23 Exponenciální a logaritmické rovnice – met.

Stručný přehled teorie

- obsahuje neznámou v exponentu některé mocniny
- základní tvar: , $\boldsymbol{a > 0, b > 0, x \in R}$
- řešení: a) Je-li $\boldsymbol{a = b \neq 1,}$ pak $\boldsymbol{f(x) = g(x)}$ (rovnají-li se základy mocnin, rovnají se i exponenty)
  b) Je-li $\boldsymbol{a \neq b}$, použijeme logaritmování: $\boldsymbol{f(x).\log_c a = g(x).\log_c b}$, (kde $c \in R^+ - \{1\}$)

Pozn.: Složitější exp. rovnice se řeší převedením na základní tvar, popřípadě na algebraickou rovnici (s častým použitím substituce $a^x = y$ *(a > 0, a ≠ 1)*).

- obsahuje logaritmy výrazů s neznámou $x \in \boldsymbol{R}$
- nejjednodušší tvar: ***a > 0, a ≠ 1, b*** $\in$ ***R*** (její řešení podle definice logaritmu je $x = a^b$)
- řešení na základě věty: Jestliže $\boldsymbol{\log_a f(x) = \log_a g(x)}$, kde ***a > 0, a ≠ 1***, pak ***f(x) = g(x)*** (rovnají-li se logaritmy dvou kladných čísel o stejném základu, rovnají se i tato čísla)

Pozn.: 1) Platnost předchozí věty je podmíněna splněním podmínek $f(x) > 0$ a $g(x) > 0$. Pokud je nestanovíme předem, zkouška je nutnou součástí řešení.

2) Složitější log. rovnice - řešení často usnadňuje vhodná substituce (např. $y = \log_a x$ *(a > 0, a ≠ 1)*) a převod rovnice z log. na algebraickou.

- <u>Věty o logaritmech:</u> Nechť $a > 0, a \neq 1, x > 0,\ x_1 > 0,\ x_2 > 0, r \in \boldsymbol{R}, n \in \boldsymbol{N}$

1) $log_a(x_1.x_2) = log_a x_1 + log_a x_2$
2) $log_a \frac{x_1}{x_2} = log_a x_1 - log_a x_2$
3) $log_a x^r = r.log_a x$
4) $log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}.log_a x$
5) $log_b a = \frac{log_c a}{log_c b}$, kde *a* > 0, *b* > 0, *b* ≠ 1, *c* > 0, *c* ≠ 1

Pozn.: Velký význam věty 5! - Umožňuje převod logaritmu při jednom základu na logaritmus při jiném základu! (Při řešení log. rovnic je často třeba dosáhnout toho, aby všechny logaritmy v rovnici měly stejný základ!)

Met.: Hned v úvodu tohoto tématu by měl učitel studentům zdůraznit, jak nesmírně důležitá bude pro úspěšné zvládání exponenciálních a logaritmických rovnic a nerovnic znalost pravidel pro počítání s mocninami a odmocninami a také znalost pravidel pro práci s logaritmy.
Užití všech těchto pravidel bude vzápětí demonstrovat při ukázkách řešení různých typů exponenciálních a logaritmických rovnic. Je dobré zapojit hned od začátku do diskuse o jednotlivých krocích řešení celou třídu.
Řešení některých rovnic lze zjednodušit použitím vhodných „umělých“ úprav. Nazve-li učitel tyto úpravy „fintami“, studenti je obvykle velmi rádi přijmou jako dobré prostředky pro svá malá vítězství nad matematikou a někteří z nich se začnou pokoušet hledat ve vhodných úlohách další finty 😊.
Učitel musí dbát na správnost, přehlednost a úplnost zápisů na tabuli. Pro většinu studentů jsou tyto zápisy vzorem, podle kterého provádějí vlastní zápisy do sešitu. I drobnosti, které se učiteli zdají být tak samozřejmé, že má tendenci je pouze konstatovat, ale na tabuli nenapsat, mohou být pro studenty nesmírně důležité.

$\boxed{4.2^{x^2} = 2^{3x}}$

$2^{2+x^2} = 2^{3x}$

$x^2 + 2 = 3x$

$x^2 - 3x + 2 = 0$

$(x-2).(x-1) = 0$

$K = \{1; 2\}$

$\boxed{2^{2x}.5^x - 2^{2x-1}.5^{x+1} = -600}$

$4^x.5^x - \frac{4^x}{2}.5.5^x = -600$

$20^x - \frac{5}{2}.20^x = -600$

$\frac{3}{2}.20^x = 600$

$20^x = 400 \rightarrow \quad x = 2$

$K = \{2\}$

$\boxed{2^x - 3^x = 2^{x-1} + 5.3^{x-1}}$

$2^x - \frac{2^x}{2} = 3^x + 5.\frac{3^x}{3}$

$\frac{2^x}{2} = 3^x.\frac{8}{3}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{16}{3}$

