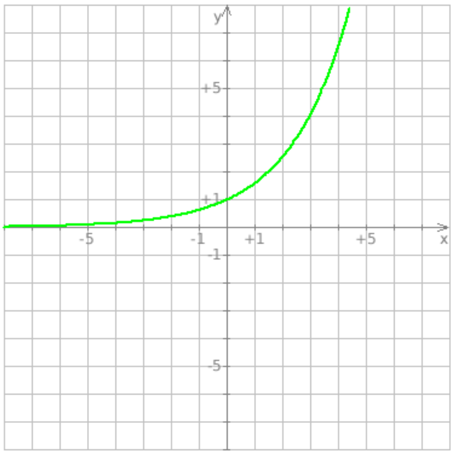
22 Exponenciální a logaritmické funkce – met.

Stručný přehled teorie

1) *Definice:*
   Nechť $a \in \boldsymbol{R}^{+} - \{1\}$. Funkce $\boldsymbol{f: y = a^x}$ se nazývá exponenciální funkce se základem *a*.

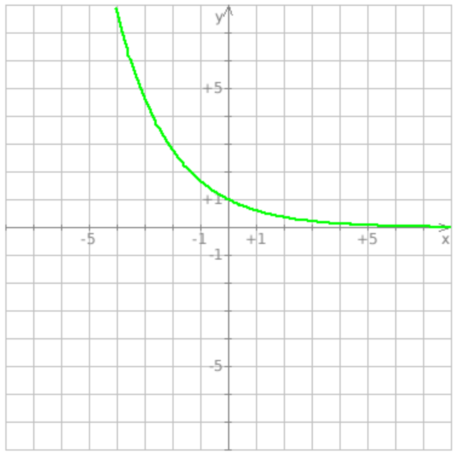
2) *Vlastnosti:*

a) pro $a > 1$



- $D(f) = \boldsymbol{R}$
- $H(f) = \boldsymbol{R}^{+}$
- Je rostoucí, a tedy prostá
- $f(0) = 1$
- *f* je spojitá v $\boldsymbol{R}$
- Je zdola omezená ($a^x > 0$), není shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa x je asymptotou grafu *f*

b) pro $0 < a < 1$



- $D(f) = \boldsymbol{R}$
- $H(f) = \boldsymbol{R}^{+}$
- Je klesající, a tedy prostá
- $f(0) = 1$
- *f* je spojitá v $\boldsymbol{R}$
- Je zdola omezená ($a^x > 0$), není shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa x je asymptotou grafu *f*

Logaritmická funkce

Logaritmus je exponent, na který musíme umocnit základ, abychom dostali dané číslo. Tedy:

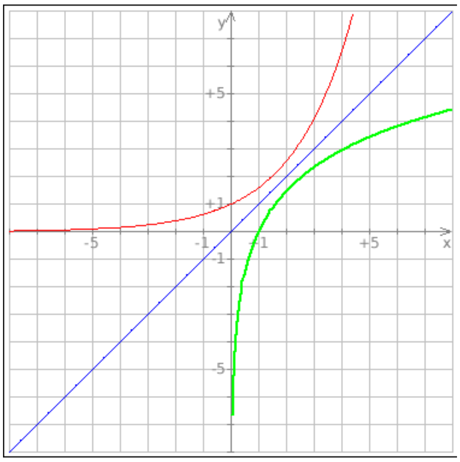
Je-li $\boxed{3^2 = 9}$, pak $\boxed{\log_3 9 = 2}$

1) *Definice:*
   Nechť $f: y = a^x$ je exponenciální funkce se základem $a \in \boldsymbol{R}^{+} - \{1\}$. Funkce *g*, inverzní k funkci *f*, se nazývá logaritmická funkce se základem *a*. Označujeme ji $\boldsymbol{g: y = \log_a x}$

   Pro $a = 10$ nazýváme hodnotu funkce dekadický neboli Briggsův logaritmus, pro $a = e$ přirozený logaritmus ($e \approx 2{,}718$ je Eulerova konstanta).

