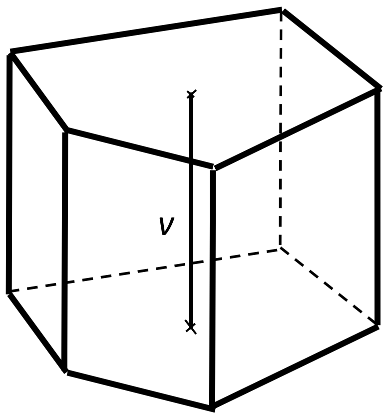
27 Objemy a povrchy těles – met.

Stručný přehled teorie

V…..objem
P….. obsah podstavy
Q…..obsah pláště
u….. tělesová úhlopříčka
u_1…..stěnová úhlopříčka

S…..povrch tělesa
v…..výška tělesa
r….. poloměr
d…..průměr

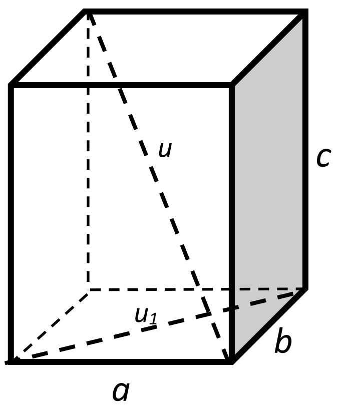
Hranol - je těleso, jehož podstavy tvoří dva shodné konvexní n-úhelníky ležící v rovnoběžných rovinách; pobočné hrany jsou rovnoběžky spojující příslušné vrcholy těchto n-úhelníků. Výška je vzdálenost jeho podstav.



$V = P \cdot v$
$S = 2P + Q$

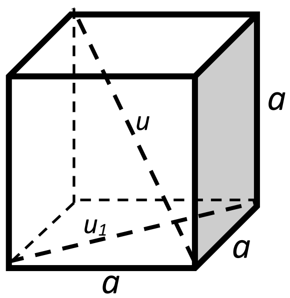
- ***Kolmý*** hranol - roviny podstav jsou kolmé na pobočné hrany.
- ***Kosý*** hranol - rovina podstavy svírá s pobočnou hranou kosý úhel.
- ***Pravidelný*** hranol - je kolmý hranol, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník.

Kvádr – je kolmý hranol, jehož podstavou je pravoúhlý rovnoběžník.



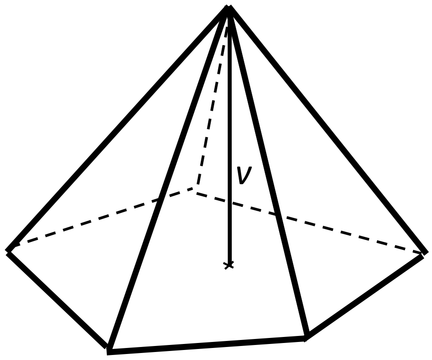
$V = abc$
$S = 2(ab + ac + bc)$
$u = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
$u_1 = \sqrt{a^2 + b^2}$

Krychle - je kolmý hranol, jehož podstavou je čtverec a všechny hrany jsou shodné



$V = a^3$
$S = 6a^2$
$u = a\sqrt{3}$
$u_1 = a\sqrt{2}$

Jehlan – je těleso, jehož podstavu tvoří konvexní n-úhelník, pobočné hrany jsou spojnice hlavního vrcholu s jednotlivými vrcholy podstavy. Výška je vzdálenost hlavního vrcholu od roviny podstavy.



$$V = \frac{1}{3} P.v$$
$$S = P + Q$$

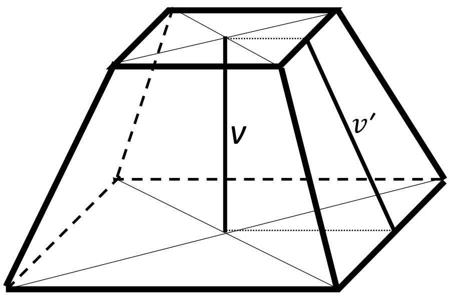
- ***Pravidelný*** jehlan - je jehlan, jehož podstavou je pravidelný n-úhelník a výška prochází středem podstavy. Pro něj platí:

$$Q = \frac{1}{2} o.v'$$

o ... obvod základny
v' ... výška pobočné stěny

- ***Čtyřstěn*** – je trojboký jehlan
- ***Pravidelný čtyřstěn*** – je trojboký jehlan, jehož všechny čtyři stěny tvoří shodné rovnostranné trojúhelníky

