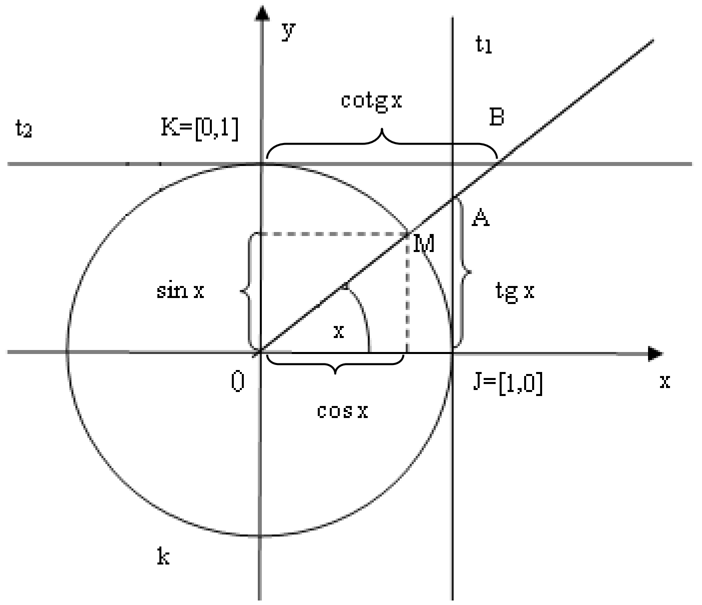
24 Goniometrické funkce a vztahy mezi nimi – met.

Stručný přehled teorie

Jednotková kružnice:



Velikost úhlu určujeme

1) v míře stupňové: - jednotkový úhel je 1° = $\frac{1}{180}$ přímého úhlu,

- úhly zpravidla značíme pomocí řeckých písmen (α, β, γ …)

2) v míře obloukové: - jednotkový úhel je 1rad = úhel, jehož délka oblouku *s* kružnice se rovná poloměru kružnice r,

- úhly zpravidla značíme x $(x = \frac{s}{r})$

Převod: $\boxed{\alpha = \frac{180}{\pi} . x}$ $\boxed{x = \frac{\pi}{180} . \alpha}$

Orientovaný úhel – je úhel, který má
- vrchol v počátku soustavy souřadnic,
- ***počáteční*** rameno (v kladné poloose x)
- ***koncové*** rameno.

Jeho velikost je
- kladná, když vznikl otáčením počátečního ramene proti směru pohybu hodinových ručiček
- záporná, když vznikl otáčením počátečního ramene po směru pohybu hodinových ručiček
- pro základní velikost orientovaného úhlu platí: $0° \leq \alpha < 360°$; $0 \leq x < 2\pi$

Přehled definic a vět:

Definice: Nechť je dána kartézská soustava souřadnic v rovině 0xy a jednotková kružnice *k* (se středem v počátku a poloměrem $r = 1$).
Ke každému reálnému číslu ***x*** přiřadíme orientovaný úhel x radiánů, který umístíme v soustavě souřadnic tak, že jeho vrchol je v počátku a počáteční rameno v kladné poloose x. Koncové rameno tohoto orientovaného úhlu protne jednotkovou kružnici v jediném bodě $M[x_M, y_M]$.

Kosinus je funkce, která každému reálnému číslu ***x*** přiřadí první souřadnici bodu M, $x_M = \cos x$.

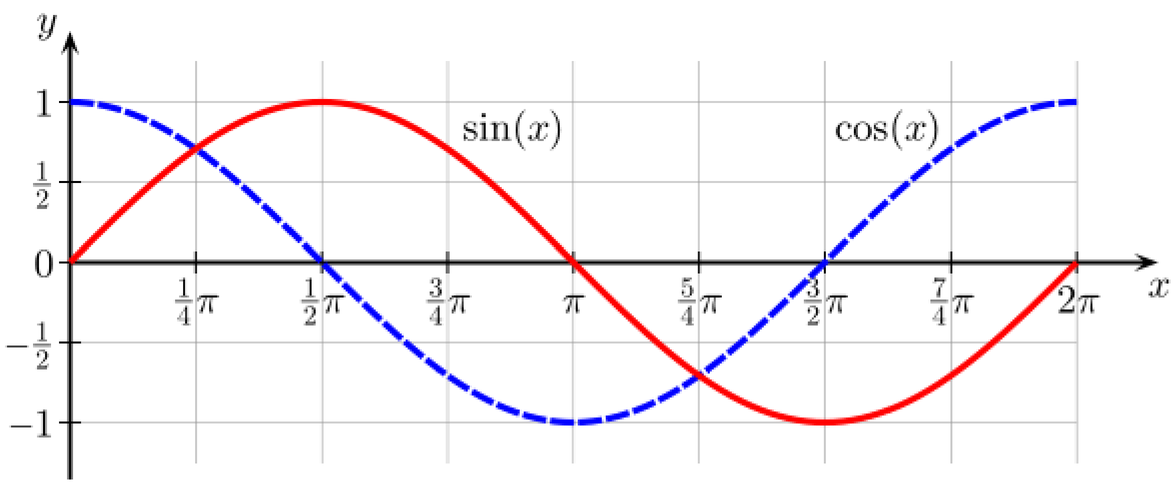
Sinus je funkce, která každému reálnému číslu ***x*** přiřadí druhou souřadnici bodu M, $y_M = \sin x$.

