

21 Mocniny a odmocniny – met.

Stručný přehled teorie

Pravidla pro počítání s mocninami

Nechť $a, b \in R^+; r, s \in R$;

Pak platí:

- $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$
- $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ ($a^0 = \frac{a^r}{a^r} = 1$ $\frac{1}{a^s} = a^{-s}$)
- $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$
- $a^r \cdot b^r = (a \cdot b)^r$
- $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

Pravidla pro počítání s odmocninami

Nechť $a, b \in R^+, m, n \in N$;

Pak platí:

- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Pozn.: Využití pravidel pro a) částečné odmocňování: $\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \cdot \sqrt[n]{b}$
b) usměrňování zlomků: např. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a \cdot b}}{b}$

...

Met.: Učitel musí přistupovat k výuce práce s mocninami a odmocninami s vědomím, že jde vlastně o součást jakési abecedy matematiky. Středoškolský student by měl zvládat všechny základní operace s číselnými výrazy bez chyb, bez váhání, s jistotou. S mocninami a odmocninami, s velkými a malými čísly, ... se setkává a bude setkávat nejen v matematice, ale i ve fyzice a v dalších oborech.

Některé rady a doporučení:

1) Studenti musí mít jasno v otázkách úrovně priority operací s čísly a výrazy – učitel by měl občas vsunout mezi „běžné“ úlohy taková zadání, která „svádějí“ k chybám:

- a) $(-2)^3 = -8$... lichý exponent → ve výpočtu je lichý počet znamének mínus → výsledné znaménko je **mínus** ;
 $(-5)^4 = +625$... sudý exponent → ve výpočtu je sudý počet znamének mínus → výsledné znaménko je **plus** ;
 $-3^4 = -81$... exponent je sice sudý, ale operace **umocnění má přednost** před odčítáním, na čtvrtou umocňujeme jen číslo 3 → ve výpočtu je jen jediné znaménko mínus (tedy lichý počet) → výsledné znaménko je **mínus** ;

- b) $\sqrt{a^2 + b^2} = ?$ Mezi studenty se najde řada takových, kteří vypočítají $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$. Učitel by neměl reagovat na tuto chybu jen konstatováním, že je to špatně. Nejlépe je ukázat studentům příklad: Správný výpočet: $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ (srovnej s výpočtem provedeným podle uvedeného chybného zápisu $\sqrt{3^2 + 4^2} = 3 + 4 = 7$).

$$c) \quad \frac{27 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^4} = \frac{27 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^6}{18 \cdot 10^9} = \frac{24 \cdot 10^6}{18 \cdot 10^9} = \frac{4}{3 \cdot 10^3} = \frac{4}{3} \cdot 10^{-3}$$

Místo tohoto správného výpočtu někteří studenti nerespektují prioritu operací a krátí 27 v čitateli proti 3 ve jmenovateli, 30 v čitateli proti 6 ve jmenovateli, eventuálně chybně krátí mocniny deseti !!!

$$\text{Nevhodným způsobem výpočtu je jistě také } \frac{27 \cdot 10^6 - 30 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^5 \cdot 6 \cdot 10^4} = \frac{27000000 - 3000000}{3 \cdot 100000 \cdot 6 \cdot 10000} = \dots$$

- 2) Učitel musí vést studenty k tomu, aby prováděli pokud možno přesné výpočty a nedopouštěli se např. nahrazování přesného čísla π nepřesným 3,14, přesného čísla $\sqrt{2}$ nepřesným 1,414 apod.

Např.: a) $\frac{\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75}}{2\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3}} = 8\sqrt{3}$

b) $\frac{\sqrt[3]{625} - \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{135} - \sqrt[3]{40}}{5 \cdot \sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{5} + 3 \cdot \sqrt[3]{5} - 2 \cdot \sqrt[3]{5}} = 5 \cdot \sqrt[3]{5}$

Oba výpočty jsou přesné a přesný je i výsledek. A takový výpočet i výsledek by měl učitel rozhodně od všech studentů vyžadovat. Je třeba ale počítat s tím, že studentům chybí ze ZŠ zběhlost a obratnost v jednoduchých výpočtech, takže mnozí „nevidí“, že např.

$135 = 27 \cdot 5 = 3^3 \cdot 5$ apod. I z tohoto důvodu často sahají po kalkulačce. Pokud ji používají pouze k tomu, aby „napravili“ svoji neobratnost v uvedených pomocných výpočtech, neměl by jim učitel bránit. Jakmile ale zneužijí kalkulačky k tomu, aby počítali $\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{48} + \sqrt{75} = 3,46 - 5,2 + \dots$, je třeba ihned zasáhnout ...