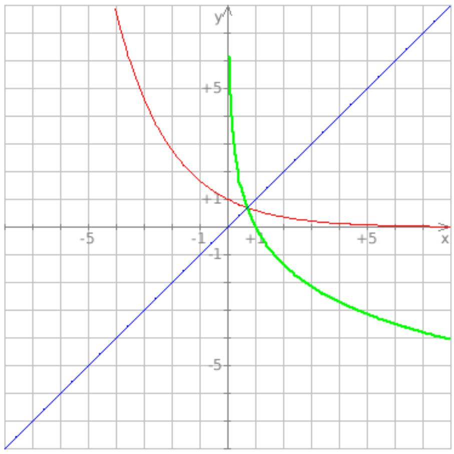
2) *Vlastnosti:*

a) pro *a > 1* (funkce *g* má zelený graf)



- *D (g)* = $\boldsymbol{R}^+$
- *H (g)* = $\boldsymbol{R}$
- Je rostoucí, a tedy prostá
- Není ani zdola omezená, ani shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa y je asymptotou grafu

b) pro *0 < a < 1* (funkce *g* má zelený graf)



- *D (g)* = $\boldsymbol{R}^+$
- *H (g)* = $\boldsymbol{R}$
- Je klesající, a tedy prostá
- Není ani zdola omezená, ani shora omezená
- Nemá ani maximum, ani minimum
- Osa y je asymptotou grafu

3) *Pravidla pro počítání s logaritmy:*

$$a^y = x \Leftrightarrow y = \log_a x$$

Pro každé a, b, c $\in$ $R^+ - \{1\}$, pro každé x_1, x_2 $\in$ R^+ a pro každé $r,n,y \in R$ platí:

1) $\log_a(x_1 . x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$

2) $\log_a \dfrac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2$

3) $\log_a x^r = r . \log_a x$

4) $\log_a \sqrt[n]{x} = \dfrac{1}{n} . \log_a x$

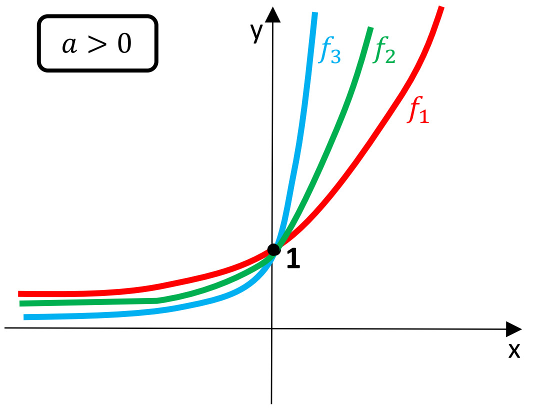
5) $\log_b a = \dfrac{\log_c a}{\log_c b}$

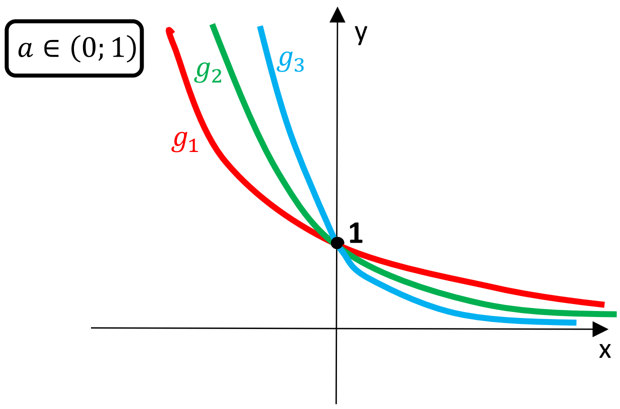
Met.: S exponenciální i logaritmickou funkcí se studenti setkávají poprvé. V běžném životě jistě všichni zaslechli zmíňku o „exponenciálním růstu“ nějaké veličiny, ale nejspíš s ním spojují pouze intuitivní představu strmého narůstání. Termín „logaritmus“ je pro drtivou většinu z nich zcela neznámý.

Učitel by měl studenty nejprve seznámit s exponenciální funkcí $f: y = a^x$, kde $a \in R^+ - \{1\}$. Může se nejprve krátce zmínit a zdůraznit zásadní rozdíl mezi funkcí mocninnou a exponenciální, kdy u mocninné funkce ($g: y = x^k$) se argument nachází v základu mocniny, zatímco u funkce exponenciální je argument součástí exponentu mocniny.
Vzhledem k tomu, že se exponenciální křivky podstatným způsobem liší pro $a > 0$ a pro $a \in (0; 1)$, měl by učitel rozvrhnout prostor na tabuli tak, aby umístil vedle sebe dvě souřadnicové soustavy, přičemž do jedné bude kreslit exponenciály funkcí s $a > 0$, do druhé pak s $a \in (0; 1)$. Kreslení grafů musí předcházet vytvoření tabulek, kterých využije nejen pro grafy, nýbrž i k nasměrování pozornosti studentů na skutečnost, že všechny funkční hodnoty základních exponenciálních funkcí jsou kladné.