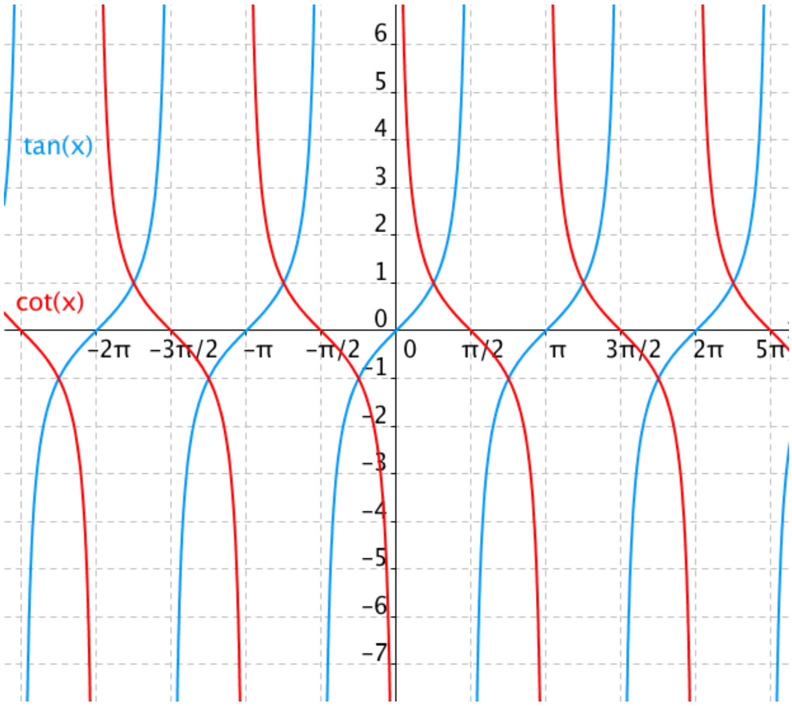
Tangens je funkce, která každému reálnému číslu ***x***, pro které $\cos x \neq 0$, přiřadí číslo $\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tg } x$.

Kotangens je funkce, která každému reálnému číslu ***x***, pro které $\sin x \neq 0$, přiřadí číslo $\frac{\cos x}{\sin x} = \text{cotg } x$.

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\,\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	ND	0	ND	0
$cotg\,\alpha$	ND	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	ND	0	ND

Grafy goniometrických funkcí:





Vlastnosti goniometrických funkcí:

- D (sin x) = D (cos x) = **R**
- D (tg x) = **R** - $\{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$
- D (cotg x) = **R** - $\{k\pi, \; k \in \mathbf{Z}\}$
- H (sin x) = H (cos x) = $\langle -1; 1 \rangle$
- H (tg x) = H (cotg x) = **R**
- Funkce sinus a kosinus jsou periodické s periodou 2π. Funkce tangens a kotangens jsou periodické s periodou π.
- Funkce kosinus je sudá, funkce sinus, tangens a kotangens jsou liché.

Některé vztahy mezi goniometrickými funkcemi

- Pro každé x ϵ **R** platí: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Pro každé x ϵ **R** - $\left\{x \neq k.\frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$ platí: tg x . cotg x = 1
- Pro každé x ϵ **R** platí: sin 2x = 2.sin x.cos x
- Pro každé x ϵ **R** platí: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

Pozn. Při řešení goniometrických úloh se používají další vzorce uvedené v MFCHT – např.

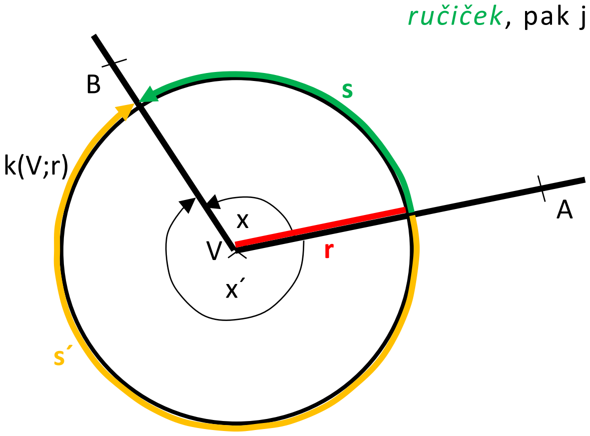
- vzorce pro součet (rozdíl) argumentů,
- vzorce pro součet (rozdíl) funkcí,
- vzorce pro poloviční argument, …

Met.: Se základními goniometrickými funkcemi se studenti setkali už dvakrát – poprvé na základní škole, podruhé pak v prvním ročníku na střední škole, kdy se při probírání tématu *Základní poznatky z matematiky* opakovaly a prohlubovaly znalosti elementárních základů matematiky. Vzhledem k tomu, že se v obou případech goniometrické funkce spojovaly pouze s pravoúhlým trojúhelníkem, byla velikost úhlů omezena na ostré, případně pravé, úhly. K měření úhlů a zadávání jejich velikosti se používala pouze stupňová míra.

V úvodu kapitoly o goniometrických funkcích je tedy dobré stručně zopakovat nadefinování goniometrických funkcí v pravoúhlém trojúhelníku a zdůraznit důležitost „zpaměťových“ znalostí hodnot všech těchto funkcí pro úhly 30°, 45° a 60° (odvození těchto hodnot plyne z vlastností rovnostranného trojúhelníku a čtverce).

Dalším krokem, který by měl následovat, je zavedení obloukové míry pro měření velikosti úhlů. Zároveň by měl být zaveden pojem orientovaného úhlu AVB (zapíšeme $\widehat{AVB}$) jako uspořádané dvojice polopřímek $\rightarrow VA, \rightarrow VB$, kde $\rightarrow VA$ je počáteční rameno, $\rightarrow VB$ je koncové rameno a V je vrchol orientovaného úhlu.
Velikost orientovaného úhlu AVB je v obloukové míře dána jako reálné číslo $\boxed{x}$, které je určeno poměrem $\boxed{\frac{s}{r}}$, kde **s** je délka oblouku kružnice „mezi“ rameny úhlu a **r** je poloměr kružnice. Přitom platí:

- pokud se při pevné poloze počátečního ramene otáčí koncové rameno do konečné polohy *ve směru pohybu hodinových ručiček*, pak je hodnota úhlu *záporná*,
- pokud se při pevné poloze počátečního ramene otáčí koncové rameno do konečné polohy *proti směru pohybu hodinových ručiček*, pak je hodnota úhlu *kladná*.



