28 Kombinatorika – met.

Stručný přehled teorie

Kombinatorika je součástí **finitní matematiky**, která studuje konečné soubory (množiny a uspořádané k-tice, $k \in N$).

Kombinatorická pravidla

- **Kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat n_1 způsoby, druhý člen po výběru prvního n_2 způsoby, ..., k-tý člen po výběru všech předchozích n_k způsoby, je roven číslu p, pro které platí : $\boxed{p = n_1 . n_2 . \dots . n_k}$

- **Kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li $A_1, A_2, \dots, A_n$ konečné množiny, které mají po řadě $p_1, p_2, \dots, p_n$ prvků, přičemž každé dvě z nich jsou disjunktní, pak platí: $\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = p_1 + p_2 + \dots + p_n}$

Skupiny, v nichž záleží na pořadí prvků

Variace k-té třídy z n prvků bez opakování ,

- představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou ($k, n \in N$, $k \le n$).

počet všech popsaných variací: $V_{(k,\,n)} = n.(n-1).(n-2). \dots .(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Variace k-té třídy z n prvků s opakováním

- představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše k-krát ($k, n \in N$). počet všech popsaných variací: $V'_{(k,\,n)} = n^k$

Permutace z n prvků bez opakování = variace n-té třídy z n prvků bez opakování

- představuje každou uspořádanou **n**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje právě jednou.

počet všech popsaných permutací: $P_{(n)} = V_{(n,\,n)} = n.(n-1).(n-2). \dots .1 = n!$

Pozn.: n! …. čteme n faktoriál

Permutace k prvků s opakováním z n prvků ($k, n \in \mathbf{N}$, $k > n$)

– představuje každou uspořádanou **k**-tici sestavenou z těchto **n** prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje aspoň jednou.

Nechť se v uspořádané **k**-tici první prvek vyskytuje k_1-krát, druhý prvek k_2-krát, třetí prvek k_3-krát, ..., n-tý prvek k_n-krát. Přitom $k = k_1+k_2+\dots+k_n$.

počet všech popsaných permutací s opakováním: $\mathbf{P'_{k1,\,k2,\,\dots,\,kn}(k)} = \dfrac{k!}{k_1!.k_2!\dots k_n!}$

Skupiny, v nichž nezáleží na pořadí prvků

Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování

- je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou ($k, n \in N$, $k \le n$).

počet všech popsaných kombinací: $K_{(k,n)} = \frac{V_{(k,n)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$ čteme „n nad k“

Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním

- je neuspořádaná **k**-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše **k**-krát.

počet všech popsaných kombinací: $K'_{(k,n)} = \binom{n+k-1}{k}$

Pravidla pro práci s kombinačními čísly a faktoriály:

Faktoriál n!

Pro každé **n** přirozené: $n! = n.(n-1).(n-2).\ \dots\ .2.1$

Pro n = 0 definujeme: $0! = 1$

Kombinační číslo $\binom{n}{k}$

Pro všechna n, k celá nezáporná, $k \le n$: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!}$

Některé základní vlastnosti kombinačních čísel:

1) $\binom{n}{1} = n$ $\binom{n}{0} = 1$ $\binom{n}{n} = 1$ $\binom{0}{0} = 1$

2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ pro $k \le n$

3) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$ pro $k < n$.

Met.: Kombinatorika představuje relativně náročné téma, je však pro studenty zajímavá, hravá, pestrá. Učitel toho musí využít a dosáhnout u studentů co nejlepšího pochopení kombinatorických jevů a problémů a naučit je optimálním pohledům na kombinatorické úlohy a způsobům jejich řešení. Pokud by se mu to nepodařilo, měli by studenti potíže nejen s kombinatorikou, ale později i s mnoha dalšími oblastmi matematiky, do kterých ve větší či menší míře kombinatorika zasahuje (např. Pravděpodobnost, …).

