26 Trigonometrie, obecný trojúhelník – met.

Stručný přehled teorie

Trigonometrie - oblast goniometrie, která je věnována užití goniometrických funkcí při řešení úloh o trojúhelnících

Základní vztahy:

Sinová věta: Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky *a, b, c* a jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ,

platí: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, neboli $a:b:c=\sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

Kosinová věta: Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky *a, b, c* a jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ,

platí:

$$c^2=a^2+b^2-2ab.\cos\gamma$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc.\cos\alpha$$
$$b^2=a^2+c^2-2ac.\cos\beta$$

Pozn. Kosinovou větu používáme v případě, že je trojúhelník zadán prvky *sss* nebo sus.

Sinovou větu používáme v ostatních případech.

Některé další základní užitečné vztahy:

Pro každý trojúhelník ABC, jehož strany mají délky *a, b, c* a jehož vnitřní úhly mají velikost α, β, γ, platí:

- Obsah Δ ABC je $S=\sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$, kde $s=\frac{a+b+c}{2}$ (Heronův vzorec);
- Obsah Δ ABC je $S=\frac{1}{2}.ab.\sin\gamma=\frac{1}{2}.ac.\sin\beta=\frac{1}{2}.bc.\sin\alpha$

Následující vzorce jsou uvedeny pouze pro zajímavost jako příklad několika z velkého množství vzorců z oblasti goniometrie. Nepatří k základním znalostem, které by měl student gymnázia zvládnout:

- vztahy pro výpočet poloměru kružnice opsané r, vepsané ρ:

$$r=\frac{abc}{4S};\quad r=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{b}{2\sin\beta}=\frac{c}{2\sin\gamma};\quad r=\frac{ab}{2v_c}$$
$$\rho=\frac{S}{s};\quad \rho=(s-a)\,tg\frac{\alpha}{2}$$

- některé další vztahy:

$$v_a:v_b:v_c=\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}$$
$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}};\quad \frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\quad \text{(Mollweidovy vzorce)}$$
$$4t_c^2=2a^2+2b^2-c^2$$
$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{tg\frac{\alpha-\beta}{2}}{tg\frac{\alpha+\beta}{2}}\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}\quad \text{(tangentová věta)}$$

Met.: Obecný trojúhelník je jednoznačně zadán třemi na sobě nezávislými prvky.

Učitel by měl vyvolat diskusi o tom, jak při daném konkrétním zadání úlohy na řešení obecného trojúhelníku rozhodnout, která z obou vět se má použít jako první (sinová je pro výpočty relativně jednodušší, ale její použití někdy může vést ke dvěma řešením):

1. **Sinová věta** – její použití je podmíněno tím, že v trojúhelníku musí být zadána alespoň jedna dvojice strany a úhlu ležícího proti ní:

   Př.: Určete všechny ostatní základní prvky trojúhelníku ABC:

   a) Dán ΔABC: $a = 6\ cm, c = 7\ cm, \gamma = 40°$ … zadání podle věty Ssu … jediné řešení

   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{a.\sin\gamma}{c} = \frac{6.\sin 40°}{7} \sim 0{,}551 \quad \rightarrow \quad \alpha \sim 33°26´,$$

   $$[\alpha = 33°26´, \beta = 106°34´, b = 10{,}4\ cm]$$

   ---

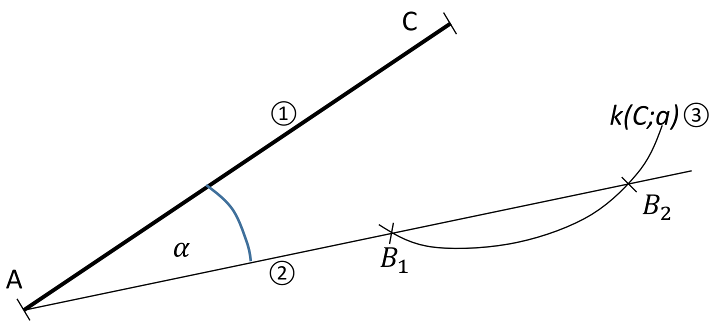
   b) Dán ΔABC: $b = 5\ cm, \alpha = 110°, \gamma = 42°$ … zadání podle věty usu .. jediné řešení

   dopočítám úhel proti straně b … $\beta = 28°$ $\quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \rightarrow \quad a = \frac{b.\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{5.\sin 110°}{\sin 28°} \sim 10\ cm,$

   $$[a = 10\ cm, \beta = 28°, c = 7{,}1\ cm]$$

   ---

   c) Dán ΔABC: $a = 5\ cm, b = 8\ cm, \alpha = 26°55´$ … je zadán úhel proti kratší straně – žádnou z vět o shodnosti trojúhelníků nelze použít, úloha může mít jedno, dvě nebo žádné řešení, viz náčrt:



   $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \quad \rightarrow \quad \sin\beta = \frac{b.\sin\alpha}{a} = \frac{8.\sin 26°55´}{5} \sim 0{,}724$$

   Této hodnotě funkce sinus odpovídají dva úhly $\beta_1 = 46°25´$ a $\beta_2 = 133°35´$.

   $$\left[\text{Úloha má tedy dvě řešení:} \quad \begin{matrix} \beta_1 = 46°25´, c_1 = 10{,}6\ cm, \gamma_1 = 106°40´ \\ \beta_2 = 133°35´, c_2 = 3{,}7\ cm, \gamma_2 = 19°30´ \end{matrix}\right]$$

   ---

   d) Dán ΔABC: $b = 8\ cm, \alpha = 30°$. Proveďte diskusi o počtu řešení (případně vypočítejte velikost úhlu β), jestliže délka strany a postupně nabývá hodnot z množiny $\{2, 4, 6, 8, 10\}$. Náčrty!!!

a	2 cm	4 cm	6 cm	8 cm	10 cm
Počet řešení	0	1	2	1	1
β	neexistuje	90°	41°49´; 138°11´	30°	23°35´

2. **Kosinovou větu**, která je časově trochu náročnější než věta sinová, musíme použít tehdy, jestliže mezi prvky zadávajícími obecný trojúhelník není žádná dvojice strany a úhlu ležícího proti ní, to je v případě, že je trojúhelník zadán prvky sss nebo sus. Pokud jsou splněny podmínky pro existenci trojúhelníku (trojúhelníková nerovnost v případě sss, velikost zadaného úhlu menší než 180° v případě sus), je trojúhelník zadán jednoznačně a úloha má jediné řešení.

Př.: a) Dán ΔABC: $a = 2\ cm, b = 3\ cm, c = 4\ cm$ … zadání podle věty sss, splněna trojúhelníková nerovnost … jediné řešení

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \to \quad \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{2^2+3^2-4^2}{2.2.3} = \frac{-3}{12} = -\frac{1}{4} \quad \to \quad \gamma \sim 104°29'$

K dalším výpočtům už lze použít sinovou větu: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \to \quad \sin\alpha = \frac{a.\sin\gamma}{c} = \frac{2.\sin 104°29'}{4} \sim 0{,}48$

V prvním kroku jsme určili největší úhel v trojúhelníku ($\gamma = 104°29$), úhel α už tedy musí být ostrý: $\alpha = 28°57'$. Třetí úhel dopočítáme: $\beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 46°34'$.

[$\alpha = 28°57',\ \beta = 46°34',\ \gamma = 104°29'$]

---

b) Dán ΔABC: $a = 12\ cm, b = 7\ cm, c = 4\ cm$ … není splněna trojúhelníková nerovnost, trojúhelník s těmito délkami stran neexistuje.

---

c) Dán ΔABC: $c = 5\ cm, b = 7\ cm, \alpha = 29°14'$ … zadání podle věty sus, $\alpha < 180°$ .. jediné řešení

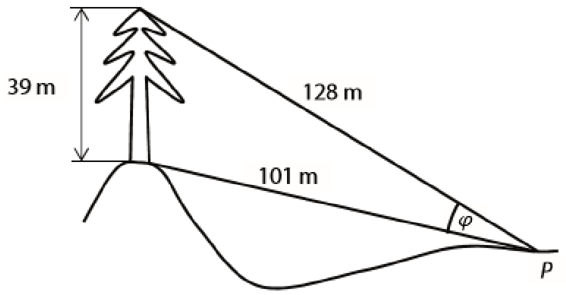
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \ \to \ a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha} = \sqrt{49 + 25 - 2.7.5.\cos 29°14'} \sim 3{,}6$

Zbývá vypočítat úhly β a γ. Použijeme už sinovou větu. Přednost dáme výpočtu úhlu γ. Leží proti kratší straně, bude nepochybně ostrý: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma} \quad \to \quad \sin\gamma = \frac{c.\sin\alpha}{a} = \frac{5.\sin 29°14'}{3{,}6} \sim 0{,}679 \quad \to$

$\to \ \gamma \sim 42°48' \quad \to \quad \beta = 180° - (\alpha + \gamma) = 107°58'$. [$a = 3{,}6\ cm, \gamma = 42°48', \beta = 107°58'$]