$$\boxed{x = \frac{s}{r}}$$

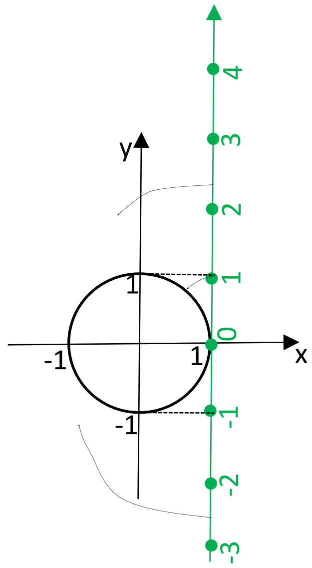
$$\boxed{x' = -\frac{s'}{r}}$$

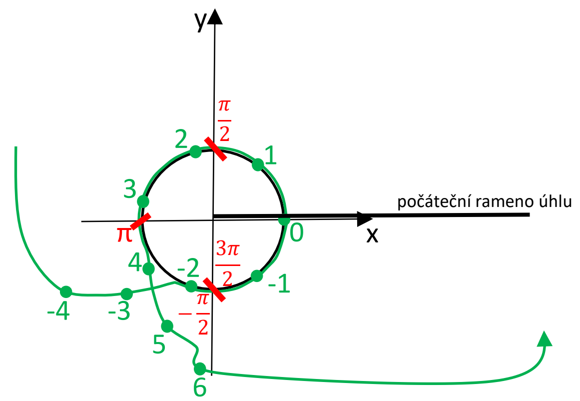
Velikost úhlu v míře obloukové je dána evidentně bezrozměrným reálným číslem. Formálně je ale zavedena jednotka radián (*rad*). 1 *rad* je velikost úhlu, pro který *s* = *r*. Tozn. $1\ rad \sim 57°17'45''$.

Logicky přijde nyní na řadu tzv. jednotková kružnice, tedy kružnice o poloměru délky 1.
Je docela možné, že s nápadem na využití jednotkové kružnice přijde některý ze studentů. Může ho napadnout, že když r = 1, bude velikost orientovaného úhlu dána vlastně pouze délkou příslušného kružnicového oblouku.

Jednotkovou kružnici využijeme při definování základních goniometrických funkcí úhlu, jehož velikost je dána libovolným reálným číslem. Za tím účelem

- ji umístíme do souřadnicového systému tak, aby její střed ležel v počátku soustavy souřadnic;
- na ni „navineme“ číselnou osu nulové tloušťky tak, že bod 0 číselné osy leží v bodě $[1; 0]$. Tím jednak vynikne logika kladných a záporných velikostí úhlů, zároveň studenti „uvidí“ pozici π …;
- počáteční rameno úhlu umístíme pevně do kladné poloosy *x*;





O velikosti úhlu rozhoduje poloha koncového ramene. Z předchozích obrázků je zřejmé:

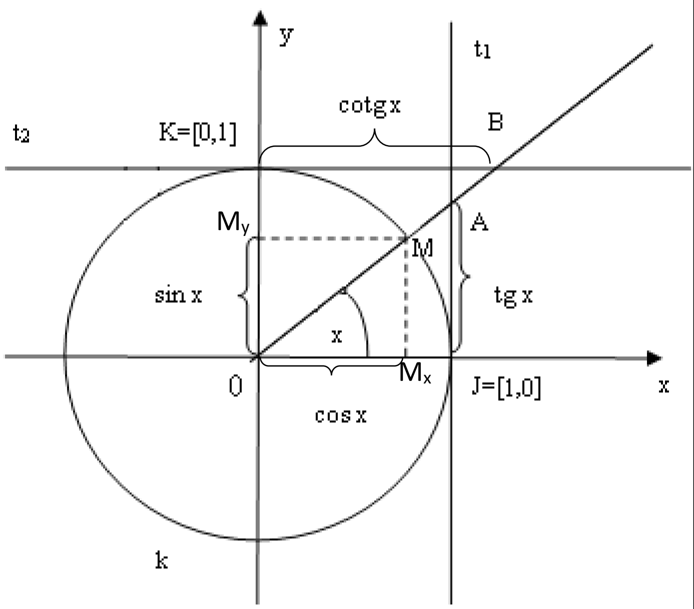
1) Délka poloviny jednotkové kružnice je π. To znamená, že přímý úhel, který má v míře stupňové velikost 180°, má v míře obloukové velikost π . Tato skutečnost nám umožní najít vztah mezi velikostmi daného úhlu v míře obloukové a v míře stupňové:

Míra oblouková	Míra stupňová
π	180°
x	α

Odsud plyne: $\boxed{\alpha° = \frac{180°}{\pi}.x}$ $\boxed{x = \frac{\pi}{180°}.\alpha°}$

2) Koncové rameno každého úhlu se může do své konečné polohy dostat nekonečně mnoha způsoby při jeho otáčení v kladném či záporném smyslu. Proto může mít každý úhel nekonečně mnoho velikostí vyjádřených takto:
   a) v míře stupňové $\boxed{\alpha° = \alpha_z° + k.360°}$, $kde\ \alpha_z° \in \langle 0°; 360°)\ je\ základní\ velikost\ úhlu\ \alpha, a\ k \in Z$
   b) v míře obloukové $\boxed{x = x_z + k.2\pi\ (rad)}$, $kde\ x_z \in \langle 0; 2\pi)\ je\ základní\ velikost\ úhlu\ x, a\ k \in Z$

Nyní už je vše připraveno k tomu, aby se mohly za pomoci vhodných pravoúhlých trojúhelníků (viz následující obrázek) nadefinovat goniometrické funkce:



Δ OM$_x$M: $\sin x = \frac{|M_xM|}{|OM|} = \frac{|M_xM|}{1} = |M_xM| = |OM_y|$;

$\sin x$ je y-ová souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu *x* s jednotkovou kružnicí;

$\cos x = \frac{|M_xO|}{|OM|} = \frac{|M_xO|}{1} = |M_xO|$;

$\cos x$ je x-ová souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu *x* s jednotkovou kružnicí;