První způsob určení *x*: *logaritmování* (obě strany rovnice jsou kladné)

$x.\log\frac{2}{3} = \log\frac{16}{3} \quad \rightarrow \quad x = \frac{\log\frac{16}{3}}{\log\frac{2}{3}} = \log_{\frac{2}{3}}\frac{16}{3}$ $\qquad K = \left\{\log_{\frac{2}{3}}\frac{16}{3}\right\}$

$\boxed{6.7^{x+3} - 7^{x+2} = 82}$

$6.7.7^2.7^x - 7^2.7^x = 82 \ /:7^2$

$42.7^x - 7^x = \frac{82}{49}$

$41.7^x = \frac{82}{49} \ /:41$

$7^x = \frac{2}{49}$

Druhý způsob určení *x*: *užitím definice logaritmu* $\qquad x = \log_7\frac{2}{49}$ $\qquad K = \left\{\log_7\frac{2}{49}\right\}$

$\boxed{4^x - 9.2^x + 8 = 0}$ Subst.: $\boxed{2^x = y}$, $\boxed{4^x = (2^2)^x = (2^x)^2 = y^2}$

$y^2 - 9y + 8 = 0$

$(y-1).(y-8) = 0$

$y = 1 \ \vee \ \ y = 8$

$2^x = 1 \ \vee \ \ 2^x = 8$

$x = 0 \ \vee x = 3$ $K = \{0; 3\}$

$\boxed{3^{x+1} + 2.3^{-x} = 7}$

$3.3^x + \frac{2}{3^x} = 7$ Subst.: $3^x = y$

$3y + \frac{2}{y} = 7$ /.y

$3y^2 - 7y + 2 = 0$

$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = < \begin{matrix} 2 \\ \frac{1}{3} \end{matrix}$

$3^x = 2 \ \ \vee \ \ 3^x = \frac{1}{3}$

$x = \log_3 2 \ \ \vee \ \ x = -1$ $K = \{-1;\ \log_3 2\}$

$\boxed{7.6^x - 2.4^x = 6.9^x}$ / .... (výše zmíněná – vede k úpravě rovnice, v níž budou mít všechny mocniny s neznámou v exponentu stejný základ).

$7\left(\frac{2}{3}\right)^x - 2.\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 6$ Subst.: $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$

$2y^2 - 7y + 6 = 0$

$y_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = < \begin{matrix} 2 \\ \frac{3}{2} \end{matrix}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 2 \ \ \vee \ \ \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{3}{2}$

$x = \log_{\frac{2}{3}} 2 \ \ \vee \ x = -1$

$K = \left\{-1;\ \log_{\frac{2}{3}} 2\right\}$

Pozn.: Učitel dosud stále zdůrazňoval, že rovnici nelze dělit výrazem s neznámou bez rozebrání situace, kdy se tento výraz rovná nule. Někdo ze studentů se na to teď může zeptat, případně učitel může položit otázku „Co když bude $9^x = 0$?“.
V ideálním případě zareagují studenti tvrzením podpořeným podobou exponenciály $f: y = 9^x$, že $\forall x \in R: 9^x > 0$.

$\boxed{\begin{matrix} 4^{x+y} = 128 \\ 5^{3x-2y-3} = 1 \end{matrix}}$

$2(x+y) = 7$

$3x - 2y - 3 = 0$

$2x + 2y = 7$

$3x - 2y = 3$

$5x = 10 \ \rightarrow \ x = 2 \ \rightarrow \ y = \frac{3}{2}$ $K = \left\{\left[2; \frac{3}{2}\right]\right\}$

$$\boxed{\begin{aligned} 2.2^{x-y} + 2^{x+y-1} &= 20 \\ 10.2^{x-y-1} - 2^{x+y} &= -22 \end{aligned}}$$

Subst.: $2^{x-y} = a$

$2^{x+y} = b$

$$2a + \frac{b}{2} = 20 \quad /.2$$
$$10\frac{a}{2} - b = -22$$
$$4a + b = 40$$
$$5a - b = -22$$
$$9a = 18 \ \rightarrow a = 2 \ \rightarrow b = 32 \ \Longrightarrow \ 2^{x-y} = 2, \ 2^{x+y} = 2^5 \ \Longrightarrow \ x - y = 1, \ x + y = 5$$
$$2x = 6 \ \rightarrow x = 3 \ \rightarrow \ y = 2$$