- 3) Studenti musí perfektně ovládat pravidla pro počítání s mocninami a odmocninami a učitel je musí vést u všech typů úloh k optimálním způsobům řešení:

Např. a)
$$\frac{(-8)^5 \cdot 10^3 \cdot (-12) \cdot (-81)^2}{9^4 \cdot 6^4 \cdot (-10)^3 \cdot 3^{-5} \cdot 64^2} = - \frac{(2^3)^5 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot (2^2 \cdot 3) \cdot (3^4)^2}{(3^2)^4 \cdot (2 \cdot 3)^4 \cdot (2 \cdot 5)^3 \cdot 3^{-5} \cdot (2 \cdot 6)^2} = - \frac{2^{15} \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 2^2 \cdot 3^1 \cdot 3^8}{3^8 \cdot 2^4 \cdot 3^4 \cdot 2^3 \cdot 5^3 \cdot 3^{-5} \cdot 2^{12}} =$$

$$= -2^{15+3+2-4-3-12} \cdot 3^{1+8-8-4+5} \cdot 5^{3-3} = -2 \cdot 3^2 = -18$$

1. krok ... rozhodnutí o znaménku výsledku – na základě celkového počtu znamének mínus u základů mocnin – v tomto výrazu je jich 11, tedy lichý počet, proto je výsledné znaménko **mínus** (samozřejmě záporný exponent (-5) nemá na znaménko výsledku vliv);
2. krok ... předřazení vypočítaného znaménka před výraz (s následným ignorováním záporných znamének u všech základů mocnin);
3. krok ... převod všech čísel ve výrazu na mocniny s prvočíselným základem s následnou úpravou do podoby jednoduchých mocnin;
4. krok ... zápis výsledku jako součinu mocnin s prvočíselnými základy

Pozn.: Řešení této úlohy je provedeno bez krácení. Pokud ale ve výrazu je krácení možné, samozřejmě je dobré je využít a výpočet díky tomu zjednodušit.

b)
$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6a}}{3 \cdot \sqrt[8]{a^5}}}{?} = ?$$

1. způsob – práce s odmocninami:

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6a}}{3 \cdot \sqrt[8]{a^5}}}{?} = \sqrt[4]{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[4]{a^8 \cdot \sqrt[4]{2}}}{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[8]{3^4 \cdot \sqrt[8]{6^4 \cdot a^4}}}{\sqrt[8]{3^8 \cdot a^5}} = \sqrt[4]{\frac{a}{2}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{2^2}} \cdot \frac{\sqrt[8]{3^4 \cdot 2^4 \cdot a^4}}{\sqrt[8]{3^8 \cdot a^5}} =$$

$$= \sqrt[8]{\frac{a^{13} \cdot 2^5 \cdot 3^8}{a^5 \cdot 2^5 \cdot 3^8}} = \sqrt[8]{a^8} = a$$

2. způsob – užitím převodů odmocnin na mocniny s racionálním exponentem

$$\frac{\sqrt[4]{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{\frac{a^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{6a}}{3 \cdot \sqrt[8]{a^5}}}{?} = \left(\frac{a^2}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{a^2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2}} \cdot (6a)^{\frac{1}{2}}}{3 \cdot a^{\frac{5}{8}}} = \frac{a^{\frac{1}{8}} \cdot a \cdot 2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 3 \cdot a^{\frac{5}{8}}} =$$

$$= a^{\frac{1}{8} + 1 + \frac{1}{2} - \frac{5}{8}} \cdot 2^{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1} \cdot 3^{\frac{1}{2} - 1} = a^{\frac{13}{8}} \cdot 2^{\frac{5}{8}} \cdot 3^{-\frac{1}{2}} = a$$

- Pozn.:
- uvedení podmínek, za kterých má upravovaný výraz smysl, je nezbytnou součástí řešení (v této úloze ... podm.: $a > 0$)
 - způsob zápisu výsledku by měl korespondovat se způsobem zápisu zadání, a to bez ohledu na to, jaká metoda řešení byla zvolena

Základní poznatky:

Př. 1 Vypočítejte:

a) $\frac{0,0006 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 0,9}{5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 10000^{0,5}} =$

b) $\frac{(3^3 \cdot 2)^{100}}{3^{150} \cdot (3 \cdot 2^2)^{50}} =$

c) $729^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{3}{4}} + 243^{\frac{4}{5}} =$

d) $10 \cdot \sqrt[3]{5} - 7 \cdot \sqrt[3]{40} + 5 \cdot \sqrt[3]{135} - 4 \cdot \sqrt[3]{320} + 2 \cdot \sqrt[3]{625} =$

[a) 100, b) státní maturita 2016: 3^{100} , c) 189, d) $\sqrt[3]{5^4}$]

Met.: a) $\frac{0,0006 \cdot 3 \cdot 10^7 \cdot 0,9}{5,4 \cdot 10^{-3} \cdot 300 \cdot 10000^{0,5}} = \frac{6 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^6 \cdot 9}{54 \cdot 10^{-4} \cdot 3 \cdot 10^2 \cdot 10^2} = 10^2$

...