Úvod kombinatoriky by měl rozhodně patřit kapitole o faktoriálech a kombinačních číslech. Studenti by měli být důkladně seznámeni s oběma těmito matematickými objekty, jejich nadefinováním, podmínkami jejich existence, pravidly pro počítání s nimi, měli by dokonale zvládat středoškolskou úroveň úprav výrazů, důkazů rovností i řešení rovnic a nerovnic s faktoriály a kombinačními čísly. Až budou řešit např. slovní kombinatorické úlohy, musí už mít faktoriály a kombinační čísla „v malíčku“.

Řada kombinatorických úloh potřebuje k řešení znalost dvou základních pravidel, tedy kombinatorického pravidla součtu a kombinatorického pravidla součinu. Jakmile učitel s těmito pravidly studenty seznámí, měl by zařadit několik jednoduchých úloh, díky kterým studenti jejich podstatu lépe pochopí:

Př. V první restauraci nabízejí 3 druhy polévek, 8 druhů hlavních jídel a 4 druhy nápojů. Ve druhé restauraci mají jen 2 druhy polévek, ale 10 druhů hlavních jídel a 5 druhů nápojů. Kolika způsoby si host může vybrat oběd za předpokladu, že
a) zvolil první restauraci a bude jíst hlavní jídlo a nápoj?
b) zvolil první restauraci a bude jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj?
c) bude vybírat restauraci a jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj?

Řeš.:
a) hlavní jídlo … 8 možností,
nápoj … 4 možnosti
počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) … 8.4 = 32

b) polévka … 3 možnosti,
hlavní jídlo … 8 možností,
nápoj … 4 možnosti
počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) … 3.8.4 = 96

c) první restaurace … 3.8.4 = 96 možností
druhá restaurace … 2.10.5 = 100 možností
počet všech možností (kombinatorické pravidlo součtu) … 96 + 100 = 196

Učitel musí k výuce přistupovat se stálým vědomím toho, že kombinatorika studuje dva typy konečných souborů, které jsou principiálně odlišné:
- uspořádané k-tice, $k \in N$, v nichž záleží na pořadí prvků,
- množiny, ve kterých na pořadí prvků nezáleží.

Učitel musí především naučit studenty spolehlivě rozpoznat, s kterým z uvedených dvou typů souborů mají v zadané kombinatorické úloze pracovat. Zkušenosti ukazují, že to některým studentům dělá občas potíže.

Pozn.: Studentům je dobré poradit, aby si ze zadaných prvků vytvořili třeba trojici, pak v ní vyměnili pořadí prvků a promysleli si, zda jde o tutéž trojici nebo o trojici jinou:

Př.1: Nechť jsou Adam, Bedřich a Cyril tři studenti. Vytvořme z nich trojici pro
a) službu ve třídě: $\{A,B,C\} = \{B,C,A\} = \{A,C,B\}$
b) první tři místa v soutěži: $[A,B,C] \neq [B,C,A] \neq [A,C,B]$

Př.2: Tóny c, e, g zahrané
a) najednou (souzvuk) na klavír: $\{c,e,g\} = \{e,c,g\} = \{g,c,e\}$
b) postupně na trubku (jako souzvuk nelze): $[c,e,g] \neq [e,c,g] \neq [g,c,e]$.

Vzorce, kterých je kombinatorika plná, si studenti jistě lépe zapamatují, když je jimi učitel nezasype, ale ukáže jim, jak se odvozují. Navíc, a to je jistě ještě mnohem důležitější, tak studenti uvidí další příklad toho, jak se matematika buduje a tvoří. Vzorce je třeba dokázat matematickou indukcí (některé – podle času).

1. **Konečné soubory prvků, ve kterých záleží na pořadí prvků**

- **variace**,
- **variace s opakováním**,
- **permutace**,
- **permutace s opakováním**

① **Variace k-té třídy z n prvků $V_{(k,n)}-?$** (prvky se nesmí opakovat)

$M=\{1,2,3,4,5\}$

$V_{(1,5)}-?$	1	2	3	4	5	$V_{(1,5)}=5$
$V_{(2,5)}-?$	x	12	13	14	15	
	21	x	23	24	25	
	31	32	x	34	35	$V_{(2,5)}=5.4$
	41	42	43	x	45	
	51	52	53	54	x	

Počet řádků

Prvků v řádku

$V_{(3,5)}-?$ 231 234 235 z každé uspořádané dvojice se vytvoří 3 uspořádané trojice

521 523 524 $V_{(3,5)}=5.4.3$

....