Komolý jehlan – vznikne seříznutím jehlanu rovinou rovnoběžnou s rovinou podstavy ve vzdálenosti v, která je menší než výška původního jehlanu. Pak v je výška komolého jehlanu.

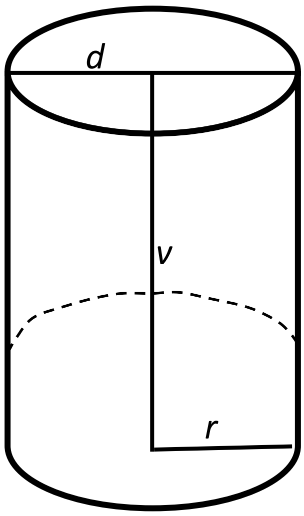


$$V = \frac{v}{3}\left(P_1 + \sqrt{P_1.P_2} + P_2\right)$$
$$S = P_1 + P_2 + Q$$

- ***Pravidelný* komolý** jehlan – je komolý jehlan, jehož obě podstavy jsou čtvercové. Pro něj platí: $\boldsymbol{Q = \frac{1}{2}.(o + o_1).v'}$

o, o₁ ...obvody podstav; v' ... výška pobočné stěny

Rotační válec - je těleso, které dostaneme rotací obdélníku kolem jeho jedné strany.



$$V = \pi r^2.v$$
$$Q = 2\pi rv$$
$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv = 2\pi r\,.\,(r + v)$$

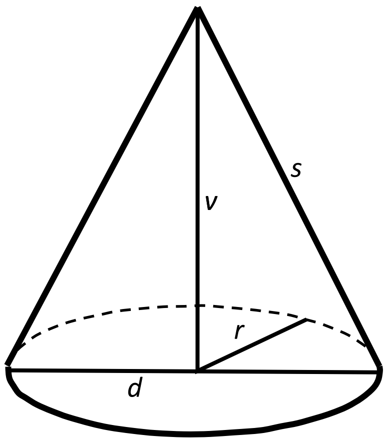
- ***Rovnostranný válec*** – je válec, jehož výška je rovna průměru podstavy. Jeho osový řez je čtverec.

- ***Kolmý eliptický válec*** – je válec, jehož podstavy jsou elipsy a jehož osa je kolmá k rovinám podstav.

$$V = \pi abv$$
$$Q = \pi v.\left[\frac{3}{2}.(a+b) - \sqrt{ab}\right]$$
$$S = \pi v.\left[\frac{3}{2}.(a+b) - \sqrt{ab}\right] + 2\pi ab$$

a … velikost hlavní poloosy
b … velikost vedlejší poloosy

Rotační kužel – je těleso, které dostaneme rotací pravoúhlého trojúhelníku kolem jedné odvěsny



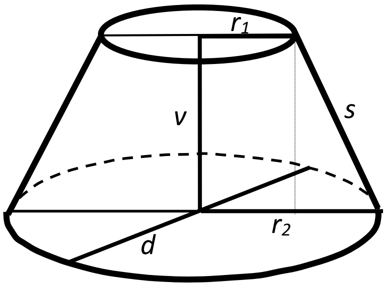
$$V = \frac{1}{3}\pi . r^2 . v$$

Q = πrs

S = $\pi r^2 + \pi rs = \pi r.(r + s)$

(s – je strana kužele)

Komolý rotační kužel – vznikne z rotačního kužele seříznutím rovinou rovnoběžnou s podstavou ve vzdálenosti v, která je menší než výška původního kužele.