$K = \{[3;2]\}$

U logaritmických rovnic musíme počítat s celou řadou podmínek, které musí být splněny, aby měly rovnice smysl. Pokud najdeme všechny podmínky, dokážeme je úplně zpracovat a během výpočtů neprovedeme žádnou neekvivalentní úpravu, pak nemusíme pro potenciální kořeny, které s podmínkami nekolidují, provádět zkoušku. V opačném případě je zkouška nezbytnou součástí řešení.

$$\boxed{\log_2(x+1) = 3}$$
$$x + 1 = 2^3$$
$$x = 7$$

Podm.: $x + 1 > 0$

$x > -1$

$K = \{7\}$

$$\boxed{\log_{\frac{1}{2}}(2-x) = -2}$$
$$2 - x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$
$$2 - x = 4$$
$$x = -2$$

Podm.: $2 - x > 0$

$x < 0$

$K = \{-2\}$

$$\boxed{\log_8 \sqrt{x+30} + \log_8 \sqrt{x} = 1}$$
$$\log_8 \sqrt{(x+30).x} = 1$$
$$\sqrt{(x+30).x} = 8 \quad /^2$$ ekvivalentní úprava
$$x^2 + 30x - 64 = 0$$
$$(x+32).(x-2) = 0$$
$$\cancel{x = -32} \ \vee \ \underline{\underline{x = 2}}$$

neodpovídá podmínkám

Podm.: 1) $x + 30 > 0 \ \rightarrow x > -30$

2) $x > 0$

$\Big\}\ x > 0$

$K = \{2\}$

$\boxed{\log_9\{3\log_2[1+\log_3(1-2\log_3 x)]\} = 0{,}5}$

$3\log_2[1+\log_3(1-2\log_3 x)] = 9^{0,5} = 3$

$\log_2[1+\log_3(1-2\log_3 x)] = 1$

$1+\log_3(1-2\log_3 x) = 2$

$\log_3(1-2\log_3 x) = 1$

$1-2\log_3 x = 3$

$\log_3 x = -1$

$x = \frac{1}{3}$

Podm.: $x > 0$.

Dalších podmínek je řada, např. $1-2\log_3 x > 0$, $1+\log_3(1-2\log_3 x) > 0$, …

Výpočty podmínek komplikované – nedořešíme je a raději na závěr provedeme zkoušku.

Zkouška: $L_{\left(\frac{1}{3}\right)} = \log_9\left\{3\log_2\left[1+\log_3\left(1-2\log_3\frac{1}{3}\right)\right]\right\} = \log_9\{3\log_2[1+\log_3(1-2(-1))]\} =$

$= \log_9\{3\log_2[1+\log_3 3]\} = \log_9\{3\log_2[1+1]\} = \log_9\{3\log_2 2\} = \log_9\{3.1\} = \log_9 3 = 0{,}5$

$P_{\left(\frac{1}{3}\right)} = 0{,}5$

$L_{\left(\frac{1}{3}\right)} = P_{\left(\frac{1}{3}\right)}$ $\qquad K = \left\{\frac{1}{3}\right\}$

$\boxed{\log(x+1)+\log(x-1)-\log(x-2) = \log 8}$

Podm.: 1) $x+1>0 \rightarrow x > -1$

2) $x-1>0 \rightarrow x > 1$

3) $x-2>0 \rightarrow x > 2$

$\Rightarrow x > 2$

$\log\frac{(x+1).(x-1)}{x-2} = \log 8$

$\frac{x^2-1}{x-2} = 8$

$x^2 - 8x + 15 = 0$

$(x-3).(x-5) = 0$

$x = 3 \;\vee\; x = 5 \quad \Longrightarrow \quad K = \{3;5\}$

$\boxed{\log_5(2x+9)+\log_5(4-3x) = \; + \log_5(4+x)}$

$\log_5(2x+9)+\log_5(4-3x) = \; + \log_5(4+x)$

$\log_5(2x+9).(4-3x) = \log_5 25.(4+x)$

$-6x^2 - 19x + 36 = 100 + 25x$

$6x^2 + 44x + 64 = 0$

$3x^2 + 22x + 32 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-22\pm\sqrt{484-384}}{6} = \frac{-22\pm 10}{6} = < \begin{matrix} -2 \\ \cancel{-\frac{16}{3}} \end{matrix}$ neodpovídá podmínkám