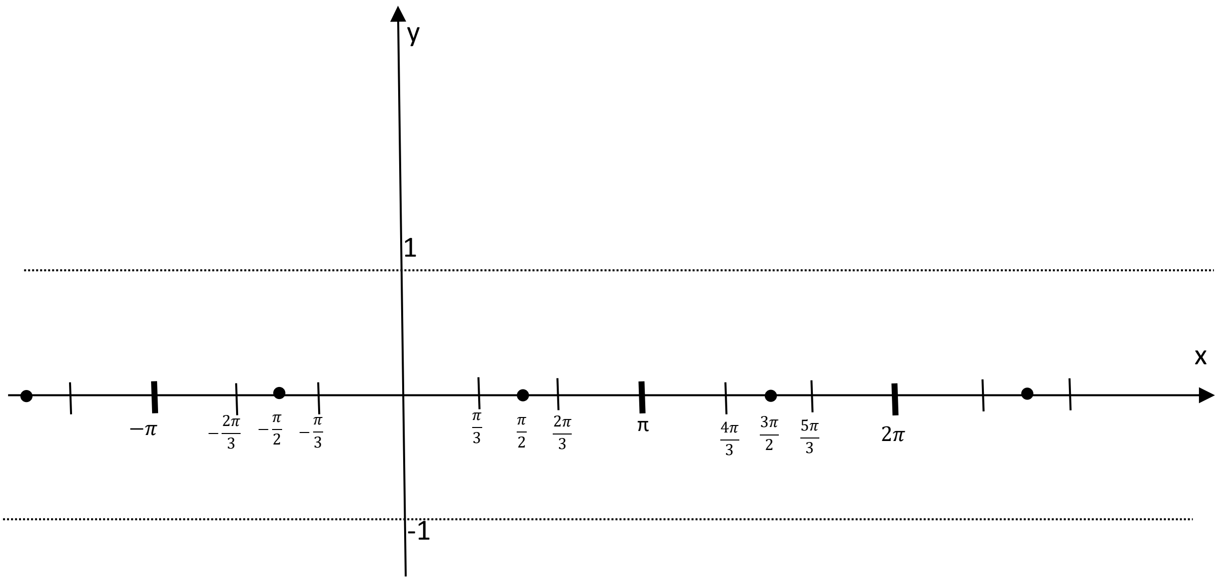
Δ OJA: $\operatorname{tg} x = \frac{|AJ|}{|OJ|} = \frac{|AJ|}{1} = |AJ|$;

tg *x* je *y*-ová souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu *x* s tečnou t_1 (posunutou osou *y*);

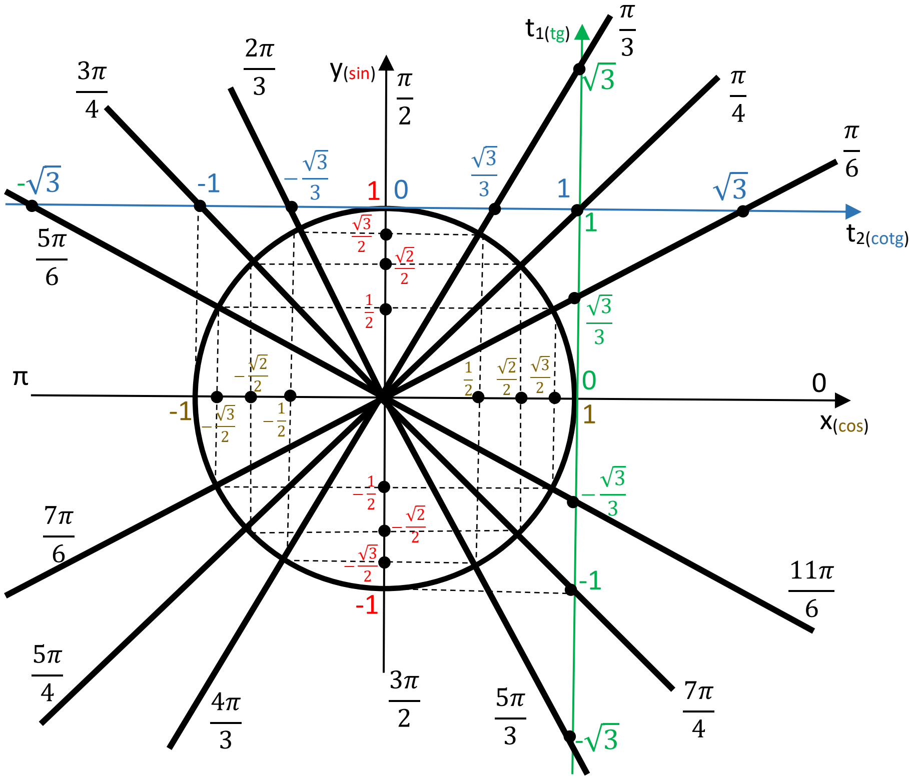
Δ OBK: $\operatorname{cotg} x = \frac{|KB|}{|OK|} = \frac{|KB|}{1} = |KB|$;

cotg *x* je x-ová souřadnice průsečíku koncového ramene úhlu *x* s tečnou t_2 (posunutou osou *x*);

Jakmile jsou základní goniometrické funkce nadefinovány, měl by učitel seznámit studenty s grafy těchto funkcí a důkladně s nimi probrat i jejich vlastnosti. Rozhodně by měl studentům alespoň na funkci sinus, případně ještě třeba na funkci tangens, předvést, jak se graf postupně tvoří. Pokud k tomu využije nějakého videa z internetu, jistě mu to ušetří čas. Měl by si ovšem dát velký pozor, protože mnozí „matematici“, kteří podobná videa natočili, se v nich občas dopouštějí řady nepřesností a někdy dokonce hrubých chyb. Výběru kvalitního videa by měl učitel věnovat opravdu velkou pozornost.
Učitel může studentům základní grafy nakopírovat. Lepší by ovšem bylo, kdyby si studenti načrtnutí všech čtyř grafů funkcí sinus, kosinus, tangens i kotangens vyzkoušeli třeba do učitelem rozdaných souřadnicových soustav (viz následující obrázek). Ulehčilo by jim to práci na tvorbě grafů goniometrických funkcí, do jejichž rovnic jsou přidány různé parametry.



Nyní by se měl učitel vrátit k jednotkové kružnici a využít ji k tomu, aby naučil studenty obratnosti a jistotě v určování poloh koncových ramen a určování hodnot goniometrických funkcí úhlů, jejichž velikosti jsou zadávány v obloukové míře a mají hodnoty $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ a jejich násobků.

