21 Mocniny a odmocniny – met.

Stručný přehled teorie

Pravidla pro počítání s mocninami

Nechť $a, b \in R^+; r, s \in R;$ Pak platí:

- $a^r . a^s = a^{r+s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ ($a^0 = \frac{a^r}{a^r} = 1$ $\frac{1}{a^s} = a^{-s}$)
- $(a^r)^s = a^{r.s}$
- $a^r . b^r = (a.b)^r$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Pravidla pro počítání s odmocninami

Nechť $a, b \in R^+, m, n \in N;$ Pak platí:

- $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a.b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Pozn.: Využití pravidel pro a) částečné odmocňování: $\sqrt[n]{a^n . b} = a . \sqrt[n]{b}$

b) usměrňování zlomků: např. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}.\sqrt{b}}{\sqrt{b}.\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a.b}}{b}$

…

Met.: Učitel musí přistupovat k výuce práce s mocninami a odmocninami s vědomím, že jde vlastně o součást jakési abecedy matematiky. Středoškolský student by měl zvládat všechny základní operace s číselnými výrazy bez chyb, bez váhání, s jistotou. S mocninami a odmocninami, s velkými a malými čísly,… se setkává a bude setkávat nejen v matematice, ale i ve fyzice a v dalších oborech.

Některé rady a doporučení:

1) Studenti musí mít jasno v otázkách úrovně priority operací s čísly a výrazy – učitel by měl občas vsunout mezi „běžné“ úlohy taková zadání, která „svádějí“ k chybám:

a) $\boxed{(-2)^3 = -8}$ … lichý exponent → ve výpočtu je lichý počet znamének mínus → výsledné znaménko je mínus ;

$\boxed{(-5)^4 = +625}$ … sudý exponent → ve výpočtu je sudý počet znamének mínus → výsledné znaménko je plus ;

$\boxed{-3^4 = -81}$ … exponent je sice sudý, ale operace ***umocnění má přednost*** před odčítáním, na čtvrtou umocňujeme jen číslo 3 → ve výpočtu je jen jediné znaménko mínus (tedy lichý počet) → výsledné znaménko je mínus ;

b) $\boxed{\sqrt{a^2 + b^2} = ?}$ Mezi studenty se najde řada takových, kteří vypočítají $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. Učitel by neměl reagovat na tuto chybu jen konstatováním, že je to špatně. Nejlépe je ukázat studentům příklad: Správný výpočet: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ (srovnej s výpočtem provedeným podle uvedeného chybného zápisu $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$).

c) $\boxed{\frac{27.10^6-30.10^5}{3.10^5.6.10^4}} = \frac{27.10^6-3.10^6}{18.10^9} = \frac{24.10^6}{18.10^9} = \frac{4}{3.10^3} = \frac{4}{3}.10^{-3}$

Místo tohoto správného výpočtu někteří studenti nerespektují prioritu operací a krátí 27 v čitateli proti 3 ve jmenovateli, 30 v čitateli proti 6 ve jmenovateli, eventuálně chybně krátí mocniny deseti !!!

Nevhodným způsobem výpočtu je jistě také $\frac{27.10^6-30.10^5}{3.10^5.6.10^4} = \frac{27000000-3000000}{3.100000.6.10000} = \cdots$

2) Učitel musí vést studenty k tomu, aby prováděli pokud možno přesné výpočty a nedopouštěli se např. nahrazování přesného čísla π nepřesným 3,14, přesného čísla $\sqrt{2}$ nepřesným 1,414 apod.

Např.: a) $\boxed{\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75}} = 2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+4\sqrt{3}+5\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

b) $\boxed{\sqrt[3]{625}-\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{135}-\sqrt[3]{40}} = 5.\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5}+3.\sqrt[3]{5}-2.\sqrt[3]{5} = 5.\sqrt[3]{5}$

Oba výpočty jsou přesné a přesný je i výsledek. A takový výpočet i výsledek by měl učitel rozhodně od všech studentů vyžadovat. Je třeba ale počítat s tím, že studentům chybí ze ZŠ zběhlost a obratnost v jednoduchých výpočtech, takže mnozí „nevidí", že např. $135 = 27.5 = 3^3.5$ apod. I z tohoto důvodu často sahají po kalkulačce. Pokud ji používají pouze k tomu, aby „napravili" svoji neobratnost v uvedených pomocných výpočtech, neměl by jim učitel bránit. Jakmile ale zneužijí kalkulačky k tomu, aby počítali $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\sqrt{48}+\sqrt{75} = 3{,}46-5{,}2+\cdots$, je třeba ihned zasáhnout ...