Podm.: 1) $2x+9>0 \rightarrow x > -\frac{9}{2}$

2) $4-3x>0 \rightarrow x < \frac{4}{3}$

3) $4+x>0 \rightarrow x > -4$

$x \in \left(-4;\frac{4}{3}\right)$

$K = \{-2\}$

$\boxed{\frac{1}{\log x+1} + \frac{6}{\log x+5} = 1}$ Subst.: $\log x = y$

$\frac{1}{y+1} + \frac{6}{y+5} = 1 \quad /.(y+1).(y+5)$

$y + 5 + 6y + 6 = y^2 + 6y + 5$

$y^2 - y - 6 = 0$

$(y-3).(y+2) = 0$

$y = 3 \quad \vee \quad y = -2$

$\log x = 3 \quad \vee \quad \log x = -2$

$x = 1000 \quad \vee \quad x = \frac{1}{100}$ $\quad K = \left\{\frac{1}{100}; 1000\right\}$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $\log x + 1 \neq 0 \rightarrow \log x \neq -1 \rightarrow x \neq \frac{1}{10}$

3) $\log x + 5 \neq 0 \rightarrow \log x \neq -5 \rightarrow x \neq \frac{1}{10^5}$

$x \in (0; \infty) - \left\{\frac{1}{10}; \frac{1}{10^5}\right\}$

Pozor! Na podmínky 2), 3) studenti zapomínají ...

$\boxed{\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}}$

$3.\log x + 2 = \frac{10}{2.\log x}$ Subst.: $\log x = y$

$3.y + 2 = \frac{10}{2.y} \quad /.y$

$3y^2 + 2y - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad y_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{6} = < \begin{matrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{matrix}$

1) $\log x = 1 \rightarrow x = 10$ 2) $\log x = -\frac{5}{3} \rightarrow x = 10^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10^5}} = \frac{1}{10.\sqrt[3]{10^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{10}}{100}$ $\quad K = \left\{10; \frac{\sqrt[3]{10}}{100}\right\}$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $\log x \neq 0 \rightarrow \log x \neq 1$

$x \in (0; \infty) - \{1\}$

$\boxed{\log^2 x - \log x^4 + 3 = 0}$

$(\log x)^2 - 4\log x + 3 = 0$ Subst.: $\log x = y$

$y^2 - 4y + 3 = 0$

$(y-1)(y-3) = 0$

1) $\log x = 1 \rightarrow x = 10$ 2) $\log x = 3 \rightarrow x = 1000$ $\quad K = \{10; 1000\}$

Podm.: $x > 0$

V této úloze je třeba věnovat velkou pozornost exponentům – rozlišovat, kdy jde o umocnění funkce a kdy o umocnění jejího argumentu!!!

$\boxed{\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{8} - 1}}$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $\underbrace{\log_2 \frac{x}{8} \neq 1 \rightarrow \frac{x}{8} \neq 2 \rightarrow x \neq 16}_{x \in (0;\infty) - \{16\}}$

$\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{4}\cdot\frac{1}{2} - 1}$ Subst.: $\log_2 \frac{x}{4} = y$

$$\log_2 \frac{x}{4} = \frac{15}{\log_2 \frac{x}{4} + \log_2 2^{-1} - 1}$$

$y = \frac{15}{y-1-1}$

$y^2 - 2y - 15 = 0$

$(y-5).(y+3) = 0$

1) $\log_2 \frac{x}{4} = -3 \rightarrow \frac{x}{4} = \frac{1}{8} \rightarrow x = \frac{1}{2}$ 2) $\log_2 \frac{x}{4} = 5 \rightarrow \frac{x}{4} = 32 \rightarrow x = 128$ $K = \left\{\frac{1}{2}; 128\right\}$

$\boxed{x^{\log x} = 1000x^2}$ / logaritmujeme

Podm.: $x > 0$

$\log x^{\log x} = \log 1000x^2$

$(\log x)^2 = \log 1000 + \log x^2$ Subst.: $\log x = y$

$y^2 - 2y - 3 = 0$

$(y-3).(y+1) = 0$

1) $\log x = -1 \rightarrow x = \frac{1}{10}$ 2) $\log x = 3 \rightarrow x = 1000$ $K = \left\{\frac{1}{10}; 1000\right\}$

$\boxed{2\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 9}$

Podm.: $x > 0$

$2\log_2 x + \frac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} + \frac{\log_2 x}{\log_2 \frac{1}{2}} = 9$ Subst.: $\log_2 x = y$

$2y + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{y}{-1} = 9$

$3y = 9 \rightarrow y = 3 \rightarrow \log_2 x = 3 \rightarrow x = 8$ $K = \{8\}$

$\boxed{\log_x 4 + \log_4 x = \log_2 x}$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $x \neq 1$

$x \in (0;\infty) - \{1\}$

$\frac{\log_2 4}{\log_2 x} + \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = \log_2 x$ Subst.: $\log_2 x = y$