$$V = \frac{1}{3}\pi . v . (r_1^2 + r_1 . r_2 + r_2^2)$$

$Q = \pi s.(r_1 + r_2)$

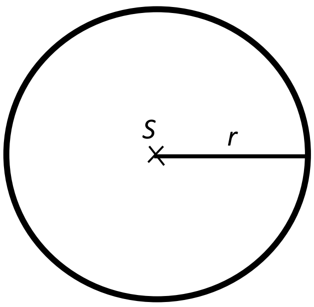
$$S = \pi . r_1^2 + \pi . r_2^2 + \pi s . (r_1 + r_2)$$

(s – strana komolého kužele;

$s = \sqrt{v^2 + (r_1 - r_2)^2}$)

Kulová plocha – je množina všech bodů v prostoru, které mají od pevného bodu S stejnou vzdálenost r. Bod S je střed, r je poloměr kulové plochy.

Koule – je množina bodů v prostoru, které mají od bodu S vzdálenost menší nebo rovnu r.

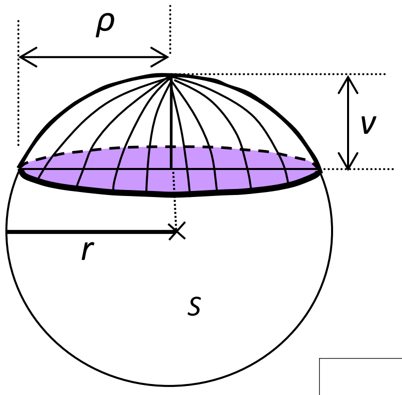


$$V = \frac{4}{3} . \pi r^3$$

S = 4 π r^2

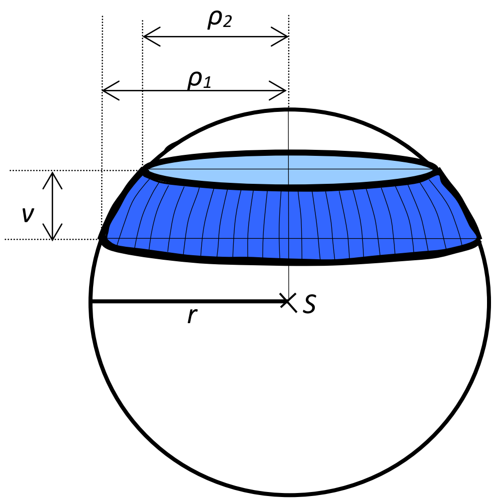
❖ *Části koule*:

- ***Kulová úseč***



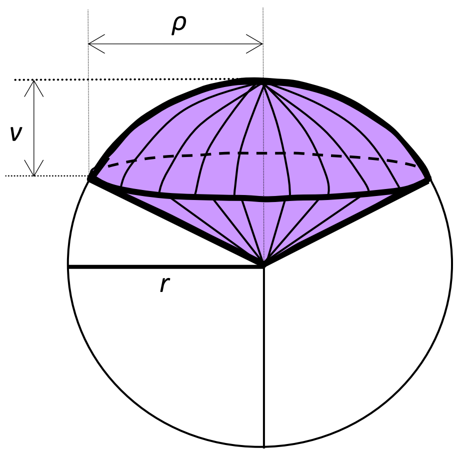
$$V=\pi.\rho^2.\frac{v}{2}+\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{v}{2}\right)^3=\frac{\pi.v}{6}.\left(3\rho^2+v^2\right)=\pi.v^2.\left(r-\frac{v}{3}\right)$$

- ***Kulová vrstva***



$$V=\frac{\pi.v}{6}.\left(3\rho_1^{\ 2}+3\rho_2^{\ 2}+v^2\right)$$

- ***Kulová výseč***



$$V=\frac{1}{3}.2\pi\, r\, v.r=\frac{2}{3}\pi\, r^2\, v$$

❖ ***Části kulové plochy:*** • ***Kulový vrchlík (povrch kulové úseče)***

$$Q = 2\pi r v$$
$$S = \pi.(2rv + \rho^2) = \pi v.(4r - v)$$

• ***Kulový pás (povrch kulové vrstvy)***

$$Q = 2\pi r v$$
$$S = \pi.(2rv + \rho_1^2 + \rho_2^2)$$

Met.: Toto téma je pro středoškoláky relativně velmi snadné. Většina těles byla dostatečně podrobně probrána už na základní škole - krychle, kvádry, hranoly, válce, jehlany, kužely. Žáci se na ZŠ krátce setkali dokonce i s komolými jehlany a kužely.

