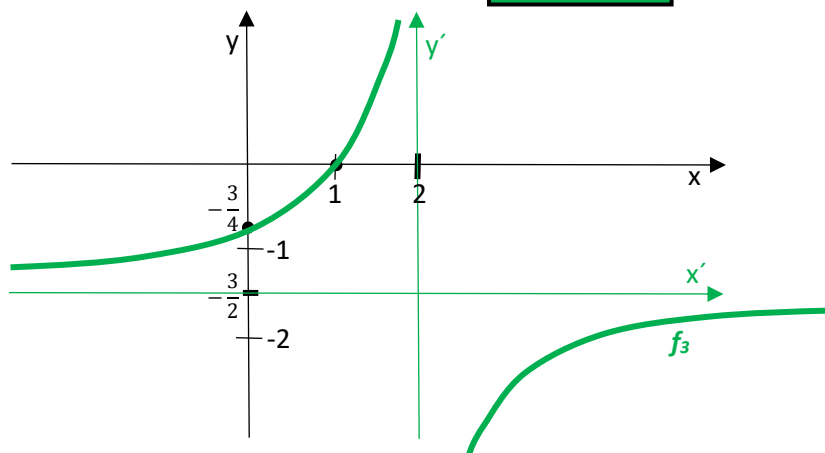
▪ Funkce:

▪ Asymptoty:

▪ Průsečíky s osami souřadnic - pro výpočet použijeme původní (tedy neupravenou) rovnici funkce: $P_x - ? y = 0 \text{ pro } x = 1$

$P_y - ? x = 0 \text{ pro } y = -\frac{3}{4}$

▪ Graf:



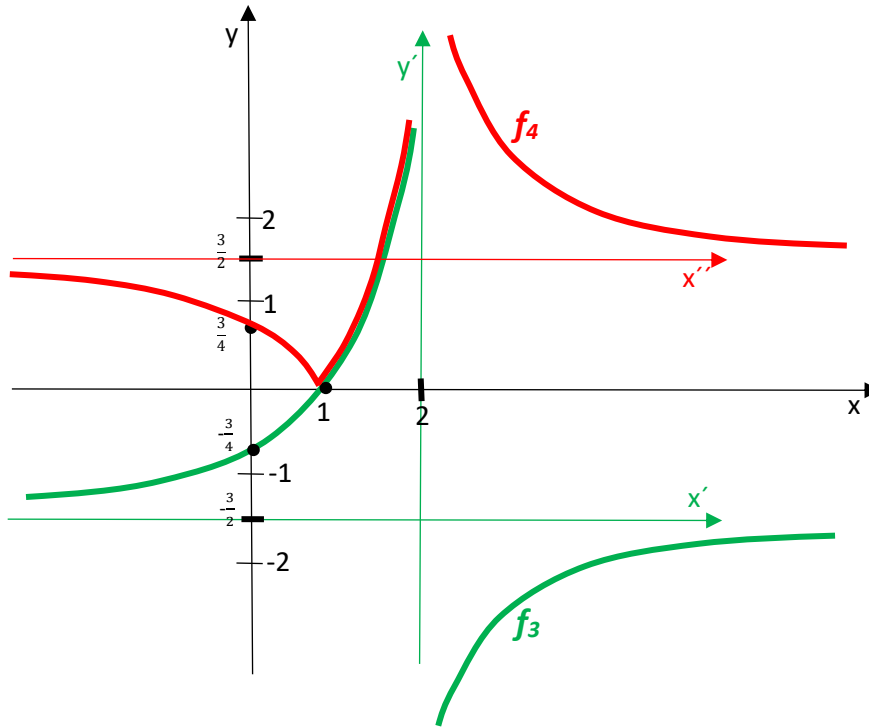
d) Nakreslit graf funkce $f_4: y = \left| \frac{-3x+3}{2x-4} \right|$ znamená nejprve pracovat s funkcí f_3 , provést potřebné úpravy a výpočty a nakreslit graf funkce $f_3: y = \frac{-3x+3}{2x-4}$. Potom je třeba využít:

- 1) $D(f_3) = D(f_4)$;
- 2) $\square \forall x \in D(f_3), \text{ kde } f_3(x) \geq 0, \text{ platí: } f_4(x) = f_3(x)$;
- $\square \forall x \in D(f_3), \text{ kde } f_3(x) < 0, \text{ platí: } f_4(x) = -f_3(x)$.

Tozn., že části grafu funkce f_3 , které se nacházejí „nad“ osou x , jsou společné pro f_3 i f_4 .

Ty části grafu funkce f_3 , které se nacházejí „pod“ osou x , se pak využijí jako vzory, jejichž obrazy v osově souměrnosti podle osy x doplní celý graf funkce f_4 .

Pozn.: Studentům zpravidla souvislost grafů typu f_3 a f_4 nedělá potíže. Nejčastější chybou, které se však řada z nich dopouští, je to, že zapomenou v osové souměrnosti podle osy x zobrazit kromě částí grafu f_3 také asymptotu x' ...



Př. 4 Nalezněte graf funkce $f: y = \frac{x+1}{x-2}$, určete $D(f)$ a $H(f)$. Dále nalezněte inverzní funkci f^{-1} , její graf a $D(f^{-1})$ a $H(f^{-1})$. $[f^{-1}: y = \frac{2x+1}{x-1}]$

Met.: Funkce f – úpravy a výpočty vedoucí až ke grafu a určení $D(f)$ a $H(f)$ se provedou výše uvedeným způsobem.

Funkce f^{-1} : Nejprve je třeba najít rovnici. $[f^{-1}: x = \frac{y+1}{y-2} \rightarrow xy - y = 2x + 1 \rightarrow y = \frac{2x+1}{x-1}]$.

Ta se rovněž zpracuje výše uvedeným způsobem.

Graf funkce f^{-1} je třeba nakreslit do téže soustavy souřadnic jako graf funkce f . Kontrolou správnosti řešení by pak měla být souměrnost obou grafů podle osy I. a III. kvadrantu.

Rozšiřující cvičení

Př. 5 Nakreslete grafy funkcí a určete jejich definiční obor (zdroj: J. Petáková 58/15, řeš. 226/15)

$$a) f: y = \frac{1-x^2}{x^3-1} \cdot \left(\frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) \quad [f: y = -\frac{1}{x}, D(f) = R - \{0, \pm 1\}]$$

$$b) f: y = 1 + \frac{2}{1 - \frac{2}{1 + \frac{2}{x}}} \quad [f: y = \frac{x+6}{2-x}, D(f) = R - \{0, \pm 2\}]$$

Met.: Zjednodušením výrazů na pravé straně obou rovnic získáme v případě a) nepřímou úměrnost, v případě b) lineární lomenou funkci. Při kreslení grafů je třeba zohlednit podmínky!!!