Exponenciální funkce

Exponenciální funkce je funkce typu $\boxed{f: y = a^x, \text{ kde } a \in R^+ - \{1\}}$.





$f_1: y = 2^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

$f_2: y = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

$f_3: y = 5^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125

$g_1: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$g_2: y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

$g_3: y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	25	5	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$

Po (či během) nakreslení všech grafů by se měla rozvinout diskuse o tom, jaké zákonitosti lze vyčíst:

- pro $a > 0$ je exponenciální funkce rostoucí, pro $a \in (0; 1)$ je klesající;
- každá exponenciála funkce typu $f: y = a^x$ prochází bodem $[0; 1]$;
- poloha každé exponenciální křivky v soustavě souřadnic je dána základem mocniny *a*. Učitel může následně zadat úkol vkreslit bez pomoci tabulky do příslušných souřadnicových soustav grafy např. $h_1: y = 4{,}2^x$ nebo $h_2: y = \left(\frac{1}{15}\right)^x$. Pro studenty to bude sice snadný úkol, jistě ale přispěje k uvědomění si souvislosti mezi hodnotou základu mocniny *a* a polohou jedné exponenciály vůči ostatním.

Logaritmická funkce

Logaritmická funkce je funkce typu $\boxed{h: y = \log_a x, \text{kde } a \in R^+ - \{1\}}$.

Učitel musí nejprve vysvětlit studentům, co je to logaritmus. K vysvětlení může použít např. zápis:

$$\underbrace{9}_{\text{dané číslo}} = \underbrace{3}_{\text{základ}}^{\overset{\text{exponent}}{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad 2 = \log_3 9$$

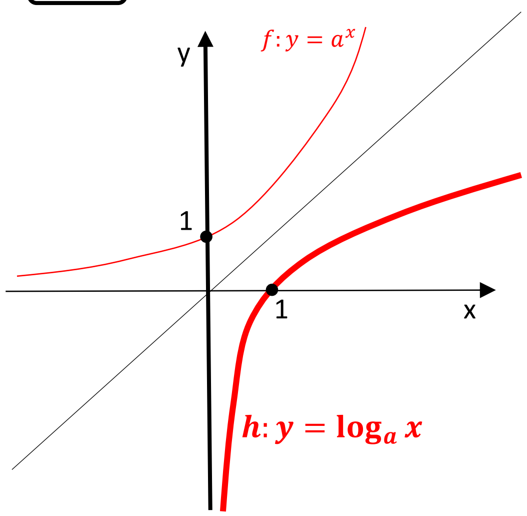
Čteme: $\boxed{\text{2 je logaritmus čísla 9 při základu 3}}$

Logaritmus je **exponent**, na který musíme umocnit základ, abychom dostali dané číslo.

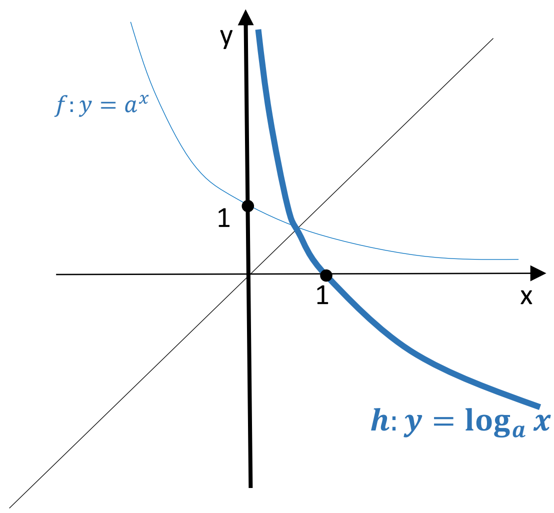
výměna jmen proměnných → inverzní funkce

$$\underbrace{\boxed{f: y = a^x}}_{\text{exponenciální funkce}} \Longrightarrow \boxed{f^{-1} = h: x = a^y} \Longrightarrow \underbrace{\boxed{h: y = \log_a x}}_{\text{logaritmická funkce}}$$