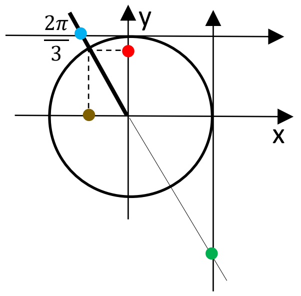


Při práci s úhly vyznačenými v předchozím obrázku je nezbytné, aby studenti rychle

- pochopili, že pro určení hodnot všech goniometrických funkcí pro tyto úhly stačí správně načrtnout (či představit si) do souřadnicové soustavy s jednotkovou kružnicí koncové rameno daného úhlu, určit znaménko a pak srovnat podle velikosti tři čísla (pro funkce sinus a kosinus $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$ a pro funkce tangens a kotangens $\frac{\sqrt{3}}{3} < 1 < \sqrt{3}$). Přidělit danému úhlu jeho goniometrické funkce už bude naprosto jednoduché.

Př. $x = \frac{2\pi}{3}$. Určete $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$

Řeš. :

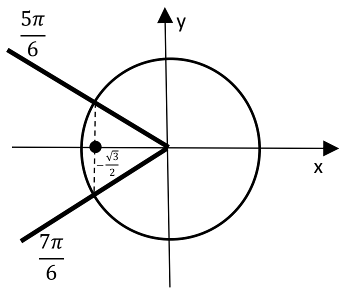


$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = -\frac{1}{2}$,

$\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$, $\operatorname{cotg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

- dokázali k libovolné zadané hodnotě goniometrické funkce najít příslušnou množinu úhlů;

Př. a) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $x - ?$ Řeš.:

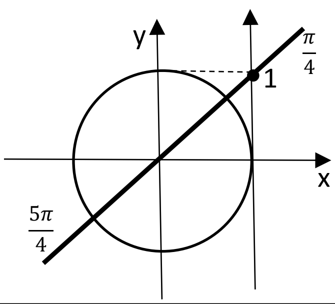


$x - ?$

$x_1 = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $x_{12} = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi , \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \right\}$

Př. b) $\operatorname{tg} x = 1$ $x - ?$ Řeš.:



$x = \frac{\pi}{4} + k\pi$,

$K = \bigcup_{k \in Z} \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \right\}$

- dokázali k zadanému úhlu libovolné velikosti x najít jeho základní velikost x_z;

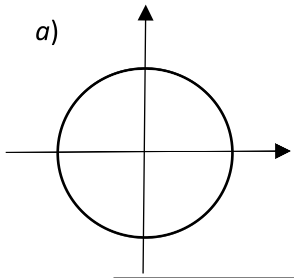
Př. a) $x = \frac{101}{6}\pi;$ $x_z - ?$ Řeš.: $x = \frac{101}{6}\pi = \frac{96}{6}\pi + \frac{5}{6}\pi = 8.\frac{12}{6}\pi + \frac{5\pi}{6} = 8.2\pi + \frac{5\pi}{6}$; $x_z = \frac{5\pi}{6}$

Př. b) $x = -\frac{97}{4}\pi;$ $x_z - ?$ Řeš.: $x = -\frac{97}{4}\pi = -\frac{104}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = -13.\frac{8}{4}\pi + \frac{7\pi}{4} = -13.2\pi + \frac{7\pi}{4}$; $x_z = \frac{7\pi}{4}$

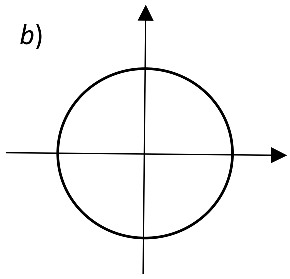
Mnohaleté zkušenosti ukazují mimořádnou užitečnost a důležitost prověrky (viz následující zadání), která by měla následovat po probrání předchozích informací v úvodu tématu o goniometrických funkcích.
Zadání prověrky by měl učitel rozdat textem dolů, všichni najednou by si měli zadání otočit a čas, který by měl všem stačit na vypracování své skupiny, by neměl být delší než stačí učiteli na vyřešení obou skupin. Jakmile čas uplyne, měli by všichni studenti list se zadáním, do kterého zároveň úlohy vyřešili, zvednout nad hlavu. Tím by bylo zajištěno, že skutečně všichni měli na řešení spravedlivě stejně dlouhou dobu.

A

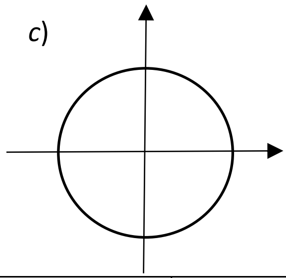
1. *a*)



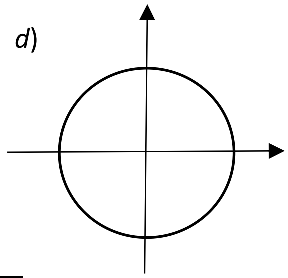
b)



c)

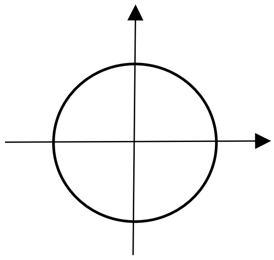


d)

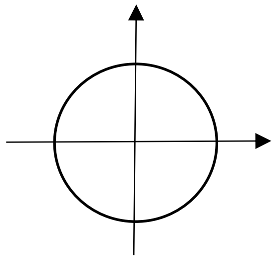


	$a)\ x = \frac{7\pi}{6}$	$b)\ x = \frac{5\pi}{3}$	$c)\ x = \frac{3\pi}{4}$	$d)\ x = \frac{11\pi}{6}$
$\sin x$				
$\cos x$				
$\mathrm{tg}\, x$				
$\mathrm{cotg}\, x$				

2. Řešte rovnici: $a)\quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

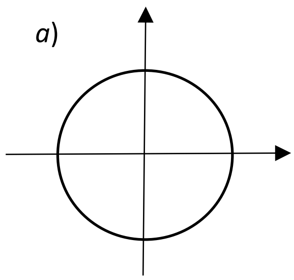


$b)\quad \mathrm{tg}\, x = \sqrt{3}$

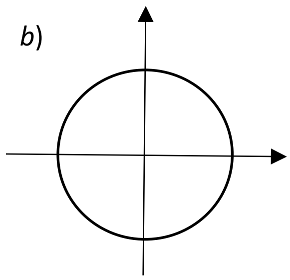


B

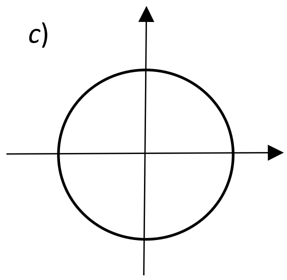
1. *a*)



