

## 28 Kombinatorika – met.

### Stručný přehled teorie

---

**Kombinatorika** je součástí **finitní matematiky**, která studuje konečné soubory (množiny a uspořádané k-tice,  $k \in \mathbb{N}$ ).

### **Kombinatorická pravidla**

#### ➤ **Kombinatorické pravidlo součinu**

Počet všech uspořádaných k-tic, jejichž první člen lze vybrat  $n_1$  způsoby, druhý člen po výběru prvního  $n_2$  způsoby, ..., k-tý člen po výběru všech předchozích  $n_k$  způsoby, je roven číslu  $p$ , pro které platí:  $p = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$

#### ➤ **Kombinatorické pravidlo součtu**

Jsou-li  $A_1, A_2, \dots, A_n$  konečné množiny, které mají po řadě  $p_1, p_2, \dots, p_n$  prvků, přičemž každé dvě z nich jsou disjunktní, pak platí:  $|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = p_1 + p_2 + \dots + p_n$

### **Skupiny, v nichž záleží na pořadí prvků**

#### **Variace k-té třídy z n prvků bez opakování**,

- představuje každou uspořádanou k-tici sestavenou z těchto  $n$  prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou ( $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$ ).

$$\text{počet všech popsanych variací: } V_{(k, n)} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

#### **Variace k-té třídy z n prvků s opakováním**

- představuje každou uspořádanou k-tici sestavenou z těchto  $n$  prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše k-krát ( $k, n \in \mathbb{N}$ ).

$$\text{počet všech popsanych variací: } V'_{(k, n)} = n^k$$

#### **Permutace z n prvků bez opakování = variace n-té třídy z n prvků bez opakování**

- představuje každou uspořádanou n-tici sestavenou z těchto  $n$  prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje právě jednou.

$$\text{počet všech popsanych permutací: } P_{(n)} = V_{(n, n)} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Pozn.:  $n!$  .... čteme  $n$  faktoriál

#### **Permutace k prvků s opakováním z n prvků** ( $k, n \in \mathbb{N}, k > n$ )

- představuje každou uspořádanou k-tici sestavenou z těchto  $n$  prvků tak, že se v ní každý prvek vyskytuje aspoň jednou.

Nechť se v uspořádané k-tici první prvek vyskytuje  $k_1$ -krát, druhý prvek  $k_2$ -krát, třetí prvek  $k_3$ -krát, ..., n-tý prvek  $k_n$ -krát. Přitom  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ .

$$\text{počet všech popsanych permutací s opakováním: } P'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(\mathbf{k}) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$$

## Skupiny, v nichž nezáleží na pořadí prvků

### Kombinace k-té třídy z n prvků bez opakování

- je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše jednou  
( $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$ ).

$$\text{počet všech popsaných kombinací: } K_{(k, n)} = \frac{V_{(k, n)}}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k} \quad \text{čteme „n nad k“}$$

### Kombinace k-té třídy z n prvků s opakováním

- je neuspořádaná k-tice sestavená z těchto prvků tak, že se v ní každý z nich vyskytuje nejvýše k-krát.

$$\text{počet všech popsaných kombinací: } K'_{(k, n)} = \binom{n+k-1}{k}$$

## Pravidla pro práci s kombinačními čísly a faktoriály:

### Faktoriál n!

Pro každé n přirozené:  $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$

Pro  $n = 0$  definujeme:  $0! = 1$

### Kombinační číslo $\binom{n}{k}$

Pro všechna n, k celá nezáporná,  $k \leq n$ :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Některé základní vlastnosti kombinačních čísel:

$$1) \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{0}{0} = 1$$

$$2) \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{pro } k \leq n$$

$$3) \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{pro } k < n.$$

---

**Met.:** Kombinatorika představuje relativně náročné téma, je však pro studenty zajímavá, hravá, pestrá. Učitel toho musí využít a dosáhnout u studentů co nejlepšího pochopení kombinatorických jevů a problémů a naučit je optimálním pohledům na kombinatorické úlohy a způsobům jejich řešení. Pokud by se mu to nepodařilo, měli by studenti potíže nejen s kombinatorikou, ale později i s mnoha dalšími oblastmi matematiky, do kterých ve větší či menší míře kombinatorika zasahuje (např. Pravděpodobnost, ...).

**Úvod kombinatoriky** by měl rozhodně patřit kapitole **o faktoriálech a kombinačních číslech**. Studenti by měli být důkladně seznámeni s oběma těmito matematickými objekty, jejich nadefinováním, podmínkami jejich existence, pravidly pro počítání s nimi, měli by dokonale zvládat středoškolskou úroveň úprav výrazů, důkazů rovností i řešení rovnic a nerovnic s faktoriály a kombinačními čísly. Až budou řešit např. slovní kombinatorické úlohy, musí už mít faktoriály a kombinační čísla „v malíčku“.