$\boxed{a > 0}$



$\boxed{a \in (0; 1)}$



Opět by měla proběhnout diskuse o souvislostech a zákonitostech:

- exponenciální a logaritmická funkce o stejném základu jsou vzájemně inverzní, jejich grafy jsou proto souměrné podle osy I. a III. kvadrantu;
- základ *a* logaritmické funkce musí splňovat stejné požadavky, jako základ funkce exponenciální - - tedy $a \in R^+ - \{1\}$;
- pro $a > 0$ je logaritmická funkce rostoucí, pro $a \in (0; 1)$ je klesající;
- obě logaritmické křivky se nacházejí vpravo od osy *y*, odpovídají tedy pouze kladným argumentům - - existují pouze logaritmy kladných čísel (neexistují logaritmy záporných čísel ani nuly)
- každá logaritmická křivka funkce typu $h: y = \log_a x$ prochází bodem $[1; 0]$;

Učitel opět může studentům zadat úkol, aby načrtli bez pomoci tabulky do jedné souřadnicové soustavy grafy dvou funkcí $h_1: y = \log_3 x$ a $h_2: y = \log_7 x$, do další soustavy souřadnic pak grafy $h_3: y = \log_{\frac{1}{2}} x$ a $h_4: y = \log_{\frac{1}{5}} x$. Ani tento úkol by studentům neměl dělat problémy.

Základní poznatky

Př.1 Nakreslete grafy funkcí (můžete pro porovnání do jedné souřadnicové soustavy)

a) $f_1 : y = \left(\frac{5}{2}\right)^x$ $\left[[0;1] \in f_1, \left[1;\frac{5}{2}\right] \in f_1, \left[-1;\frac{2}{5}\right] \in f_1, \dots\right]$

b) $f_2 : y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$ $\left[[0;1] \in f_2, \left[1;\frac{2}{5}\right] \in f_2, \left[-1;\frac{5}{2}\right] \in f_2, \dots\right]$

Př. 2 Sestrojte grafy funkcí (můžete pro porovnání do jedné souřadnicové soustavy)

a) $f_1 : y = \log_{\frac{5}{2}} x$ $\left[[1;0] \in f_1, \left[\frac{5}{2};1\right] \in f_1, \left[\frac{2}{5};-1\right] \in f_1, \dots\right]$

b) $f_2 : y = \log_{\frac{2}{5}} x$ $\left[[1;0] \in f_2, \left[\frac{2}{5};1\right] \in f_2, \left[\frac{5}{2};-1\right] \in f_2, \dots\right]$

Př. 3 Vypočítejte bez užití kalkulačky

a) $\log_3 243 + \log_4 \frac{1}{256} + \log_{0,2} 0{,}04$ $[3]$

b) $25^{\log_{25} 5} + 11^{\log_{11} 7}$ $[12]$

c) $\log_2 \log_3 81$ $[2]$

Př. 4 Vypočítejte bez použití kalkulačky

a) $2\log 4 + \log 3 - \log 6 + 1$ $[\log 80]$

b) $\ln 4 + \ln\frac{1}{3} - 2\left(\ln 2 + \ln\frac{1}{4}\right)$ $\left[\ln\frac{16}{3}\right]$

Typové příklady standardní náročnosti

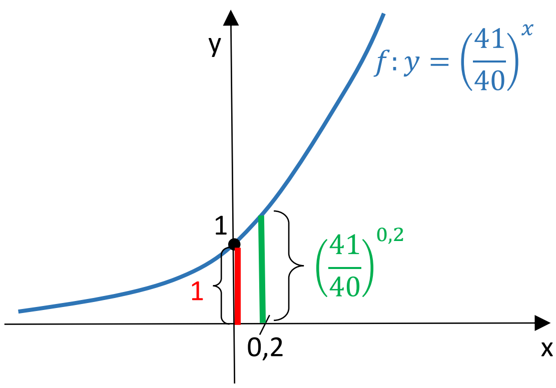
Př. 5 Porovnejte s číslem 1 pomocí grafu vhodné funkce, tj. bez použití kalkulačky:

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}$ $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}} < 1\right]$

b) $\left(\frac{41}{40}\right)^{0,2}$ $\left[\left(\frac{41}{40}\right)^{0,2} > 1\right]$

c) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2}$ $\left[\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-2} < 1\right]$

Met.: b)

