# **21 Mocniny a odmocniny – met.**

**Stručný přehled teorie**

**Pravidla pro počítání s mocninami**

Nechť $a,b\in R^{+};r,s\in R$; Pak platí:

$a^{r}.a^{s}=a^{r+s}$

$\frac{a^{r}}{a^{s}}=a^{r-s}$ ( $a^{0}=\frac{a^{r}}{a^{r}}=1$ $\frac{1}{a^{s}}=a^{-s}$ )

$\left(a^{r}\right)^{s}=a^{r.s}$

$a^{r}.b^{r}=\left(a.b\right)^{r}$

$\frac{a^{r}}{b^{r}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{r}$

**Pravidla pro počítání s odmocninami**

 Nechť $a,b\in R^{+};r,s\in R$; Pak platí:

$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a.b}$

$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}=\sqrt[n]{a^{m}}$

$\sqrt[n]{a^{m}}=a^{\frac{m}{n}}$

Pozn.: Využití pravidel pro a) částečné odmocňování: $\sqrt[n]{a^{n}.b}=a.\sqrt[n]{b}$

b)usměrňování zlomků: např.$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a.b}}{b}$ ...

# Met.: Učitel musí přistupovat k výuce práce s mocninami a odmocninami s vědomím, že jde vlastně o součást jakési abecedy matematiky. Středoškolský student by měl zvládat všechny základní operace s číselnými výrazy bez chyb, bez váhání, s jistotou. S mocninami a odmocninami, s velkými a malými čísly,… se setkává a bude setkávat nejen v matematice, ale i ve fyzice a v dalších oborech. ***Některé rady a doporučení:***

1. Studenti musí mít jasno v otázkách úrovně priority operací s čísly a výrazy – učitel by měl občas vsunout mezi „běžné“ úlohy taková zadání, která „svádějí“ k chybám: a) $\left(-2\right)^{3}=-8$ … lichý exponent $\rightarrow $ ve výpočtu je lichý počet znamének mínus $\rightarrow $výsledné znaménko je mínus ;

 $\left(-5\right)^{4}=+625$ … sudý exponent $\rightarrow $ ve výpočtu je sudý počet znamének mínus $\rightarrow $výsledné znaménko je plus ; $-3^{4}=-81$ … exponent je sice sudý, ale operace ***umocnění má přednost*** před odčítáním, na čtvrtou umocňujeme jen číslo 3 $\rightarrow $ ve výpočtu je jen jediné znaménko mínus (tedy lichý počet)$ \rightarrow $výsledné znaménko je mínus ;

$b)$ $\sqrt{a^{2}+b^{2}}=?$ Mezi studenty se najde řada takových, kteří vypočítají $\sqrt{a^{2}+b^{2}}=a+b$. Učitel by neměl reagovat na tuto chybu jen konstatováním, že je to špatně. Nejlépe je ukázat studentům příklad: Správný výpočet: $\sqrt{3^{2}+4^{2}}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$ (srovnej s výpočtem provedeným podle uvedeného chybného zápisu $\sqrt{3^{2}+4^{2}}=3+4=7$).

 $c)$ $\frac{27.10^{6}-30.10^{5}}{3.10^{5}.6.10^{4}}=\frac{27.10^{6}-3.10^{6}}{18.10^{9}}=\frac{24.10^{6}}{18.10^{9}}=\frac{4}{3.10^{3}}=\frac{4}{3}.10^{-3}$ Místo tohoto správného výpočtu někteří studenti nerespektují prioritu operací a krátí 27 v čitateli proti 3 ve jmenovateli, 30 v čitateli proti 6 ve jmenovateli, eventuálně chybně krátí mocniny deseti !!! Nevhodným způsobem výpočtu je jistě také $\frac{27.10^{6}-30.10^{5}}{3.10^{5}.6.10^{4}}=\frac{27000000-3000000}{3.100000.6.10000}=…$

1. Učitel musí vést studenty k tomu, aby prováděli pokud možno přesné výpočty a nedopouštěli se např. nahrazování přesného čísla π nepřesným 3,14, přesného čísla $\sqrt{2}$ nepřesným 1,414 apod.