$\frac{2}{y} + \frac{y}{2} = y$ $/ .2y$

$4 + y^2 = 2y^2$

$y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2$

1) $\log_2 x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{4}$ 2) $\log_2 x = 2 \rightarrow x = 4$ $K = \left\{\frac{1}{4}; 4\right\}$

$$\boxed{\log_5^2 x + \log_{5x}\frac{5}{x} = 1}$$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $5x \neq 1$

$x \in (0;\infty) - \left\{\frac{1}{5}\right\}$

$$\log_5^2 x + \frac{\log_5 \frac{5}{x}}{\log_5 5x} = 1$$

$$\log_5^2 x + \frac{\log_5 5 - \log_5 x}{\log_5 5 + \log_5 x} = 1 \qquad \text{Subst.: } \log_5 x = y$$

$$y^2 + \frac{1-y}{1+y} = 1 \quad /.(1+y)$$

$$y^3 + y^2 + 1 - y = 1 + y$$

$$y^3 + y^2 - 2y = 0$$

$$y(y^2 + y - 2) = 0$$

$$y = 0 \ \vee \ (y+2).(y-1) = 0$$

$$y = 0 \ \vee \ y = -2 \ \vee \ y = 1$$

1) $\log_5 x = 0 \rightarrow x = 1$ 2) $\log_5 x = -2 \rightarrow x = \frac{1}{25}$ 3) $\log_5 x = 1 \rightarrow x = 5$ $K = \left\{\frac{1}{25}; 1; 5\right\}$

$$\boxed{\begin{array}{l} \log_3 x + \log_9 y = \frac{3}{2} \\ \log_x 3 + \log_y 9 = 3 \end{array}}$$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $x \neq 1$ $x \in (0;\infty) - \{1\}$

3) $y > 0$

4) $y \neq 1$ $y \in (0;\infty) - \{1\}$

$$\frac{\log_3 x}{\log_3 3} + \frac{\log_3 y}{\log_3 9} = \frac{3}{2} \qquad \text{Subst.: } \log_3 x = a$$

$$\frac{\log_3 3}{\log_3 3} + \frac{\log_3 9}{\log_3 y} = 3 \qquad \log_3 y = b$$

$$a + \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{3-b}{2}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 3$$

$$\frac{2}{3-b} + \frac{2}{b} = 3 \quad /.(3-b).b$$

$$2b + 6 - 2b = 9b - 3b^2$$

$$b^2 - 3b + 2 = 0$$

$$(b-1).(b-2) = 0$$

$$b = 1 \vee b = 2$$

1) $b = \log_3 y = 1 \rightarrow \ y = 3$

$a = \dfrac{3-b}{2} = 1 = \log_3 x \ \rightarrow \ x = 3$

2) $b = \log_3 y = 2 \rightarrow \ y = 9$

$a = \frac{3-b}{2} = \frac{1}{2} = \log_3 x \ \rightarrow \ x = \sqrt{3}$

$K = \{[3;\ 3], [\sqrt{3}; 9]\}$

$$\boxed{\begin{aligned} 5^{\log x} + 3^{\log y} &= 4 \\ 5^{2\log x} - 3^{2\log y} &= -8 \end{aligned}}$$

Subst.: $5^{\log x} = a;\ \ 3^{\log y} = b$

Podm.: $x > 0$

$y > 0$

$a + b = 4$

$a^2 - b^2 = -8$

$(a+b).(a-b) = -8 \Longrightarrow 4.(a-b) = -8 \Longrightarrow a - b = -2$

$a + b = 4$

$a - b = -2$

$a = 1;\quad b = 3$

$5^{\log x} = 1 \ \rightarrow\ \log x = 0 \ \rightarrow\ x = 1\,;$

$3^{\log y} = 3 \ \rightarrow\ \log y = 1 \ \rightarrow\ y = 10$

$K = \{[1; 10]\}$

K řešení využíváme zejména

- ekvivalentní úpravy nerovnic;
- vlastnosti exponenciálních funkcí (zejména monotónnost –
  - připomeňme: nechť *f: y = a^x^*. Pak pro $\square$ *je f* $\square$ *pro* $\square$ *je f* $\square$
- u složitějších nerovnic i substituci.

$$\boxed{0{,}01^{x+3} < \sqrt{10}}$$

$10^{-2.(x+3)}\ \square\ 10^{\frac{1}{2}}$ $\square$ $\rightarrow$ *exponenciální funkce využívaná při řešení je* $\square$