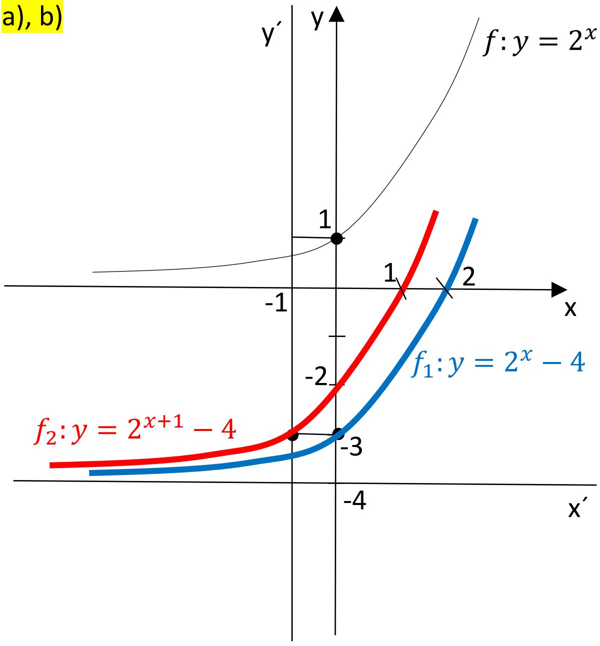


Př. 6 Načrtněte grafy funkcí (určete definiční obor, obor funkčních hodnot, průsečíky grafu s oběma souřadnicovými osami:

a) $f_1: y = 2^x - 4$
b) $f_2: y = 2^{x+1} - 4$
c) $f_3: y = 2^{|x+1|} - 4$
d) $f_4: y = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$
e) $g_1: y = \log_2(x+4)$
f) $g_2: y = |\log_2(x+4) - 1|$
g) $g_3: y = \log_2|x+4| - 1$
h) $g_4: y = \log_2(|x| + 4) - 1$

Met.: Při kreslení grafů těchto funkcí si studenti znovu zopakují a ověří, že parametry vkládané postupně do rovnic funkcí mají na tvar a polohu jejich grafů v souřadnicové soustavě analogický vliv jako u dříve probraných funkcí.

a), b)



$f_1: y = 2^x - 4$

$D_{(f_1)} = R,\ H_{(f_1)} = (-4; \infty)$

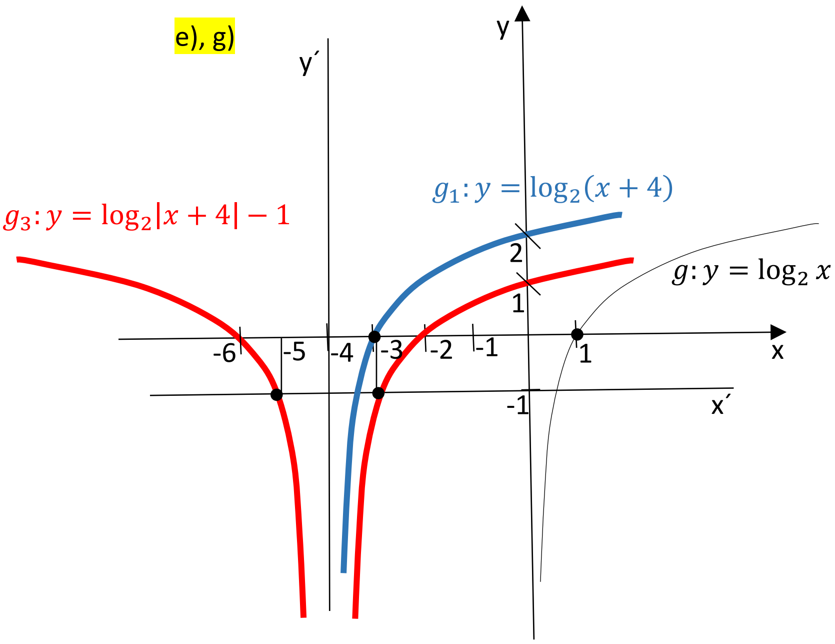
$P_x[2; 0],\ P_y[0; -3]$

$f_2: y = 2^{x+1} - 4$

$D_{(f_2)} = R,\ H_{(f_2)} = (-4; \infty)$

$P_x[1; 0],\ P_y[0; -2]$

e), g)



$g_1: y = \log_2(x+4)$

$D_{(g_1)} = (-4; \infty),\ H_{(g_1)} = R$

$P_x[-3; 0],\ P_y[0; 2]$

$g_3: y = \log_2|x+4| - 1$

$D_{(g_3)} = R - \{-4\},\ H_{(g_3)} = R$

$P_{x_1}[-6; 0],\ P_{x_2}[-2; 0],\ P_y[0; 1]$

Pozn.: ▫ Určení definičních oborů i oborů funkčních hodnot i výpočty souřadnic průsečíků s osami jsou u těchto zadání tak jednoduché, že je lze provést zpaměti;
▫ Obratnost v kreslení podobných grafů je nesmírně důležitá např. i pro budoucí řešení exponenciálních a logaritmických nerovnic!!!