Zobecnění: $M=\{1,2,3,\ldots,n\}$

$V_{(1,n)}=n$

$V_{(2,n)}=n.(n-1)$

$V_{(3,n)}=n.(n-1).(n-2)$

....

$$\boxed{V_{(k,n)}}=\boxed{\boldsymbol{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1)}}=\frac{n.(n-1).(n-2).\ldots.(n-k+1).\boldsymbol{(n-k).\ldots.3.2.1}}{\boldsymbol{(n-k).\ldots.3.2.1}}=\boxed{\frac{\boldsymbol{n!}}{\boldsymbol{(n-k)!}}}$$

---

② **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním $V'_{(k,n)}-?$**

$M=\{1,2,3,4,5\}$

$V'_{(1,5)}-?$	1	2	3	4	5	$V'_{(1,5)}=5$
$V'_{(2,5)}-?$	11	12	13	14	15	
	21	22	23	24	25	
	31	32	33	34	35	$V'_{(2,5)}=5.5=5^2$
	41	42	43	44	45	
	51	52	53	54	55	

$V'_{(3,5)}-?$ 231 232 233 234 235 z každé uspořádané dvojice se vytvoří 5 uspořádaných trojic

521 522 523 524 525 $V'_{(3,5)}=5^3$

....

Zobecnění: $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$\boldsymbol{V'_{(1,n)}} = n$

$\boldsymbol{V'_{(2,n)}} = n^2$

$\boldsymbol{V'_{(3,n)}} = n^3$

....

$$\boxed{\boldsymbol{V'_{(k,n)} = n^k}}$$

---

③ Permutace z n prvků $\boldsymbol{P_{(n)}}$ – ? (prvky se nesmí opakovat)

Permutace z n prvků = variace k-té třídy z n prvků:

$\boldsymbol{P_{(n)}} = V_{(n,n)} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$ $\boxed{\boldsymbol{P_{(n)} = n!}}$

---

④ Permutace s opakováním $\boldsymbol{P'_{(k)}}$ – ?

$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}\}$ V této množině je $k_1 = 4$ prvků typu ***x*** a $k_2 = 3$ prvků typu ***y***, tedy celkem $k = k_1 + k_2 = 7$ prvků.

Počet permutací (bez opakování) z těchto prvků je $P_{(7)} = 7!$.

Jedna z těchto permutací je např. $[\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x_3}, \boldsymbol{x_4}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}]$. Kdybychom z této permutace tvořili další tak, že bychom všechny prvky typu *y* nechali na „svých“ místech a „promíchávali“ bychom pouze prvky typu ***x***, získali bychom spolu s původní celkem 4! permutací. Ty všechny by ovšem splynuly v jedinou permutaci v okamžiku, kdy bychom přestali rozlišovat prvky typu ***x***, tj. zavedli bychom $x_1, = x_2 = x_3 = x_4 = x$. Množina *M* by se změnila na $M = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}\}$, vybraná permutace by se změnila na $[\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y_2}, \boldsymbol{y_3}]$ a počet permutací (teď už s opakováním prvku *x*) by se změnil na $\frac{7!}{4!}$.

Když přestaneme rozlišovat navíc i prvky typu *y*, bude $M = \{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\}$ a počet permutací s opakováním bude $P'_{4,3}(7) = \frac{7!}{4!.3!}$

Zobecnění: $M = \{\underbrace{x, \ldots, x}_{k_1}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k_2}, \ldots\ldots, \underbrace{z, \ldots, z}_{k_n}\}$ Přitom $k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k$.

Počet všech permutací s opakováním z prvků množiny *M* je $\boxed{\boldsymbol{P'_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(k) = \frac{k!}{k_1!.k_2!.\ldots.k_n!}}}$

---

2. Konečné soubory prvků, ve kterých nezáleží na pořadí prvků – kombinace, – kombinace s opakováním

① Kombinace k-té třídy z n prvků $K_{(k,n)}$ – ? (prvky se nesmí opakovat)

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Vytvořme variace 3. třídy z těchto pěti prvků. Je jich $V_{(3,5)} = \frac{5!}{(5-3)!}$.