3) Studenti musí perfektně ovládat pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami a učitel je musí vést u všech typů úloh k optimálním způsobům řešeni:

Např. a) $\boxed{\frac{(-8)^5.10^3.(-12).(-81)^2}{9^4.6^4.(-10)^3.3^{-5}.64^2}} = -\frac{\left(2^3\right)^5.(2.5)^3.(2^2.3).\left(3^4\right)^2}{(3^2)^4.(2.3)^4.(2.5)^3.3^{-5}.(2^6)^2} = -\frac{2^{15}.2^3.5^3.2^2.3^1.3^8}{3^8.2^4.3^4.2^3.5^3.3^{-5}.2^{12}} =$

$= -2^{15+3+2-4-3-12}.3^{1+8-8-4+5}.5^{3-3} = -2.3^2 = -18$

1. krok ... rozhodnutí o znaménku výsledku – na základě celkového počtu znamének mínus u základů mocnin – v tomto výrazu je jich 11, tedy lichý počet, proto je výsledné znaménko mínus (samozřejmě záporný exponent (-5) nemá na znaménko výsledku vliv);
2. krok ... předřazení vypočítaného znaménka před výraz (s následným ignorováním záporných znamének u všech základů mocnin);
3. krok ... převod všech čísel ve výrazu na mocniny s prvočíselným základem s následnou úpravou do podoby jednoduchých mocnin;
4. krok ... zápis výsledku jako součinu mocnin s prvočíselnými základy

Pozn.: Řešení této úlohy je provedeno bez krácení. Pokud ale ve výrazu je krácení možné, samozřejmě je dobré je využít a výpočet díky tomu zjednodušit.

b) $\boxed{\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}.\sqrt{\frac{a^2.\sqrt[4]{2}}{2}}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6a}}{3.\sqrt[8]{a^5}} = ?}$

1. způsob – práce s odmocninami:

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}.\sqrt{\frac{a^2.\sqrt[4]{2}}{2}}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6a}}{3.\sqrt[8]{a^5}} = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{a}{2}}}.\sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^8}.\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{2^4}}}.\frac{\sqrt[8]{3^4}.\sqrt[8]{6^4.a^4}}{\sqrt[8]{3^8.a^5}} = \sqrt[8]{\frac{a}{2}}.\sqrt[8]{\frac{a^8.2}{2^4}}.\sqrt[8]{\frac{3^4.3^4.2^4.a^4}{3^8.a^5}} =$$

$$= \sqrt[8]{\frac{a^{13}.2^5.3^8}{a^5.2^5.3^8}} = \sqrt[8]{a^8} = a$$

2. způsob – užitím převodů odmocnin na mocniny s racionálním exponentem

$$\sqrt[4]{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2}}}.\sqrt{\frac{a^2.\sqrt[4]{2}}{2}}.\frac{\sqrt{3}.\sqrt{6a}}{3.\sqrt[8]{a^5}} = \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{4}}.\left(\frac{a^2.2^{\frac{1}{4}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.\frac{3^{\frac{1}{2}}.(6a)^{\frac{1}{2}}}{3.a^{\frac{5}{8}}} = \frac{a^{\frac{1}{8}}.a.2^{\frac{1}{8}}.3^{\frac{1}{2}}.2^{\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}}.a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{8}}.2^{\frac{1}{2}}.3.a^{\frac{5}{8}}} =$$

$$= a^{\frac{1}{8}+1+\frac{1}{2}-\frac{5}{8}}.2^{\frac{1}{8}+\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{2}}.3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1} = a^{\frac{13}{8}-\frac{5}{8}} = a$$

Pozn.:

- uvedení podmínek, za kterých má upravovaný výraz smysl, je nezbytnou součástí řešení (v této úloze … podm.: $a > 0$)
- způsob zápisu výsledku by měl korespondovat se způsobem zápisu zadání, a to bez ohledu na to, jaká metoda řešení byla zvolena

Základní poznatky:

Př. 1 Vypočítejte:

a) $\frac{0{,}0006 \cdot 3.10^{7} \cdot 0{,}9}{5{,}4.10^{-3} \cdot 300 \cdot 10000^{0{,}5}} =$

b) $\frac{(3^3.2)^{100}}{3^{150}.(3.2^2)^{50}} =$

c) $729^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} + 243^{\frac{4}{5}} =$

d) $10.\sqrt[3]{5} - 7.\sqrt[3]{40} + 5.\sqrt[3]{135} - 4.\sqrt[3]{320} + 2.\sqrt[3]{625} =$