Př. 7 Určete, pro která r je funkce rostoucí:

$f: y = \left(\frac{r-3}{r+2}\right)^x$ $[r \in (-\infty; -2)]$

Met.: Základ exponenciální funkce f je $a = \frac{r-3}{r+2}$. Víme, že exponenciální funkce je rostoucí pro $a > 1$. Musíme tedy vyřešit nerovnici $\frac{r-3}{r+2} > 1$. …

Př. 8 Určete definiční obor funkce

a) $f_1: y = log\ (x^2 - 5x + 6)$ $[D(f_1) = (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)]$

b) $f_2: y = \sqrt{\log \log x}$ $[D(f_2) = \langle 10;\ \infty)]$

Met.: a) Argumentem logaritmické funkce musí být kladné číslo. Proto $x^2 - 5x + 6 > 0$. …

b) f_2 je složená funkce: $f_2(x) = f\left(g\left(h(x)\right)\right)$, kde $\boxed{1)}$ $y = h(x) = \log x$, $\boxed{2)}$ $z = g(y) = \log y$, $\boxed{3)}$ $f_2(x) = f(z) = \sqrt{z}$.

Pro každou funkci musí být splněny podmínky:

1) $\boxed{x > 0}$
2) $y > 0 \rightarrow \log x > 0 \rightarrow \boxed{x > 1}$
3) $z \geq 0 \rightarrow \log y \geq 0 \rightarrow y \geq 1 \rightarrow \log x \geq 1 \rightarrow \boxed{x \geq 10}$

Všechny podmínky jsou splněny pro $x \geq 10$. Proto $D(f_2) = \langle 10;\ \infty)$.

Pozn.: Je velmi důležité takto precizně zpracovat řešení úlohy 8b), případně úloh podobných.
Učitel musí využít každé příležitosti, aby studenty učil nespokojovat se s polovičatými a nepřesnými řešeními, aby je učil systematické, do detailu promyšlené, úplné a do všech podrobností dokončené, precizní práci.

Př. 9 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

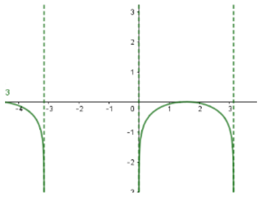
a) $f_1: y = log\ (x+3) - 2$ $\left[\begin{array}{c} D(f_1) = (-3; \infty), H(f_1) = R \\ [0;0] \rightarrow [-3;-2], [1;0] \rightarrow [-2;-2] \end{array}\right]$

b) $f_2: y = log\ (-x+3) + 4$ $\left[\begin{array}{c} D(f_2) = (-\infty; 3), H(f_2) = R \\ [0;0] \rightarrow [3;4], [1;0] \rightarrow [2;4] \end{array}\right]$

Rozšiřující cvičení

Př. 10 Určete definiční obor, obor hodnot a načrtněte graf funkce

$f: y = \log \sin x$ $\quad\quad [D(f) = (2k\pi; \pi(2k+1)), H(f) = (-\infty; 0\rangle]$



Poznámka:

Pro případné zadání exponenciálních nebo logaritmických funkcí v programech typu Geogebra nebo Wolframalpha.com a další použijte do příkazového řádku následující syntaxi:

- Exponenciální funkce $f: y = 2^x$ f: y = 2^x
- Exponenciální funkce $f: y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$ f: y = (1/2)^x-3
- Logaritmické funkce $f: y = \log(x+1)$ f: y = lg(x+1)
- Logaritmické funkce $f: y = \log_3 x + 1$ f: y = log(3, x)+1
- Logaritmické funkce $f: y = 2\ln x$ f: y = 2ln(x)

Ve Wolframalpha si nastavte funkci reálné proměnné, tj. Real-valued plot, nikoliv Complex-valued plot.