Uvědomme si, že např. 123, 132, 213, 231, 312, 321 představuje 3! = 6 různých variací, ale jedinou kombinaci třetí třídy z pěti prvků. Podobně každých 3! variací vytvořených „promícháním" každé trojice prvků množiny *M* představuje jedinou kombinaci. Proto $K_{(3,5)} = \frac{V_{(3,5)}}{3!} = \frac{5!}{(5-3)!.3!}$.

Zobecnění: $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ $\boxed{\boldsymbol{K_{(k,n)} = \frac{V_{(k,n)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \binom{n}{k}}}$

Pozn.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!.k!} = \frac{n.(n-1).....(n-k+1).(n-k).(n-k-1).....3.2.1}{(n-k).(n-k-1).....3.2.1.k!} = \frac{n.(n-1).....(n-k+1).(n-k).(n-k-1).....3.2.1}{(n-k).(n-k-1).....3.2.1.k!} =$

$= \frac{n.(n-1).....(n-k+1)}{k!}$ ... Skutečnost, že v čitateli i jmenovateli posledního zlomku je stejný počet činitelů, umožňuje velmi zjednodušit výpočet kombinačních čísel:

Např.: 1) $\binom{8}{2} = \frac{8.7}{2.1} = 28$ místo $\binom{8}{2} = \frac{8!}{(8-2)!.2!} = \frac{8.7.6!}{6!.2!} = \frac{8.7}{2.1} = 28$;

2) $\binom{20}{18} = \binom{20}{2} = \frac{20.19}{2.1} = 190$ .... využití pravidla $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

---

② Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním $K'_{(k,n)}$ – ?

Aby učitel dosáhl pochopení tvorby kombinací s opakováním u co největšího počtu studentů, měl by jim na začátku ukázat několik konkrétních příkladů:

Př.: Nechť $M = \{1, 2, 3\}$. Vypište několik kombinací s opakováním páté třídy ze tří prvků množiny M a pokuste se zjistit, kolik takových kombinací existuje.

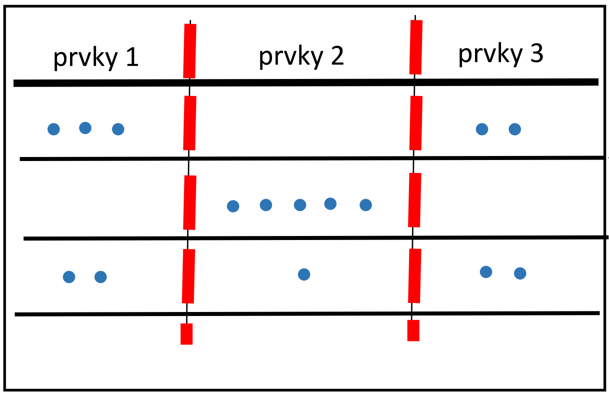
Řeš.: $K'_{(5,3)}$ – ?

$\{1, 1, 1, 3, 3\}$
$\{2, 2, 2, 2, 2\}$
$\{3, 3, 2, 1, 1\}$
....

Jak zjistit počet všech možných kombinací s opakováním páté třídy ze tří prvků?

1. způsob .... Použít vzorec $K'_{(k,n)} = \binom{n+k-1}{k}$, tedy $K'_{(5,3)} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = \binom{7}{2} = \frac{7.6}{2.1} = 21$

2. způsob .... Využít skutečnosti, že každou kombinaci s opakováním lze jednoduše převést na permutaci s opakováním.
V případě tří prvků stačí vytvořit prostor s dvěma oddělovači (oddělovačů je vždy o jeden méně než prvků – viz obrázek). Pak zvolíme dva grafické znaky:
- první pro oddělovač .... např. |
- druhý jako značku registrující přítomnost prvku v „jeho" prostoru .... např. •