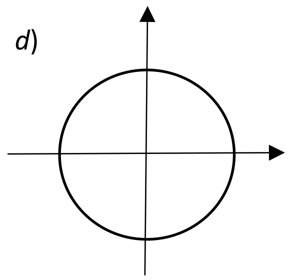
b)



c)

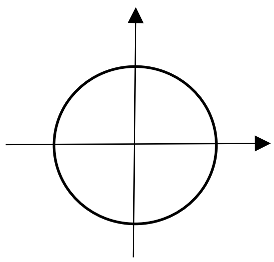


d)

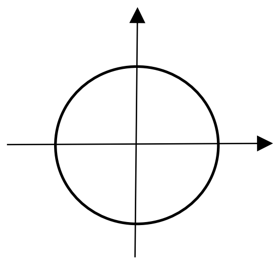


	$a)\ x = \frac{4\pi}{3}$	$b)\ x = \frac{5\pi}{6}$	$c)\ x = \frac{7\pi}{4}$	$d)\ x = \frac{2\pi}{3}$
$\sin x$				
$\cos x$				
$\mathrm{tg}\, x$				
$\mathrm{cotg}\, x$				

2. Řešte rovnici: $a)\quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$



$b)\quad \mathrm{cotg}\, x = \sqrt{3}$



Doporučené bodování prověrky: 1. příklad … 4 body za 4 správné polohy koncových ramen úhlů; učitel by měl studentům vysvětlit, proč bude v prvních prověrkách trvat na vyznačení poloh koncových ramen úhlů:
– jestliže student vyznačí rameno chybně a pro tento jím vyznačený úhel určí „správně“ hodnoty goniometrických funkcí, ztratí pouze 1 bod;
– jestliže ovšem student koncové rameno nevyznačí vůbec a zapíše hodnoty goniometrických funkcí pro jiný úhel než je v zadání, ztratí celkem 5 bodů (1 za nevyznačené rameno, 4 za „chybné“ hodnoty jeho goniometrických funkcí;
16 bodů za 16 hodnot goniometrických funkcí;
2. příklad … 6 bodů celkem, za každou úlohu 3 body (1 bod za vyznačení koncových ramen úhlů, které jsou řešením rovnice, 2 body za zápis množiny řešení.

Další doporučení týkající se této prověrky (učitel by si měl uvědomovat, že znalosti požadované v prověrce jsou naprosto základní a s nimi stojí a padá úspěšnost zvládnutí celé goniometrie na střední škole):

1) studenti by měli být s předstihem informováni, že známkování prověrky bude velmi přísné (např. **1** za 26-25 bodů, **2** za 24 body, **3** za 23 body, **4** za 22 body);
2) prověrka by se měla s pozměněnými hodnotami opakovat (i několikanásobně) pro ty studenty, kteří nedosáhli alespoň dvojky (trojky);
3) výsledná známka z této prověrky by se měla u studentů, kterým se zpočátku nedařilo, určit jako aritmetický průměr ze všech pokusů, nebo může dojít k dohodě, že se studentovi bude počítat nejlepší dosažená známka;

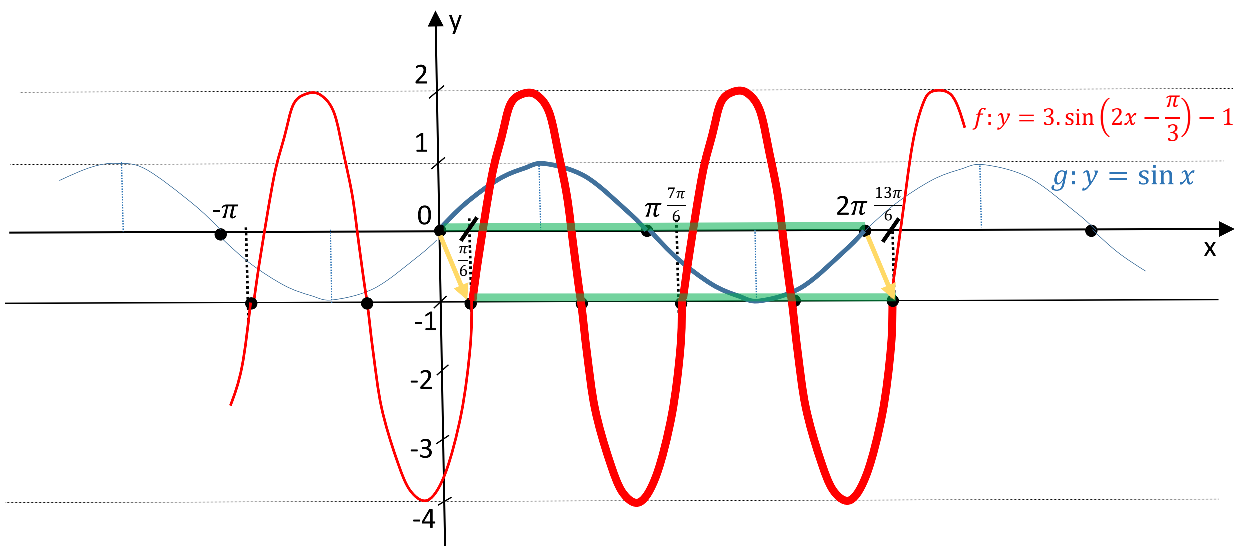
Grafy goniometrických funkcí

① Načrtněte graf funkce $\boxed{f: y = 3.\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1}$

Řeš.: 1. krok … úprava rovnice funkce: $f: y = 3.\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 3.sin2.\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$

Mění amplitudu Mění frekvenci Posunuje graf podél osy *x* Posunuje graf podél osy *y*