Např.: a) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}=2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

 b) $\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{40}=5.\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}+3.\sqrt[3]{5}-2.\sqrt[3]{5}=5.\sqrt[3]{5}$ Oba výpočty jsou přesné a přesný je i výsledek. A takový výpočet i výsledek by měl učitel rozhodně od všech studentů vyžadovat. Je třeba ale počítat s tím, že studentům chybí ze ZŠ zběhlost a obratnost v jednoduchých výpočtech, takže mnozí „nevidí“, že např. $135=27.5=3^{3}.5$ apod. I z tohoto důvodu často sahají po kalkulačce. Pokud ji používají pouze k tomu, aby „napravili“ svoji neobratnost v uvedených pomocných výpočtech, neměl by jim učitel bránit. Jakmile ale zneužijí kalkulačky k tomu, aby počítali $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}=3,46-5,2+…$ , je třeba ihned zasáhnout …

1. Studenti musí perfektně ovládat pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami a učitel je musí vést u všech typů úloh k optimálním způsobům řešeni:

Např. a) $\frac{(-8)^{5}.10^{3}.(-12).(-81)^{2}}{9^{4}.6^{4}.(-10)^{3}.3^{-5}.64^{2}}=-\frac{\left(2^{3}\right)^{5}.\left(2.5\right)^{3}.\left(2^{2}.3\right).\left(3^{4}\right)^{2}}{\left(3^{2}\right)^{4}.\left(2.3\right)^{4}.\left(2.5\right)^{3}.3^{-5}.\left(2^{6}\right)^{2}}=-\frac{2^{15}.2^{3}.5^{3}.2^{2}.3^{1}.3^{8}}{3^{8}.2^{4}.3^{4}.2^{3}.5^{3}.3^{-5}.2^{12}}=$

 $=-2^{15+3+2-4-3-12}.3^{1+8-8-4+5}.5^{3-3}=-2.3^{2}=-18$

1. krok … rozhodnutí o znaménku výsledku – na základě celkového počtu znamének mínus u základů mocnin – v tomto výrazu je jich 11, tedy lichý počet, proto je výsledné znaménko mínus (samozřejmě záporný exponent (-5) nemá na znaménko výsledku vliv);
2. krok … předřazení vypočítaného znaménka před výraz (s následným ignorováním záporných znamének u všech základů mocnin);
3. krok … převod všech čísel ve výrazu na mocniny s prvočíselným základem s následnou úpravou do podoby jednoduchých mocnin;
4. krok … zápis výsledku jako součinu mocnin s prvočíselnými základy

Pozn.: Řešení této úlohy je provedeno bez krácení. Pokud ale ve výrazu je krácení možné, samozřejmě je dobré je využít a výpočet díky tomu zjednodušit.

b) $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}.\sqrt{\frac{a^{2}.\sqrt[4]{2}}{2}}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6a}}{3.\sqrt[8]{a^{5}}}=?$

 1. způsob – práce s odmocninami: $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}.\sqrt{\frac{a^{2}.\sqrt[4]{2}}{2}}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6a}}{3.\sqrt[8]{a^{5}}}=\sqrt[4]{\sqrt{\frac{a}{2}}}.\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^{8}}.\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^{4}}}}.\frac{\sqrt[8]{3^{4}}.\sqrt[8]{6^{4}.a^{4}}}{\sqrt[8]{3^{8}.a^{5}}}=\sqrt[8]{\frac{a}{2}}.\sqrt[8]{\frac{a^{8}.2}{2^{4}}}.\sqrt[8]{\frac{3^{4}.3^{4}.2^{4}.a^{4}}{3^{8}.a^{5}}}=$

 $=\sqrt[8]{\frac{a^{13}.2^{5}.3^{8}}{a^{5}.2^{5}.3^{8}}}=\sqrt[8]{a^{8}}=a$

 2. způsob – užitím převodů odmocnin na mocniny s racionálním exponentem

 $\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}.\sqrt{\frac{a^{2}.\sqrt[4]{2}}{2}}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6a}}{3.\sqrt[8]{a^{5}}}=\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{a^{2}.2^{\frac{1}{4}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{3^{\frac{1}{2}}.\left(6a\right)^{\frac{1}{2}}}{3.a^{\frac{5}{8}}}=\frac{a^{\frac{1}{8}}.a.2^{\frac{1}{8}}.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{8}}.2^{\frac{1}{2}}.3.a^{\frac{5}{8}}}=$ $=a^{\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}.2^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1}=a^{\frac{13}{8}-\frac{5}{8}}=a$

#  Pozn.: ⁃ uvedení podmínek, za kterých má upravovaný výraz smysl, je nezbytnou součástí řešení (v této úloze … podm.: $a>0$ ) ⁃ způsob zápisu výsledku by měl korespondovat se způsobem zápisu zadání, a to bez ohledu na to, jaká metoda řešení byla zvolena

Základní poznatky:

Př. 1 Vypočítejte: a) $\frac{0,0006∙3.10^{7}∙0,9}{5,4.10^{-3}∙300∙10000^{0,5}}=$ $b) \frac{(3^{3}.2)^{100}}{3^{150}.\left(3.2^{2}\right)^{50}}=$ $c) 729^{\frac{2}{3}}+81^{\frac{3}{4}}+243^{\frac{4}{5}}=$ $d) 10.\sqrt[3]{5}-7.\sqrt[3]{40}+5.\sqrt[3]{135}-4.\sqrt[3]{320}+2.\sqrt[3]{625}=$

 $\left[a) 100, b) státní maturita 2016: 3^{100},c) 189, d) \sqrt[3]{5^{4}}\right]$ Met.: a) $\frac{0,0006∙3.10^{7}∙0,9}{5,4.10^{-3}∙300∙10000^{0,5}}=\frac{6.10^{-4}.3.10^{6}.9}{54.10^{-4}.3 10^{2}.10^{2}}=10^{2}$

 …

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 2 Vypočítejte:

* + 1. $\frac{\left(8^{-\frac{1}{2}}.10^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}}$ **:** $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{64}}}=$
		2. $\frac{5}{\sqrt{2}}.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.\sqrt[15]{5^{-17}}.2^{-\frac{1}{30}}=$ $\left[a) 16, b) \sqrt[45]{\frac{5^{4}}{2^{34}}}\right]$

Př. 3 Upravte:

$a)\left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{9}{20}a^{\frac{1}{2}}=$? Podm.: $a>0$

 Met.: K řešení této úlohy je třeba využít pravidla $a^{-k}=\frac{1}{a^{k}}$ , neboli $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k}=\left(\frac{b}{a}\right)^{k}$ .

$$\left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}+\left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{9}{20}a^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{9}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{16}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{a}{25}\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{9}{20}a^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}}{2}+\frac{\sqrt{a}}{3}+\frac{\sqrt{a}}{4}+\frac{\sqrt{a}}{5}-\frac{9\sqrt{a}}{20}=\frac{30\sqrt{a}+20\sqrt{a}+15\sqrt{a}+12\sqrt{a}-27\sqrt{a}}{60}=\frac{5\sqrt{a}}{6}$$

$b)\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}.b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2}.d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3}.\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{b^{2}}.\sqrt{d^{5}}}{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^{4}}\right]^{-1}=$? Podm.: $a>0,b\ne 0, c>0, d>0$

 Met.: Při řešení této úlohy je naopak použití pravidla $a^{-k}=\frac{1}{a^{k}}$ nebo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k}=\left(\frac{b}{a}\right)^{k}$ zbytečné. Úloha se tím nijak nezjednoduší, pouze dojde k mírné ztrátě času provedením zcela zbytečného kroku. Optimální řešení:

 $\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}.b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2}.d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3}.\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{b^{2}}.\sqrt{d^{5}}}{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^{4}}\right]^{-1}=\frac{a^{\frac{3}{4}}.b^{-3}}{c^{6}.d^{-\frac{3}{2}}}.\frac{a^{-\frac{3}{4}}.b^{-\frac{2}{3}}.d^{-\frac{5}{2}}}{c^{-6}}=a^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}.b^{-3-\frac{2}{3}}.c^{-6+6}.d^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}=b^{-\frac{11}{3}}.d^{-1}$

 $c) \frac{\sqrt[12]{x^{5}}.y^{\frac{5}{6}}.y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{y.x^{2}}}=$

 $d) \sqrt{x.\sqrt[3]{y.\sqrt[4]{x^{3}.y^{3}}}}:\sqrt[4]{x^{3}.\sqrt[3]{y.\sqrt{x.y}}}=$

$\left[\begin{array}{c}a) \frac{5}{6}\sqrt{a}, a>0 , b) b^{-\frac{11}{3}}.d^{-1}, a>0,b\ne 0, c>0, d>0,\\c) \sqrt{x}, x>0, y>0, d) \sqrt[6]{\frac{y}{x}}, x>0, y>0\end{array}\right]$

Př. 4 Dokažte, že platí:

1. $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}}-\frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1}=\frac{2}{1-a } $ **;** $a>0, a\ne 1;$
2. $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}}-\frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}}=2\left(ab\right)^{\frac{1}{3}} $ **;** $a\ne b,a\ne -b;$

 Met.: Zásadní chybou, které se občas studenti dopouštějí při řešení úloh zaměřených na důkazy rovností, je to, že s dokazovanou rovností pracují jako s rovnicí. Správný postup je ovšem takový, že se musí upravit každá strana dokazované rovnosti zvlášť. Pokud se podaří obě strany upravit do stejné podoby, rovnost platí.