Na střední škole se tělesa kategorizují, přidává se k nim navíc pouze koule a její části. Samozřejmě se řeší komplikovanější úlohy s upravenými tělesy (otvory, průniky, …).

Čas na probírání by měl vyučující co nejvíc zkrátit. Může využít zpracované teorie k tomuto tématu, dát tuto teorii studentům k dispozici a stručně ji s nimi projít.

Před řešením úloh by měl učitel studentům jasně rozdělit vzorce potřebné pro výpočty objemů a povrchů těles na ty, které si mají pamatovat (bylo by jistě trapné, kdyby absolvent gymnázia neznal zpaměti vzorce pro objem a povrch krychle, válce, kužele, koule, …) a na ty, o nichž je třeba jen vědět, kde je najdou a jak se používají:

KRYCHLE	$V = a^3$
	$S = 6a^2$
	$u_s = a\sqrt{2}$ (stěnová úhlopříčka)
	$u_t = a\sqrt{3}$ (tělesová úhlopříčka)
KVÁDR	$V = abc$
	$S = 2ab + 2ac + 2bc = 2(ab + ac + bc)$
	$u_t = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
HRANOL	$V = S_P.v$
	$S = 2.S_P + Q$
JEHLAN	$V = \frac{1}{3}S_P.v$
	$S = S_P + Q$
VÁLEC	$V = \pi r^2 v$
	$S = 2\pi r^2 + 2\pi rv$
KUŽEL	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$
	$S = \pi r^2 + \pi rs$
KOULE	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
	$S = 4\pi r^2$

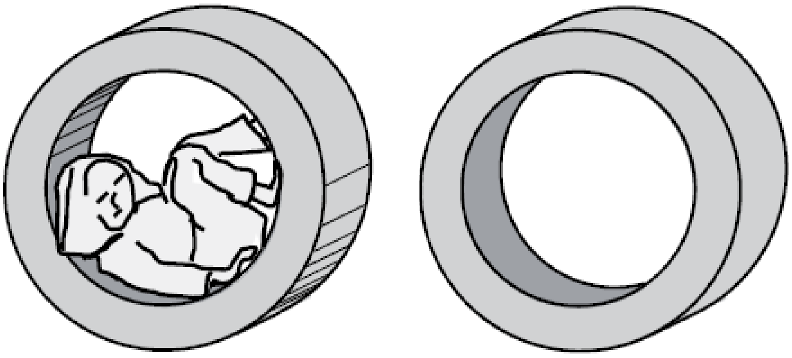
- části těles
- komolá tělesa
- …

Základní poznatky

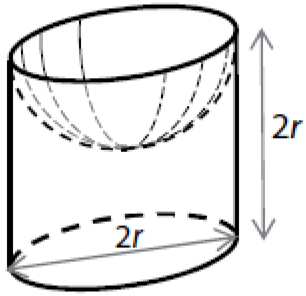
1. Délka tělesové úhlopříčky krychle je $3\sqrt{6}$ cm. Vypočítejte objem krychle. $\left[54\sqrt{2}\ cm^3\right]$
2. Hranu krychle zvětšíme dvakrát. Kolikrát se zvětší
   a) její objem? $[8x]$
   b) její povrch? $[4x]$
3. O kolik procent se zvětší objem krychle, jestliže se hrana krychle zvětší o 15%? $[o\ 52\%]$