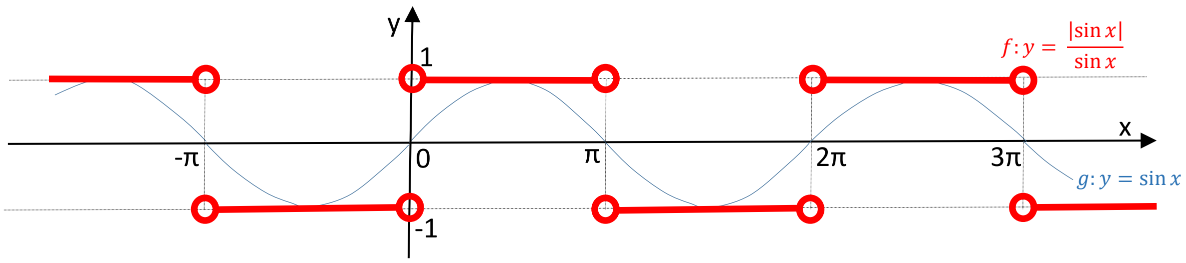
2. krok … graf



② Načrtněte graf funkce $\boxed{f: y = \frac{|\sin x|}{\sin x}}$

Řeš.: a) $\sin x > 0 \quad \rightarrow \quad |\sin x| = \sin x \quad \rightarrow \quad y = 1$ Podm.: $\sin x \neq 0$

b) $\sin x < 0 \quad \rightarrow \quad |\sin x| = -\sin x \quad \rightarrow \quad y = -1$



Pokud jde o grafy goniometrických funkcí, měli by se studenti naučit kreslit je srozumitelně a přehledně:

- souřadnicové osy a důležité rovnoběžky s osami – podle pravítka;
- zvolit rozumné měřítko – např. jednotku na ose *y* zvolit 1 cm, základní periodu 2π na ose *x* nahradit úsečkou délky 6 cm;
- jasně vyznačit, kam se v případě složitější goniometrické funkce „přesune“ z osy x základní perioda (2*π* pro sinus a kosinus, π pro tangens a kotangens) a kolik (příp. jaká část) základních částí křivky jí odpovídá;
- křivočaré grafy kreslit od ruky, ale využívat barevných tužek …
- uvedené požadavky je nutné dodržet i v případě využití elektronických možností kreslení grafů goniometrických funkcí.

Základní poznatky:

Př. 1 Načrtněte graf funkce:

a) $f\colon\ y = 2.\sin(x - \frac{\pi}{4})$

b) $g\colon\ y = \cos(2x + \pi) + 1$

c) $h\colon y = \dfrac{-\cos(x)}{|\cos(x)|}$

Př. 2 Vyjádřete hodnoty úhlů v radiánech, případně ve stupních. Dále určete jejich základní velikosti.

a) 2070°, b) $\frac{14}{3}\pi$, c) $\frac{21}{4}\pi$, d) $-\frac{17}{6}\pi$

$$\left[a)\ x = \frac{23}{2}\pi;\ x_z = \frac{3}{2}\pi, b)\ 840°;\ 120°, c)\ 945°;\ 225°, d) - 510°;\ 210°\right]$$

Př. 3 Určete hodnoty všech základních goniometrických funkcí pro úhel $x = \frac{107}{6}\pi$. Počítejte bez kalkulačky s užitím jednotkové kružnice.

$[-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; -\sqrt{3}]$

Typové příklady standardní náročnosti:

Met.: Pro řešení většiny následujících úloh je nezbytné umět používat vzorce vyjadřující základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi. Zkušenosti ukazují jednoznačně, že je nanejvýš důležité, aby alespoň během části doby, kdy se probírá goniometrie, studenti uměli zpaměti následující vzorce:
Pro všechny přípustné hodnoty $x, y \in R$ platí:

1) $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\operatorname{tg} x = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; $\operatorname{cotg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$;

2) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{tg} x \,.\, \operatorname{cotg} x = 1$; $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$;

3) $\sin(x \pm y) = \sin x \,.\cos y \pm \cos x \,.\sin y$; $\cos(x \pm y) = \cos x \,.\cos y \mp \sin x \,.\sin y$;
$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x . \operatorname{tg} y}$; $\operatorname{cotg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{cotg} x . \operatorname{cotg} y \mp 1}{\operatorname{cotg} x \pm \operatorname{cotg} y}$;

4) $\sin 2x = 2.\sin x \,.\cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$; $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - tg^2 x}$; $\operatorname{cotg} 2x = \frac{cotg^2 - 1}{2.\operatorname{cotg} x}$;

5) $\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$; $\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$; $\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$; $\left|\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;

6) $\sin x + \sin y = 2.\sin\frac{x+y}{2} . \cos\frac{x-y}{2}$; $\sin x - \sin y = 2.\cos\frac{x+y}{2} . \sin\frac{x-y}{2}$;
$\cos x + \cos y = 2.\cos\frac{x+y}{2} . \cos\frac{x-y}{2}$; $\cos x - \cos y = -2.\sin\frac{x+y}{2} . \sin\frac{x-y}{2}$.

Díky alespoň krátkodobé „zpaměťové“ znalosti uvedených vzorců (případně dohodnuté většiny z nich) získají studenti jistotu a obratnost v jejich používání při úpravách výrazů, dokazování rovností výrazů s goniometrickými funkcemi, při řešení goniometrických rovnic a nerovnic. Pokusy s nevyžadováním znalosti vzorců zpaměti (provedené v minulosti konkrétním učitelem v konkrétních třídách) spolu s nahrazením tohoto požadavku povolením „oficiálního taháku“ se vzorci vedlo k jednoznačnému markantnímu propadu ve výše uvedených schopnostech studentů.
Jakmile studenti prokážou (např. při malé prověrce), že vzorce a jejich užití ovládají, může učitel za účelem snížení jejich případné nervozity a dosažení většího klidu při písemném či ústním zkoušení povolit používání „oficiálního taháku“ (např. i při čtvrtletní písemné práci).

Pozn.: Učitel musí nekompromisně vyžadovat, aby minimálně červeně vyznačené vzorce studenti uložili do paměti podobně pevně a trvale, jako třeba vzorec pro výpočet kořenů kvadratické rovnice. Ve středoškolské matematice je budou později ještě mnohokrát potřebovat.