$\left[a)\ 100, b)\ \text{státní maturita 2016: } 3^{100}, c)\ 189, d)\ \sqrt[3]{5^4}\right]$

Met.: a) $\frac{0{,}0006 \cdot 3.10^{7} \cdot 0{,}9}{5{,}4.10^{-3} \cdot 300 \cdot 10000^{0{,}5}} = \frac{6.10^{-4}.3.10^{6}.9}{54.10^{-4}.3\ 10^{2}.10^{2}} = 10^2$

…

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 2 Vypočítejte:

a) $\frac{\left(8^{-\frac{1}{2}}.10^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}}.4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[3]{2\sqrt[4]{64}}} =$

b) $\frac{5}{\sqrt{2}}.\left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}.\sqrt[15]{5^{-17}}.2^{-\frac{1}{30}} =$

$\left[a)\ 16, b)\ \sqrt[45]{\frac{5^4}{2^{34}}}\right]$

Př. 3 Upravte:

$a)\ \left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20}a^{\frac{1}{2}} = ?$ Podm.: $a > 0$

Met.: K řešení této úlohy je třeba využít pravidla $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, neboli $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^{k}$.

$$\left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20}a^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{25}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{20}a^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{\sqrt{a}}{4} + \frac{\sqrt{a}}{5} - \frac{9\sqrt{a}}{20} = \frac{30\sqrt{a} + 20\sqrt{a} + 15\sqrt{a} + 12\sqrt{a} - 27\sqrt{a}}{60} = \frac{5\sqrt{a}}{6}$$

$$b)\ \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}.b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2}.d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3}.\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{b^2}.\sqrt{d^5}}{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^4}\right]^{-1}=?$$

Podm.: $a > 0, b \neq 0, c > 0, d > 0$

Met.: Při řešení této úlohy je naopak použití pravidla $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ nebo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$ zbytečné. Úloha se tím nijak nezjednoduší, pouze dojde k mírné ztrátě času provedením zcela zbytečného kroku. Optimální řešení:

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}}.b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2}.d^{\frac{1}{2}}}\right]^{-3}.\left[\frac{a^{\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{b^2}.\sqrt{d^5}}{\left(c^{\frac{3}{2}}\right)^4}\right]^{-1} = \frac{a^{\frac{3}{4}}.b^{-3}}{c^6.d^{-\frac{3}{2}}}.\frac{a^{-\frac{3}{4}}.b^{-\frac{2}{3}}.d^{-\frac{5}{2}}}{c^{-6}} = a^{\frac{3}{4}-\frac{3}{4}}.b^{-3-\frac{2}{3}}.c^{-6+6}.d^{-\frac{5}{2}+\frac{3}{2}} = b^{-\frac{11}{3}}.d^{-1}$$

$$c)\ \frac{\sqrt[12]{x^5}.y^{\frac{5}{6}}.y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{3}{4}}.\sqrt[3]{y.x^2}} =$$

$$d)\ \sqrt{x.\sqrt[3]{y.\sqrt[4]{x^3.y^3}}}:\sqrt[4]{x^3.\sqrt[3]{y.\sqrt{x.y}}} =$$

$$\left[\begin{array}{c} a)\ \frac{5}{6}\sqrt{a}, a > 0, \quad b)\ b^{-\frac{11}{3}}.d^{-1},\ a > 0, b \neq 0, c > 0, d > 0, \\ c)\ \sqrt{x}, x > 0, y > 0, \quad d)\ \sqrt[6]{\frac{y}{x}}, x > 0, y > 0 \end{array}\right]$$

Př. 4 Dokažte, že platí:

a) $\frac{1-a^{-\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}{a-1} = \frac{2}{1-a}$; $a > 0, a \neq 1$;

b) $\frac{a-b}{a^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a+b}{a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}} = 2(ab)^{\frac{1}{3}}$; $a \neq b, a \neq -b$;

Met.: Zásadní chybou, které se občas studenti dopouštějí při řešení úloh zaměřených na důkazy rovností, je to, že s dokazovanou rovností pracují jako s rovnicí. Správný postup je ovšem takový, že se musí upravit každá strana dokazované rovnosti zvlášť. Pokud se podaří obě strany upravit do stejné podoby, rovnost platí.