$-2x - 6\ \square\ \frac{1}{2}\ \ /.2$

$-4x - 12 < 1$

$-4x < 13\ \ /:(-4)$

$x > -\frac{13}{4}$

$K = \left(-\frac{13}{4};\ \infty\right)$

$$\boxed{\frac{1}{2^{x^2}}.4^{x+1} < \frac{1}{64}}$$

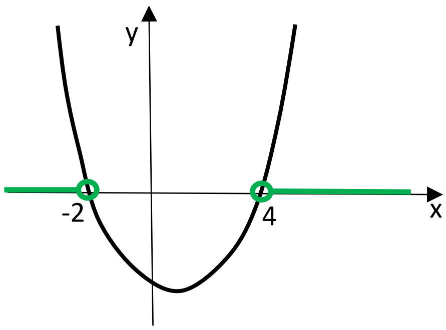
$2^{-x^2+2x+2}\ \square\ 2^{-6}$ $\square$

$-x^2 + 2x + 8\ \square\ 0$

$x^2 - 2x - 8 > 0$

$(x+2).(x-4) > 0$

$K = (-\infty;\ -2) \cup (4;\ \infty)$



$$\boxed{0{,}2^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5}$$

1. způsob $(5^{-1})^{\frac{2x-3}{x-2}} > 5$

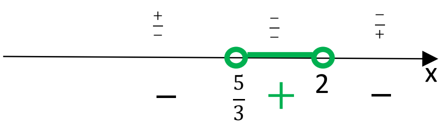
$5^{\frac{3-2x}{x-2}}\ \square\ 5$ $\square$

$\frac{3-2x}{x-2}\ \square\ 1$

$\frac{3-2x}{x-2} - 1 > 0$

$\frac{5-3x}{x-2} > 0$

$K = \left(\frac{5}{3};\ 2\right)$



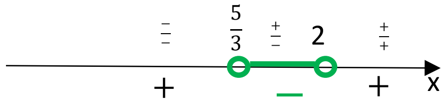
2. způsob $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x-3}{x-2}}$ [redacted] $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ [redacted] $\rightarrow$ *exponenciální funkce využívaná při řešení je* [redacted]

$\frac{2x-3}{x-2}$ [redacted] -1

$\frac{2x-3}{x-2}+1<0$

$\frac{3x-5}{x-2}<0$

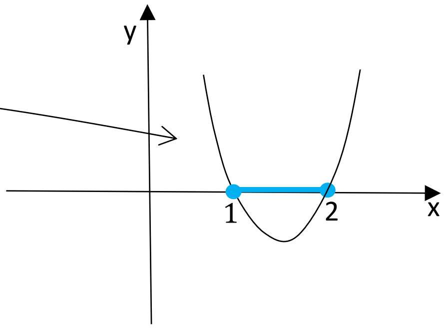
$K=\left(\frac{5}{3};\ 2\right)$



$\boxed{4^x-3.2^x+2\leq 0}$ Subst.: $2^x=y$; $4^x=y^2$

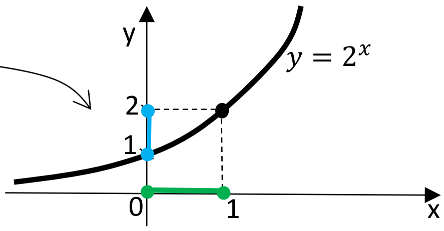
$y^2-3y+2\leq 0$

$(y-1).(y-2)\leq 0$



$y\in\langle 1;\ 2\rangle$

$2^x\in\langle 1;\ 2\rangle$



$K=\langle 0;\ 1\rangle$

$\boxed{\frac{1}{2^x+2}\geq\frac{2^x}{2^x-1}}$ Subst.: $2^x=y$

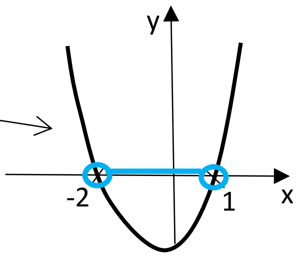
$\frac{1}{y+2}\geq\frac{y}{y-1}$

$\frac{1}{y+2}-\frac{y}{y-1}\geq 0$

$\frac{y-1-y^2-2y}{(y+2).(y-1)}\geq 0$

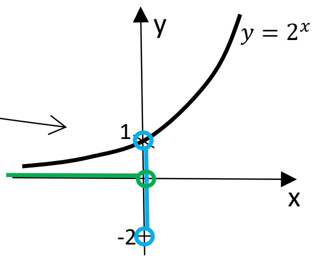
$\frac{-(y^2+y+1)}{(y+2).(y-1)}\geq 0$ ... $\forall y\in R: y^2+y+1>0, proto\ -(y^2+y+1)<0$