Př. 4 Vypočtěte:
a) cos 15° b) sin 75° c) $\sin 135^\circ \cdot \cos(-45^\circ) \cdot \sin\pi - \cos 135^\circ \cdot \sin 240^\circ$

$$\left[\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};\ \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4};\ -\frac{\sqrt{6}}{4}\right]$$

Př. 5 Určete hodnoty všech goniometrických funkcí úhlu x, jestliže platí $\operatorname{cotg} x = \sqrt{2}$ a zároveň $x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

$$\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

Met.: Z hodnoty jedné goniometrické funkce úhlu x a z informace, díky níž lze určit, ve kterém kvadrantu souřadnicové soustavy se nachází jeho koncové rameno, lze jednoznačně určit hodnoty i ostatních jeho goniometrických funkcí.
Jednoduchá situace nastává, je-li zadána funkce sinus nebo funkce kosinus.

Př. a) $\sin x = \frac{1}{5}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Určete ostatní goniometrické funkce.

Řeš.: Koncové rameno x je ve II. kvadrantu, proto $\cos x < 0, \operatorname{tg} x < 0, \operatorname{cotg} x < 0$.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Proto $\cos x = -\sqrt{1 - sin^2 x} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$;

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{5}}{-\frac{2\sqrt{6}}{5}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{12};\quad \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -2\sqrt{6}.$$

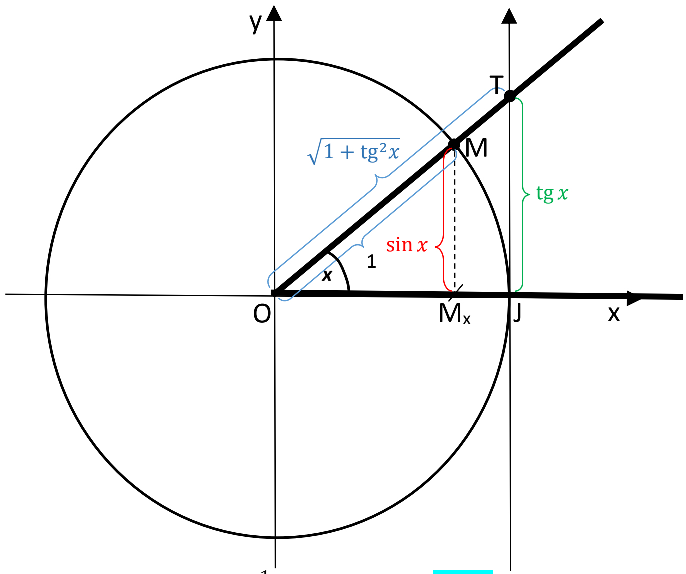
Pokud je ovšem zadaná funkce tangens nebo kotangens, bude situace komplikovanější.

Př.: b) $\boxed{\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}\ , \quad x \in \left(\frac{3\pi}{2}\ ; 2\pi\right).\text{ Určete ostatní goniometrické funkce.}}$

Řeš.: Koncové rameno x je ve IV. kvadrantu, proto $\sin x < 0, \cos x > 0, \operatorname{cotg} x < 0$.

Nyní ale snadno určíme pomocí známých vzorců pouze $\operatorname{cotg} x$: $\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = -2$;

Vztah mezi $\sin x$ a $\operatorname{tg} x$ odvodíme:



ΔOJT: $|OJ| = 1, |JT| = \operatorname{tg} x \rightarrow$

$|OT| = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$;

$$\Delta OM_xM \sim \Delta OJT$$

$$\frac{|M_xM|}{|OM|} = \frac{|JT|}{|OT|}$$

$$\frac{\sin x}{1} = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

$$\forall x \in \langle 0; 2\pi):\ |\sin x| = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$$

$\sin x = -\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{10}$; $\quad \cos x = +\sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-\frac{1}{20}} = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{95}}{10}$

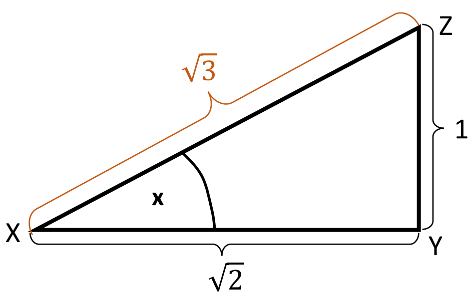
Podobným způsobem jako v předchozí úloze by pro řešení př. 5 bylo možné najít vztah mezi cotg *x* a sin *x* (příp. mezi cotg *x* a cos *x*).

Existuje však mnohem jednodušší řešení, na něž stačí znalosti ze základní školy a které nevyžaduje žádné odvozování vzorců. Jako první se ovšem i při této jednoduché metodě musí na základě polohy koncového ramene úhlu *x* určit znaménko jednotlivých jeho goniometrických funkcí.

Př. 5 $\boxed{\operatorname{cotg} x = \sqrt{2}\ \text{ a zároveň } x \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right).\text{ Určete ostatní goniometrické funkce.}}$

Řeš.: Koncové rameno úhlu *x* je ve III. kvadrantu, proto $\sin x < 0, \cos x < 0, \operatorname{tg} x > 0$.

Nyní se nakreslí pravoúhlý trojúhelník, jehož dvě strany jsou dány zadanou goniometrickou funkcí úhlu *x* a třetí strana se dopočítá pomocí Pythagorovy věty: $|XZ| = \sqrt{3}$.



Z tohoto trojúhelníku už se hodnoty goniometrických funkcí prakticky „přečtou“ a jen se doplní správné znaménko:

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\quad \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$;

$\operatorname{tg} x = +\frac{1}{\sqrt{2}} = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Toto jednoduché řešení využívající pravoúhlý trojúhelník je univerzální a lze jej použít u všech úloh podobného typu jako je př. 5.

Př. 6 Dokažte, že platí:

a) $\sin(45^\circ - x) \cdot \sin(45^\circ + x) = \frac{1}{2}\cos 2x$

b) $\frac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \mathrm{tg}\frac{x+y}{2}$

Př. 7 Zjednodušte:

a) $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}$

b) $1 - \sin^2 x + cotg^2 x \cdot \sin^2 x$

$[a)\ 2tg\, x, x \neq k\frac{\pi}{2}, k \in Z, b)\ 2\cos^2 x,\ x \neq k\pi, k \in Z]$