Typové příklady standardní náročnosti:

Př. 2 Vypočítejte:

a) $\frac{\left(8^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{\frac{1}{3}}\right)^{-3}}{\left(25^{\frac{1}{4}} \cdot 4^{\frac{1}{8}}\right)^{-2}} : \frac{\sqrt{2^3 \sqrt{4}}}{\sqrt[3]{2^4 \sqrt{64}}} =$

b) $\frac{5}{\sqrt{2}} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[15]{5^{-17}} \cdot 2^{-\frac{1}{30}} =$ [a) 16, b) $45 \sqrt{\frac{5^4}{2^{34}}}$]

Př. 3 Upravte:

a) $\left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20} a^{\frac{1}{2}} = ?$ Podm.: $a > 0$

Met.: K řešení této úlohy je třeba využít pravidla $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$, neboli $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{4}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{9}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{16}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{25}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{20} a^{\frac{1}{2}} &= \left(\frac{a}{4}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{9}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{16}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{a}{25}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{9}{20} a^{\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2} + \frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{\sqrt{a}}{4} + \frac{\sqrt{a}}{5} - \frac{9\sqrt{a}}{20} = \frac{30\sqrt{a} + 20\sqrt{a} + 15\sqrt{a} + 12\sqrt{a} - 27\sqrt{a}}{60} = \frac{5\sqrt{a}}{6} \end{aligned}$$

$$b) \left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2} \cdot d^{\frac{1}{2}}} \right]^{-3} \cdot \left[\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt{d^5}}{\left(\frac{3}{c^2}\right)^4} \right]^{-1} = ? \quad \text{Podm.: } a > 0, b \neq 0, c > 0, d > 0$$

Met.: Při řešení této úlohy je naopak použití pravidla $a^{-k} = \frac{1}{a^k}$ nebo $\left(\frac{a}{b}\right)^{-k} = \left(\frac{b}{a}\right)^k$ zbytečné. Úloha se tím nijak nezjednoduší, pouze dojde k mírné ztrátě času provedením zcela zbytečného kroku.

Optimální řešení:

$$\left[\frac{\left(a^{\frac{1}{4}} \cdot b^{-1}\right)^{-1}}{c^{-2} \cdot d^{\frac{1}{2}}} \right]^{-3} \cdot \left[\frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{b^2} \cdot \sqrt{d^5}}{\left(\frac{3}{c^2}\right)^4} \right]^{-1} = \frac{a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{-3}}{c^6 \cdot d^{-\frac{3}{2}}} \cdot \frac{a^{-\frac{3}{4}} \cdot b^{-\frac{2}{3}} \cdot d^{-\frac{5}{2}}}{c^{-6}} = a^{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}} \cdot b^{-3 - \frac{2}{3}} \cdot c^{-6 + 6} \cdot d^{-\frac{5}{2} + \frac{3}{2}} = b^{-\frac{11}{3}} \cdot d^{-1}$$

$$c) \frac{\sqrt[12]{x^5 \cdot y^6} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{x^{-\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[3]{y \cdot x^2}} =$$

$$d) \sqrt{x \cdot \sqrt[3]{y \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot y^3}}} : \sqrt[4]{x^3 \cdot \sqrt[3]{y \cdot \sqrt{x \cdot y}}} =$$

$$\left[\begin{array}{l} a) \frac{5}{6} \sqrt{a}, a > 0, \quad b) b^{-\frac{11}{3}} \cdot d^{-1}, a > 0, b \neq 0, c > 0, d > 0, \\ c) \sqrt{x}, x > 0, y > 0, \quad d) \sqrt[6]{\frac{y}{x}}, x > 0, y > 0 \end{array} \right]$$

Př. 4 Dokažte, že platí:

$$a) \frac{1 - a^{-\frac{1}{2}}}{1 + a^{\frac{1}{2}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}}{a - 1} = \frac{2}{1 - a} \quad ; a > 0, a \neq 1;$$

$$b) \frac{a - b}{a^{\frac{1}{3}} - b^{\frac{1}{3}}} - \frac{a + b}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = 2(ab)^{\frac{1}{3}} \quad ; a \neq b, a \neq -b;$$

Met.: Zásadní chybou, které se občas studenti dopouštějí při řešení úloh zaměřených na důkazy rovností, je to, že s dokazovanou rovností pracují jako s rovnicí. Správný postup je ovšem takový, že se musí upravit každá strana dokazované rovnosti zvlášť. Pokud se podaří obě strany upravit do stejné podoby, rovnost platí.