$(y+2).(y-1)<0$



$y\in(-2;1)$

$2^x\in(-2;1)$



$K=(-\infty;0)$

$\log_7 \frac{2x-6}{2x-1}$ 0

$\frac{2x-6}{2x-1}$ 7^0

$\frac{2x-6}{2x-1} - 1 > 0$

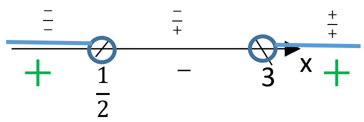
$\frac{2x-6-2x+1}{2x-1} > 0$

$\frac{-5}{2x-1} > 0$

$2x - 1 < 0$

$x < \frac{1}{2} \rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

Podm.: $\frac{2x-6}{2x-1} > 0$



$x \in \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup (3; \infty)$

$K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$

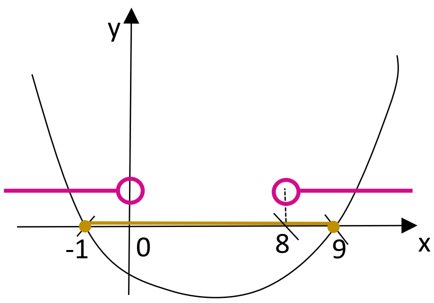
$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x) + 2 \geq 0$

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 8x)$ -2

$x^2 - 8x$ $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

$x^2 - 8x - 9 \leq 0$

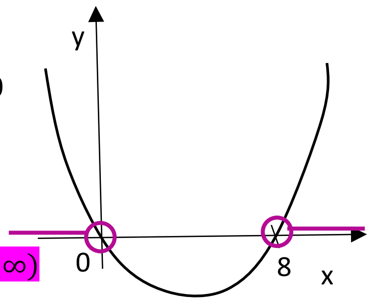
$(x+1).(x-9) \leq 0$



$x \in \langle -1;\ 9\rangle$

Podm.: $x^2 - 8x > 0$

$x.(x-8) > 0$



$x \in (-\infty; 0) \cup (8; \infty)$

$K = \langle -1; 0) \cup (8; 9\rangle$

$\boxed{\log_{\frac{1}{5}} \log_4(x^2-5) \quad 0}$

$\log_4(x^2-5) \quad \left(\frac{1}{5}\right)^0$

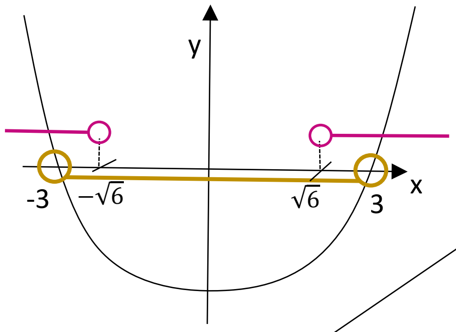
$\log_4(x^2-5) \quad 1$

$x^2-5 \quad 4$

$x^2-9<0$

$(x+3).(x-3)<0$

$\boxed{x \in (-3;3)}$



Podm.: 1) $x^2-5>0$

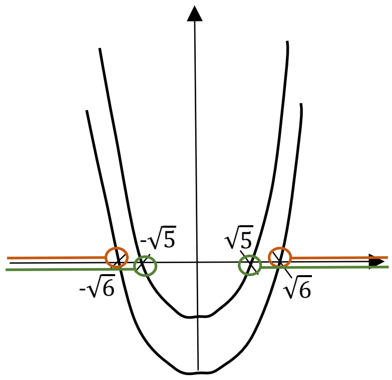
$\boxed{x \in \left(-\infty;-\sqrt{5}\right) \cup \left(\sqrt{5};\infty\right)}$

2) $\log_4(x^2-5) \quad 0$

$x^2-5 \quad 4^0$

$x^2-6>0$

$\boxed{x \in \left(-\infty;-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6};\infty\right)}$



$x \in \left(-\infty;-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6};\infty\right)$

$K=\left(-3;-\sqrt{6}\right) \cup \left(\sqrt{6};3\right)$

$\boxed{\log_{20}(x^2-3x) \leq \log_{20} x + \log_{20} 5}$

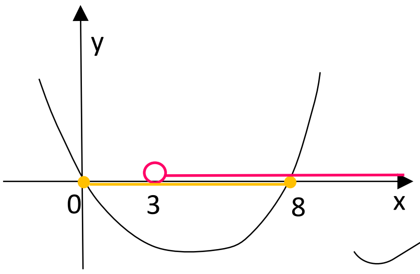
$\log_{20}(x^2-3x) \quad \log_{20} 5x$

$x^2-3x \quad 5x$

$x^2-8x \leq 0$

$x.(x-8) \leq 0$

$\boxed{x \in \langle 0;8 \rangle}$



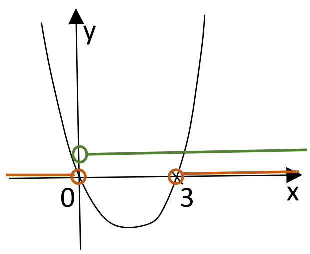
Podm.: 1) $x^2-3x>0$

$x.(x-3)>0$

$\boxed{x \in (-\infty;0) \cup (3;\infty)}$

$\boxed{2)\ x>0}$

$x \in (3;\infty)$



$K=(3;8\rangle$

$\boxed{\frac{1-\log x}{2+\log x} \geq 1}$ Subst.: $\log x = y$

Podm.: 1) $x > 0$

2) $\log x \neq -2$ tuto podmínku není třeba podrobně řešit, zohledníme ji při řešení „hlavní“ nerovnice