Zápis • • • | | • • znamená $\{1, 1, 1, 3, 3\}$

Zápis | • • • • • | znamená $\{2, 2, 2, 2, 2\}$

Zápis • • | • | • • znamená $\{1, 1, 2, 3, 3\} =$
$= \{3, 3, 2, 1, 1\}$

Je evidentní, že všechny kombinace s opakováním páté třídy ze tří prvků dokážeme zobrazit pomocí pouhých dvou druhů znaků: pět modrých teček odpovídá pěti použitým prvkům (páté třídě), dvě červené rysky představují dva potřebné oddělovače).
Zároveň je jasné, že na pořadí těchto znaků záleží. Proto musíme pracovat s permutacemi s opakováním: $K'_{(5,3)} = P'_{5,2}(7) = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6.5!}{5!.2!} = \frac{7.6}{2.1} = 21$

Tento druhý způsob řešení úlohy je jednoduchý, srozumitelný a logický, takže jej studenti mohou používat vždy, když hledají počet kombinací s opakováním, a to aniž by si museli pamatovat nepříjemný vzorec.
Navíc díky němu může učitel studentům ukázat, jak lze ke vzorci $\boxed{K'_{(k,n)} = \binom{n+k-1}{k}}$ dojít:

$$K'_{(5,3)} = P'_{5,2}(7) = \frac{7!}{5!.2!} = \frac{7.6.5!}{5!.2!} = \frac{7.6}{2.1} = \binom{7}{2} = \binom{7}{5} = \binom{3+5-1}{5}.$$

Základní poznatky:

Poznámka: Ve výsledcích příkladů 2 – 6 této části uveďte také druh kombinatorické skupiny, kterou příklad procvičuje.

1) MA 2017 Čtyřciferné přirozené číslo se má sestavit ze čtyř **různých** číslic. Na prvním místě má být číslice 2 a na místě desítek lichá číslice. (Daným podmínkám vyhovují např. čísla 2 430 a 2 793.) Kolik různých čísel je možné uvedeným způsobem sestavit?

a) 21 b) 240 c) 280 d) 360 e) jiný počet [C]

2) Je dána množina M = {1, 2, 3, 4, 5}.
 a) Kolik trojciferných čísel, v nichž se neopakují cifry, lze vytvořit z jejich prvků?
 [60, variace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]
 b) Kolik z nich je dělitelných pěti?
 [12, variace bez opakování]
 c) Kolik pěticiferných čísel bez opakování číslic lze vytvořit z prvků množiny M?
 [120, permutace z 5 prvků (bez opakování) nebo variace 5. třídy z 5 prvků bez opakování]

Met.: Učitel by měl ukázat studentům dva způsoby řešení a nechat na studentech, který z nich si vyberou, až budou psát prověrku:

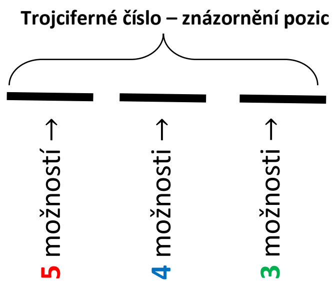
1. způsob: užitím vzorců a) $V_{(3,5)} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5.4.3 = 60$;

b) Poslední cifra musí být 5, obsazujeme tedy jen první dvě pozice v čísle a nesmíme už použít 5 … $V_{(2,4)} = \frac{4!}{2!} = 12$;

c) $P_{(5)} = 5! = 120$.

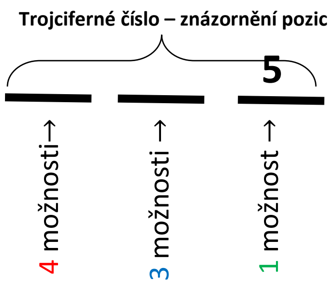
2. způsob: užitím kombinatorického pravidla součinu:

a)