Základní poznatky:

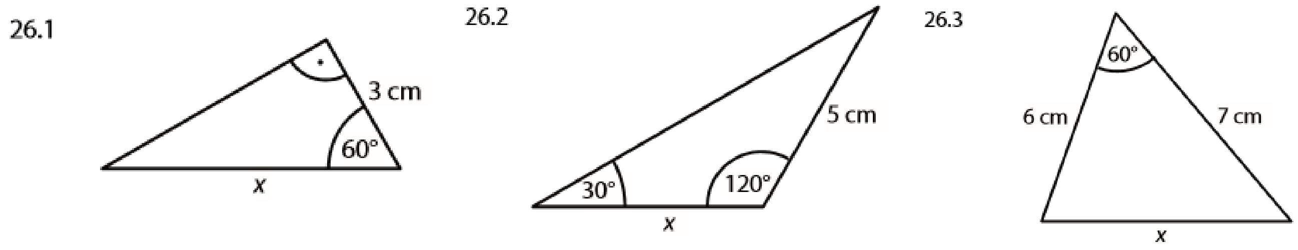
1) a) MA 2016 Svisle rostoucí strom je vysoký 39 m. Místo pozorování P je od paty kmene stromu vzdáleno 101 m a od vrcholu stromu 128 m. Z místa P se strom od paty kmene po jeho vrchol jeví v zorném úhlu φ .



Jaká je velikost zorného úhlu φ ?
Výsledek zaokrouhlete na celé stupně, tloušťku stromu zanedbáváme.

A) 14°
B) 18°
C) 21°
D) 23°
E) 38° [A]

b) MA 2015 Přiřaďte ke každému trojúhelníku (26.1 – 26.3) určenému trojicí veličin délku strany x (A – E).



A) x < 4 cm B) x = 4 cm C) x = 5 cm D) x = 6 cm E) x > 6 cm [D, C, E]

2) V trojúhelníku Δ ABC dopočítejte velikosti vnitřních úhlů případně velikosti zbývajících stran:

a) b = 25 cm, c = $\sqrt{2} \cdot 25$ cm, γ = 45° (Ssu) [a = 48,3 cm, α = 105°, β = 30°]

b) a = 38 cm, b = 48 cm, α = 37° (ssu) [1. řešení: β = 49°29', γ = 93°31', c = 63 cm
2. řešení: β = 130°31', γ = 12°29', c = 13,6 cm]

Typové příklady standardní náročnosti

3) V trojúhelníku Δ ABC dopočítejte velikosti vnitřních úhlů případně velikosti zbývajících stran: $S = 719{,}76\ cm^2$, $a = 51{,}32$ cm, $\beta = 126°12'$ [$\alpha = 32°28'$; $\gamma = 21°20'$; $b = 77{,}13$ cm; $c = 34{,}76$ cm]

4) V Δ ABC je dáno: $a = 4$ cm; $b = 6$ cm; $\gamma = 60°$. Vypočítejte: $c, \alpha, \beta, s_a, s_b, s_c, t_a, t_b, t_c, v_a, v_b, v_c, r, \rho, S_\Delta$.
[$2\sqrt{7}$ cm; 40°54'; 79°6'; 2 cm; 3 cm; $\sqrt{7}$ cm; 5,3 cm; 3,6 cm; 4,4 cm; 5,2 cm; 3,5 cm; 3,9 cm; 3,1 cm; 1,4 cm; 10,4 cm]

5) V lichoběžníku ABCD je dáno: $a = 30$ cm, $b = 13$ cm, $c = 16$ cm, $d = 15$ cm. Určete velikosti vnitřních úhlů a obsah lichoběžníku. [$\alpha = 53°8'$, $\beta = 67°23'$, $\gamma = 112°37'$, $\delta = 126°52'$, $S = 276\ cm^2$]

6) Pozorovatel vidí patu věže 69 m vysoké v hloubkovém úhlu $\alpha = 30°10'$ a vrchol věže v hloubkovém úhlu $\beta = 20°50'$. Jak vysoko nad horizontální rovinou, na které stojí věž, je pozorovatelovo stanoviště?
[200 m]

7) Sílu F = 150 N rozložte na dvě složky $\overrightarrow{F_1}$ a $\overrightarrow{F_2}$, které se silou $\overrightarrow{F}$ svírají úhly $\alpha = 25°30'$ a $\beta = 34°50'$.
[74,3 N; 98,6 N]