$\frac{1-y}{2+y} \geq 1$

$\frac{1-y}{2+y} - 1 \geq 0$

$\frac{1-y-2-y}{2+y} \geq 0$ /.(-1)

$\frac{2y+1}{2+y} \leq 0$

$\frac{-}{-}$ $\frac{-}{+}$ $\frac{+}{+}$

$+$ -2 $-$ $-\frac{1}{2}$ $+$

$y = \log x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right\rangle$

$\log x \quad -2 \ \wedge \ \log x \quad -\frac{1}{2}$

$10^{-2} < x \leq 10^{-\frac{1}{2}}$

$x \in \left(\frac{1}{100}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

$K = \left(\frac{1}{100}; \frac{\sqrt{10}}{10}\right\rangle$

$\boxed{\log_2(x+1) > \log_{x+1} 16}$

Podm.: 1) $x + 1 > 0$

$x > -1$

2) $x + 1 \neq 1$

$x \neq 0$

$x \in (-1; \infty) - \{0\}$

$\log_2(x+1) > \frac{\log_2 16}{\log_2(x+1)}$ Subst.: $\log_2(x+1) = y$

$y > \frac{4}{y}$

$y - \frac{4}{y} > 0$

$\frac{y^2-4}{y} > 0$

$\frac{(y+2).(y-2)}{y} > 0$

$\frac{-.-}{-}$ $\frac{+.-}{-}$ $\frac{+.-}{+}$ $\frac{+.+}{+}$

$-$ -2 $+$ 0 $-$ 2 $+$

$y \in (-2; 0) \cup (2; \infty)$

$-2 < \log_2(x+1) < 0 \quad \vee \quad \log_2(x+1) > 2$

$2^{-2} < x + 1 < 2^0 \quad \vee \quad x + 1 > 2^2$

$-\frac{3}{4} < x < 0 \quad \vee \quad x > 3$

$K = \left(-\frac{3}{4}; 0\right) \cup (3; \infty)$

Základní poznatky:

1) Řešte v R: a) MA 2017: $3 \cdot 9^x - 9^x = 6$ b) $3^x = 10$ c) $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$

[a) $\frac{1}{2}$ b) $\log_3 10$ c) $\frac{1}{2}$; 1]

2) Řešte v R: a) MA 2017: $\log_3 3x = 6$ b) $\log_2^2 x + 2 \cdot \log_2 x - 3 = 0$

[a) 243 b) $\frac{1}{8}$; 2]

Typové příklady standardní náročnosti

Následující rovnice a nerovnice řešte v R.

3) $\left(\frac{9}{25}\right)^x \cdot \left(\frac{125}{27}\right)^{x-1} = \frac{3}{5}$ [2]

4) $4 \cdot \sqrt{2^{5-7x}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4^{3-5x}}$ [12]

5) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} = 3$ [2]

6) MA+ 2017: $\log_3 x + \log_3 \frac{x}{3} = \log_{\sqrt{3}} 3 + 1$ [9]

7) log(x+1) + log(x-1) – log x = log(x+2) [∅]

8) $\log x^3 + 2 = \frac{10}{\log x^2}$ [10; $\frac{\sqrt[3]{10}}{100}$]

9) $1994^{\log\left(x^2-4x+4\right)} = 1$ [1; 3]

10) a) $\left(\frac{1}{6}\right)^{3x} < \left(\frac{1}{6}\right)^{2x+8}$ b) $4^{x+5} < 16^{x+1}$ [a) $(8;\infty)$, b) $(3;\infty)$]

11) a) $\log_{\frac{4}{7}}(3x+2) > 0$ b) $\log_{20}(-3x+16) \le \log_{20} x + \log_{20} 5$

[a) $(-\frac{2}{3};\frac{-1}{3})$, $\langle 2;\frac{16}{3})$]

Rozšiřující cvičení

12) $\left(\log_x \sqrt{5}\right)^2 - \log_x 5\sqrt{5} + 1{,}25 = 0$ [5; $\sqrt[5]{5}$]

13) $3^{\log x} + 5^{\log y} = 14$
$\underline{3^{2\log x} - 5^{2\log y} = 56}$ [100;10]