# **25 Goniometrické rovnice – met.**

**Stručný přehled teorie**

**Goniometrické rovnice:** - obsahují neznámou **x** nebo výraz s neznámou **x** jako argumenty jedné nebo více goniometrických funkcí:

Velmi často se při řešení goniometrických rovnic využívá takových úprav, kterými se získá rovnice obsahující jen jediný typ goniometrické funkce.

**Typy goniometrických rovnic:**

**a) základní**  , kde … tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení lišících

 se periodou *2kπ*, kde

 Pozn. Pro *a*  musí zvládnout student gymnázia řešení těchto základních

 rovnic bez kalkulačky, pouze s využitím jednotkové kružnice, případně grafu příslušné funkce

, kde  … tyto rovnice mají nekonečně mnoho řešení lišících

se periodou *kπ*, kde

 Pozn. Pro *a* musí zvládnout student gymnázia řešení těchto základních rovnic

 bez kalkulačky, pouze s využitím jednotkové kružnice, případně grafu příslušné funkce

*Další příklady základních rovnic: a.sin f(x) = b, a.cos f(x) = b, a.tg f(x) = b, a.cotg f(x) = b*

(Např. 2.sin (3x - ) = -1)

**b) vedoucí k algebraické rovnici – např. ke kvadratické či bikvadratické rovnici** - řeší se většinou užitím substituce

 (Např. , sin2 x + 2.sin x – 3 = 0, …)

**c) využívající vztahů mezi goniometrickými funkcemi** (většina goniometrických rovnic)

 (Např. 6.sin2 x – 7.cos x – 1 = 0, , sin 2x + cos 2x = 1 + tg x, …)

**d) využívající srovnání hodnot goniometrických funkcí**

(Např. , …)

Met.: Téma goniometrických rovnic patří ve středoškolské matematice k tématům velmi náročným. Goniometrických rovnic existuje nepřeberné množství. Jejich kategorizace je obtížná a problematická, protože drtivá většina goniometrických rovnic nespadá striktně pouze do jediné kategorie, ať už ji specifikujeme jakkoli. O to větší pozornost musí učitel věnovat tomu, aby studenty naučil postupům, které jsou optimální při řešení nejjednodušších základních goniometrických rovnic. Pokud budou studenti tyto postupy znát a s jistotou zvládat, budou se moci pustit i do řešení komplikovanějších rovnic, které často obsahují více goniometrických funkcí i více členů. Při úpravách takových rovnic se nejčastěji používá buď jejich převedení (za pomoci vzorců) do základního tvaru, ve kterém se vyskytuje jen jediná goniometrická funkce, nebo se rovnice anuluje a jedna strana se převede na součin členů tak, aby v každém z nich byla jen jedna goniometrická funkce. Takto upravené rovnice lze pak zpravidla už bez větších potíží vyřešit. Učitel samozřejmě musí obrátit pozornost studentů i na skutečnost, že před samotným řešením je nutné precizně zpracovat i podmínky, kterých v goniometrických rovnicích bývá často celá řada.

**Goniometrické rovnice**

**1●** *Základní typ*

1.
2. Podm.:

1. Subst.:

Podm.: 1)

 2)

1. /.

 ;

1. ① Přibližné řešení – s kalkulačkou

 Přesné řešení – s použitím **cyklometrických funkcí** Pokud učiteli okolnosti dovolí zavést cyklometrické funkce, může je využít při řešení goniometrických rovnic a nerovnic. Je ovšem pravda, že čas na probírání těchto funkcí je velmi omezený a jejich používání při zápisech množin řešení goniometrických rovnic není bez úskalí. Cyklometrické funkce jsou inverzní funkce k odpovídajícím funkcím goniometrickým, jejichž definiční obory jsou omezeny tak, aby na nich byly funkce prosté (pozn. k funkcím, které nejsou prosté, inverzní funkce neexistují):

###  **Goniometrické a cyklometrické funkce a jejich definiční obory:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Goniometrická funkce** | **Cyklometrická funkce** |
| Sinus:  | Arkus sinus:  |
| Kosinus:  | Arkus kosinus:  |
| Tangens:  | Arkus tangens:  |
| Kotangens:  | Arkus kotangens:  |

Studenti, kterým je práce s cyklometrickými funkcemi jasná, si mohou dovolit zapsat množinu řešení rovnice e) takto:

 **2**● *vedoucí k algebraické rovnici – např. ke kvadratické či bikvadratické*

1

1. Subst.:
2. Subst.:
3. Subst.:

1

-1

1

Podm.:

1

-1

1. /.

=0 Subst.:

Podm.:

1. Subst.:

nebo

1. Subst.:

0

 *3● využívající vztahů mezi goniometrickými funkcemi*

1. 1. způsob řešení ▪ využívá vzorce pro goniometrickou funkci součtu argumentů; ▪ vyžaduje jistou dávku „zručnosti“ a zkušenosti; ▪ není univerzální, nelze jej použít pro tento typ zadání vždy; ▪ pokud jej lze použít, vede rychle k řešení. /. umělá úprava – finta …

2. způsob řešení (univerzální) ▪ vychází z toho, že se na zadanou rovnici díváme jako na rovnici o dvou neznámých a ; ▪ jako druhá rovnice o stejných neznámých poslouží základní vzorec ;

-1

-1

 3. způsob řešení (univerzální) ▪ jde jen o jinou variantu předchozí metody /2 Subst.:

1. /.

Podm.: . Co kdyby ? Pak by a zadaná rovnice by byla . To ovšem znamená, že by neměla řešení.

1.

0

Podm.:

1. /. NELZE, neboť , proto
2.

0

1.

 *4● využívající srovnání hodnot goniometrických funkcí*

1.

Subst.:

1. ∨ 2)

 ∨

 ∨

 ∨

 Pozn.: Tuto úlohu by jistě bylo možné řešit rovněž třeba za použití součtových vzorců. Jednalo by se však o velmi komplikovaný a časově náročný postup.

Subst.:

nahradíme

základní

velikostí

1. ∨ 2)

 ∨

**Goniometrické nerovnice**

-1

1

 /:2

1.

 Subst.:

-2

-2

-1

1.

 ∨

0

0

Základní poznatky

* + 1. Řešte v R rovnice
			1.
			2.
		2. Přiřaďte ke každé rovnici 1. – 4. její řešení a) – f) v oboru : (zdroj státní maturita září 2016)
			1. = 1

* + 1. Kolik řešení má rovnice v oboru ? (zdroj maturita M+, květen 2017)

Typové příklady standardní náročnosti

* + 1. Řešte v R rovnice
			1.
			2.
			3.
			4.
			5.
			6.

Rozšiřující cvičení

* + 1. Řešte v R rovnici

Poznámka

Pro případné zadání rovnic do Wolframalpha.com a podobných programů použijte do zadání rovnice
v příkazovém řádku následující syntaxi:

* goniometrické funkce
* mocniny goniometrických fcí
* odmocnina (angl. square root)

Ve Wolframalpha si nastavte funkci reálné proměnné, tj. Real-valued plot, nikoliv Complex-valued plot.