# **22 Exponenciální a logaritmické funkce – met.**

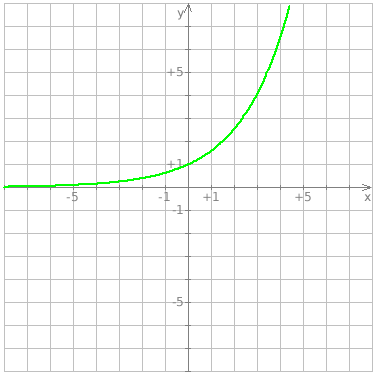
**Stručný přehled teorie**

### *Definice:*

Nechť *a* ***R+*** *- {1}.* Funkce ***f: y = ax*** se nazývá exponenciální funkce se základem *a*.

### *Vlastnosti:*

**a)** pro *a > 1*



* *D (f) =* ***R***
* *H (f) =* ***R+***
* Je rostoucí, a tedy prostá
* *f (0) =1*
* *f* je spojitá v ***R***
* Je zdola omezená (*ax > 0*), není shora omezená
* Nemá ani maximum, ani minimum
* Osa x je asymptotou grafu *f*

**b)** pro *0 < a < 1*

# C:\Documents and Settings\Boogey\Desktop\2.png

* *D (f) =* ***R***
* *H (f) =* ***R+***
* Je klesající, a tedy prostá
* *f (0) =1*
* *f* je spojitá v ***R***
* Je zdola omezená (*ax > 0*), není shora omezená
* Nemá ani maximum, ani minimum
* Osa x je asymptotou grafu *f*

# Logaritmická funkce

Logaritmus je exponent, na který musíme umocnit základ, abychom dostali dané číslo. Tedy: Je-li 32 = 9 , pak log39 = 2

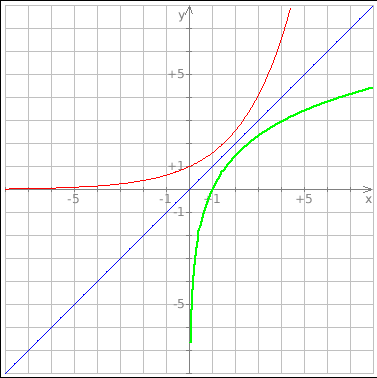
### *Definice:*

Nechť *f: y = ax* je exponenciální funkce se základem *a* ***R+* - {**1**}**. Funkce *g*, inverzní k funkci *f,* se nazývá logaritmická funkce se základem *a.* Označujeme ji ***g: y =* log *a x***

Pro *a* = 10 nazýváme hodnotu funkce dekadický neboli Briggsův logaritmus, pro *a = e* přirozený logaritmus ( *e* ≈ 2,718 je Eulerova konstanta).

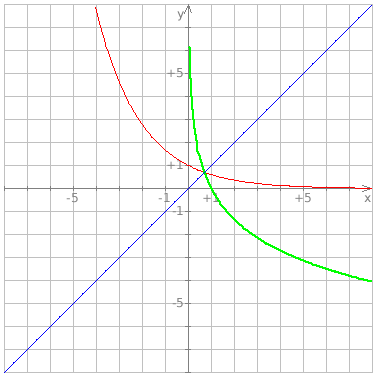
### *Vlastnosti:*

1. pro *a > 1* ( funkce *g* má zelený graf )



* *D (g) =* ***R+***
* *H (g) =* ***R***
* Je rostoucí, a tedy prostá
* Není ani zdola omezená, ani shora omezená
* Nemá ani maximum, ani minimum
* Osa y je asymptotou grafu

**b)** pro *0 < a < 1* (funkce *g* má zelený graf )



* *D (g) =* ***R+***
* *H (g) =* ***R***
* Je klesající, a tedy prostá
* Není ani zdola omezená, ani shora omezená
* Nemá ani maximum, ani minimum
* Osa y je asymptotou grafu

### *Pravidla pro počítání s logaritmy:*



Pro každé a, b, c  R+-{1}, pro každé x1, x2 є R+ a pro každé *r,n,y*R platí:

1) 

2) 

3) 

4) 

5) 

Met.: S exponenciální i logaritmickou funkcí se studenti setkávají poprvé. V běžném životě jistě všichni zaslechli zmíňku o „exponenciálním růstu“ nějaké veličiny, ale nejspíš s ním spojují pouze intuitivní představu strmého narůstání. Termín „logaritmus“ je pro drtivou většinu z nich zcela neznámý.

Učitel by měl studenty nejprve seznámit s exponenciální funkcí , kde . Může se nejprve krátce zmínit a zdůraznit zásadní rozdíl mezi funkcí mocninnou a exponenciální, kdy u mocninné funkce () se argument nachází v základu mocniny, zatímco u funkce exponenciální je argument součástí exponentu mocniny. Vzhledem k tomu, že se exponenciální křivky podstatným způsobem liší pro a pro , měl by učitel rozvrhnout prostor na tabuli tak, aby umístil vedle sebe dvě souřadnicové soustavy, přičemž do jedné bude kreslit exponenciály funkcí s , do druhé pak s . Kreslení grafů musí předcházet vytvoření tabulek, kterých využije nejen pro grafy, nýbrž i k nasměrování pozornosti studentů na skutečnost, že všechny funkční hodnoty základních exponenciálních funkcí jsou kladné.

**Exponenciální funkce**

Exponenciální funkce je funkce typu , kde .