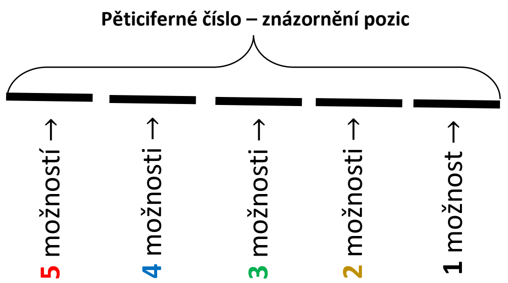
Počet možností: **5.4.3 = 60**

b)



Počet možností: **4.3.1** = **12**

c)



Počet možností: 5.4.3.2.1 = 120

Pozn.: Zadání úlohy by měl učitel ještě zkomplikovat tím, že mezi prvky množiny M zařadí nulu. Pak může být např. $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Předchozí výpočet je potom třeba doplnit o vyřazení všech trojic, které mají nulu na prvním místě.
Úlohu lze nejprve využít jako prémiovou úlohu, jejíž správné řešení může učitel odměnit …

3) Řešte úlohu č. 2 pro případ, kdy se cifry mohou opakovat.

[a) 125, variace 3. třídy z 5 prvků s opakováním b) 25, variace s opakováním c) 3125, variace 5. třídy z 5 prvků s opakováním]

4) Kolik existuje osmiciferných čísel, ve kterých jsou 3 dvojky, 1 pětka a 4 šestky?

[280, 8 členné permutace s opakováním typu $P'_{3,1,4}(8)$]

5) Kolik existuje tříprvkových podmnožin množiny M?

[10, kombinace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]

6) Student psal v matematice během pololetí 7 písemných prací a známky na konci pololetí uspořádal od nejlepších po nejhorší, např. 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5. Kolik různých výsledků mohl student získat?

[330, kombinace 7. třídy z 5 prvků s opakováním]

7) Vyjádřete jedním kombinačním číslem:

a) $\binom{17}{8}+\binom{17}{9}$ b) $\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\binom{6}{3}$ [a) $\binom{18}{9}$ b) $\binom{7}{4}$]

Typové příklady standardní náročnosti

8) MA 2016 Je dána rovnice s neznámou $n \in N$: $\frac{80!}{9!}+\frac{80!}{10!}=\frac{n\cdot 80!}{10!}$

Jaké je řešení rovnice? A) 11 B) 10 C) 9 D) 8 E) jiné řešení

[A]

9) Kolik přímek je určeno 12 body, jestliže:

a) žádné tři body neleží na přímce? b) čtyři z nich leží na přímce? [66, 61]

10) S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:

a) všech možných pořadí jejich vystoupení.
b) všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A po E.
c) všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A ihned po E

[720, 360, 120]

11) MA 2014 Trenér vybírá z 5 děvčat a 4 chlapců šestičlennou skupinu, v níž budou 3 dívky a 3 chlapci. Kolika způsoby lze šestičlennou skupinu za těchto podmínek sestavit?

A) 16 B) 20 C) 40 D) 180 E) jiným počtem

[C]

12) V sérii 12 výrobků jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze z nich vybrat 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné? [378]

13) a) Z kolika prvků lze vytvořit 600 variací druhé třídy bez opakování? [25]

b) Kolik prvků dává 55 kombinací 2. třídy bez opakování? [11]

14) a) Upravte a určete podmínky pro n:

$$\frac{n^2-9}{(n+3)!}+\frac{6}{(n+2)!}-\frac{1}{(n+1)!}$$ [$\frac{1}{(n+2)!}$, $n\in Z; n\geq -1$]

b) Řešte v Z: $\frac{(n+6)!}{(n+4)!}-n\cdot\frac{(n-4)!}{(n-5)!}=5n+80$ [5]

15) Řešte rovnici a nerovnici:

a) $\binom{n-1}{n-3}+\binom{n-2}{n-4}=9$ b) $\binom{n}{2}+\binom{n-3}{2}+\binom{n-6}{2}<72$ [a) {5}, b) {8, 9}]

Rozšiřující cvičení

16) V novinovém stánku lze koupit 10 druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v 50 exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit:

a) 15 pohledů b) 51 pohledů c) 8 různých pohledů

[1 307 504; K´(51, 10) - 10; 45]