Typové příklady standardní náročnosti

4. Rozměry kvádru jsou v poměru $2:3:6$, tělesová úhlopříčka má délku $14\ cm$. Určete povrch, objem a odchylku tělesové úhlopříčky od roviny podstavy. $[288\ cm^2, 288\ cm^3, 59°]$
5. Nálevka má tvar rovnostranného kužele. Vypočítejte obsah plochy smáčené vodou v případě, že do nálevky nalijete 3 litry vody. $\left[6\sqrt[3]{\pi}\ dm^2\right]$
6. (Státní maturita, květen 2017) Kapka rtuti tvaru koule o průměru 3 mm se rozdělila na dvě stejně velké kapičky tvaru koule. Jaký je poloměr nově vytvořené kapičky rtuti? Výsledek zaokrouhlete na setiny. $[1{,}19\ mm]$
7. (Státní maturita, květen 2017) Cvičební pomůcka z šedé pěny je rotační těleso, které lze popsat jako dutý válec. Dutý válec má výšku 70 cm, vnější průměr 180 cm a vnitřní průměr (tj. průměr dutiny) 120 cm. Jaký je povrch tělesa (včetně plochy uvnitř dutiny)? Výsledek zaokrouhlete na desetiny m^2. $[9{,}4\ m^2]$



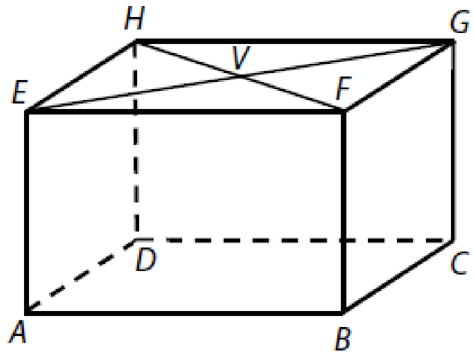
8. (Státní maturita, září 2016) V rovnostranném válci je vytvořena dutina tvaru polokoule. Poloměr podstavy válce i poloměr polokoule je $r = 10$ cm, výška válce je $2r$. Jaký je povrch vytvořeného tělesa (tj. válce s dutinou)? $[700\ \pi\ \ cm^2]$

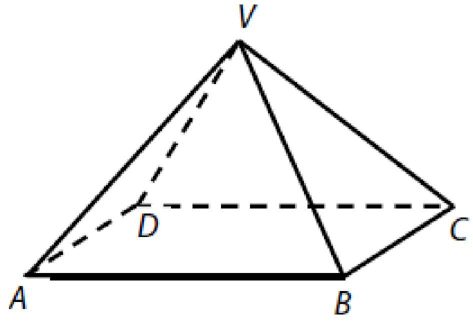


9. (Státní maturita, květen 2016) Z kvádru $ABCDEFGH$ se vyřízne jehlan $ABCDV$. Vrchol V je středem stěny $EFGH$. Určete,

a) kolikrát je objem kvádru větší než objem jehlanu? $[3\ krát]$

b) Je-li $|BD| = 4\sqrt{7}$ cm a $|BV| = 8$ cm, vypočtěte v cm výšku jehlanu. $[v = 6\ cm]$





10. Vypočítejte objem pravidelného trojbokého jehlanu, který má podstavnou hranu $a = 4$ cm a odchylku pobočné stěny od roviny podstavy $\beta = 45°$. $\left[\frac{8}{3}\ cm^3\right]$

11. Krychli vepište a opište kouli. Vypočítejte poměr objemů koule opsané, krychle a koule vepsané. $\left[3\pi\sqrt{3}: 6: \pi\right]$

Rozšiřující cvičení

12. Pravidelný komolý čtyřboký jehlan má podstavné hrany délek 6 cm a 4 cm. Boční hrana svírá s rovinou podstavy úhel 60°. Vypočtěte objem a povrch komolého jehlanu.

$$\left[\frac{76}{3}\sqrt{6}\ cm^3, 52 + 20\sqrt{7}\ cm^2\right]$$

13. Do koule daného objemu V je vepsán rotační kužel, jehož osový řez má při vrcholu úhel α. Určete objem tohoto kužele. $\left[V_2 = \frac{1}{2}\ V \sin^2 \alpha\ \cos^2 \frac{\alpha}{2}\right]$

14. Vypočítejte objem a povrch čočky, která vznikne průnikem dvou koulí o poloměrech 8 cm a 4 cm. Vzdálenost středů je 10 cm. $[30{,}58\ cm^3;\ \ 65{,}3\ cm^2]$