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  | 1 | 2 | 4 | 8 |



|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  | 1 | 3 | 9 | 27 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  | 1 | 5 | 25 | 125 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  | 1 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y | 9 |  | 1 |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| y |  |  | 1 |  |  |  |

x

x

y

y

**1**

**1**

Po (či během) nakreslení všech grafů by se měla rozvinout diskuse o tom, jaké zákonitosti lze vyčíst: ▪ pro je exponenciální funkce rostoucí, pro je klesající; ▪ každá exponenciála funkce typu prochází bodem ; ▪ poloha každé exponenciální křivky v soustavě souřadnic je dána základem mocniny *a.* Učitel může následně zadat úkol vkreslit bez pomoci tabulky do příslušných souřadnicových soustav grafy např. nebo . Pro studenty to bude sice snadný úkol, jistě ale přispěje k uvědomění si souvislosti mezi hodnotou základu mocniny *a* a polohou jedné exponenciály vůči ostatním.

**Logaritmická funkce**

Logaritmická funkce je funkce typu , kde .

Učitel musí nejprve vysvětlit studentům, co je to logaritmus. K vysvětlení může použít např. zápis:

základ

dané číslo

exponent

Čteme: 2 je logaritmus čísla 9 při základu 3

**Logaritmus** je **exponent**, na který musíme umocnit základ, abychom dostali dané číslo.

výměna jmen proměnných → inverzní funkce

exponenciální funkce

logaritmická funkce

x

x

y

y

1

1

1

1

Opět by měla proběhnout diskuse o souvislostech a zákonitostech: ▪ exponenciální a logaritmická funkce o stejném základu jsou vzájemně inverzní, jejich grafy jsou proto souměrné podle osy I. a III. kvadrantu; ▪ základ *a* logaritmické funkce musí splňovat stejné požadavky, jako základ funkce exponenciální - - tedy ; ▪ pro je logaritmická funkce rostoucí, pro je klesající; ▪ obě logaritmické křivky se nacházejí vpravo od osy *y*, odpovídají tedy pouze kladným argumentům - - existují pouze logaritmy kladných čísel (neexistují logaritmy záporných čísel ani nuly) ▪ každá logaritmická křivka funkce typu prochází bodem ; Učitel opět může studentům zadat úkol, aby načrtli bez pomoci tabulky do jedné souřadnicové soustavy grafy dvou funkcí a , do další soustavy souřadnic pak grafy a . Ani tento úkol by studentům neměl dělat problémy.

Základní poznatky

Př.1 Nakreslete grafy funkcí (můžete pro porovnání do jedné souřadnicové soustavy)



Př. 2 Sestrojte grafy funkcí (můžete pro porovnání do jedné souřadnicové soustavy)



Př. 3 Vypočítejte bez užití kalkulačky



b)



Př. 4 Vypočítejte bez použití kalkulačky



Typové příklady standardní náročnosti

Př. 5 Porovnejte s číslem 1 pomocí grafu vhodné funkce, tj. bez použití kalkulačky:



Met.: b)

1

x

y

0,2

1

Př. 6 Načrtněte grafy funkcí (určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky grafu s oběma souřadnicovými osami:

c)

Met.: Při kreslení grafů těchto funkcí si studenti znovu zopakují a ověří, že parametry vkládané postupně do rovnic funkcí mají na tvar a polohu jejich grafů v souřadnicové soustavě analogický vliv jako u dříve probraných funkcí.

x

y

1

-3

-4

-1

,

,

,

,

a), b)

-2

1

2

x´

y´

x

y

1

-1

-1

-2

-3

-4

-5

-6

,

,

,

, ,

1

2

e), g)

x´

y´

Pozn.: ▫ Určení definičních oborů i oborů funkčních hodnot i výpočty souřadnic průsečíků s osami jsou u těchto zadání tak jednoduché, že je lze provést zpaměti; ▫ Obratnost v kreslení podobných grafů je nesmírně důležitá např. i pro budoucí řešení exponenciálních a logaritmických nerovnic!!!

Př. 7 Určete, pro která r je funkce rostoucí:

Met.: Základ exponenciální funkce *f* je . Víme, že exponenciální funkce je rostoucí pro . Musíme tedy vyřešit nerovnici . …

Př. 8 Určete definiční obor funkce



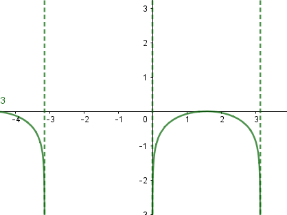
Met.: a) Argumentem logaritmické funkce musí být kladné číslo. Proto . … b) *f2*je složená funkce: , kde 1) , 2) , 3) . Pro každou funkci musí být splněny podmínky: 1) 2) 3) Všechny podmínky jsou splněny pro . Proto . Pozn.: Je velmi důležité takto precizně zpracovat řešení úlohy 8b), případně úloh podobných. ***Učitel musí využít každé příležitosti, aby studenty učil nespokojovat se s polovičatými a nepřesnými řešeními, aby je učil systematické, do detailu promyšlené, úplné a do všech podrobností dokončené, precizní práci.***

Př. 9 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce



Rozšiřující cvičení

Př. 10 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce



Poznámka:

Pro případné zadání exponenciálních nebo logaritmických funkcí v programech typu Geogebra nebo Wolframalpha.com a další použijte do příkazového řádku následující syntaxi:

* Exponenciální funkce f: y = 2^x
* Exponenciální funkce f: y = (1/2)^x-3
* Logaritmické funkce f: y = lg(x+1)
* Logaritmické funkce f: y = log(3, x)+1
* Logaritmické funkce f: y = 2ln(x)

Ve Wolframalpha si nastavte funkci reálné proměnné, tj. Real-valued plot, nikoliv Complex-valued plot.