Řada kombinatorických úloh potřebuje k řešení znalost dvou základních pravidel, tedy **kombinatorického pravidla součtu** a **kombinatorického pravidla součinu**. Jakmile učitel s těmito pravidly studenty seznámí, měl by zařadit několik jednoduchých úloh, díky kterým studenti jejich podstatu lépe pochopí:

**Př.** V první restauraci nabízejí 3 druhy polévek, 8 druhů hlavních jídel a 4 druhy nápojů. Ve druhé restauraci mají jen 2 druhy polévek, ale 10 druhů hlavních jídel a 5 druhů nápojů. Kolika způsoby si host může vybrat oběd za předpokladu, že

- zvolil první restauraci a bude jíst hlavní jídlo a nápoj?
- zvolil první restauraci a bude jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj?
- bude vybírat restauraci a jíst polévku, hlavní jídlo a nápoj?

**Řeš.:**

- hlavní jídlo ... 8 možností,  
nápoj ... 4 možnosti  
počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) ...  $8 \cdot 4 = 32$
- polévka ... 3 možnosti,  
hlavní jídlo ... 8 možností,  
nápoj ... 4 možnosti  
počet všech možností (kombinatorické pravidlo součinu) ...  $3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$
- první restaurace ...  $3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$  možností  
druhá restaurace ...  $2 \cdot 10 \cdot 5 = 100$  možností  
počet všech možností (kombinatorické pravidlo součtu) ...  $96 + 100 = 196$

Učitel musí k výuce přistupovat se stálým vědomím toho, že **kombinatorika studuje** dva typy konečných souborů, které jsou principiálně odlišné:

- uspořádané k-tice**,  $k \in \mathbb{N}$ , v nichž **záleží na pořadí** prvků,
- množiny**, ve kterých **na pořadí** prvků **nezáleží**.

Učitel musí především naučit studenty spolehlivě rozpoznat, s kterým z uvedených dvou typů souborů mají v zadané kombinatorické úloze pracovat. Zkušenosti ukazují, že to některým studentům dělá občas potíže.

**Pozn.:** Studentům je dobré poradit, aby si ze zadaných prvků vytvořili třeba trojici, pak v ní vyměnili pořadí prvků a promysleli si, zda jde o tutéž trojici nebo o trojici jinou:

**Př.1:** Nechtě jsou Adam, Bedřich a Cyril tři studenti. Vytvořme z nich trojici pro

- službu ve třídě:  $\{A, B, C\} = \{B, C, A\} = \{A, C, B\}$
- první tři místa v soutěži:  $[A, B, C] \neq [B, C, A] \neq [A, C, B]$

**Př.2:** Tóny c, e, g zahrané

- najednou (souzvuk) na klavír:  $\{c, e, g\} = \{e, c, g\} = \{g, c, e\}$
- postupně na trubku (jako souzvuk nelze):  $[c, e, g] \neq [e, c, g] \neq [g, c, e]$ .

Vzorce, kterých je kombinatorika plná, si studenti jistě lépe zapamatují, když je jim učitel nezasype, ale ukáže jim, jak se odvozují. Navíc, a to je jistě ještě mnohem důležitější, tak studenti uvidí další příklad toho, jak se matematika buduje a tvoří. Vzorce je třeba dokázat matematickou indukci (některé – podle času).

1. Konečné soubory prvků, ve kterých záleží na pořadí prvků

- variace,
- variace s opakováním,
- permutace,
- permutace s opakováním

① Variace k-té třídy z n prvků  $V_{(k,n)}$ -? (prvky se nesmí opakovat)

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V_{(1,5)}$ -?	1	2	3	4	5	$V_{(1,5)} = 5$
$V_{(2,5)}$ -?	x	12	13	14	15	
	21	x	23	24	25	
	31	32	x	34	35	$V_{(2,5)} = 5 \cdot 4$
	41	42	43	x	45	
	51	52	53	54	x	

$V_{(3,5)}$ -?  $\rightarrow$  (231) (234) (235) z každé uspořádané dvojice se vytvoří 3 uspořádané trojice

$\rightarrow$  (521) (523) (524)  $V_{(3,5)} = 5 \cdot 4 \cdot 3$

.....

**Zobecnění:**  $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$V_{(1,n)} = n$

$V_{(2,n)} = n \cdot (n - 1)$

$V_{(3,n)} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)$

.....

$V_{(k,n)} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) \cdot (n - k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n - k) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n - k)!}$

② Variace k-té třídy z n prvků s opakováním  $V'_{(k,n)}$ -?

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$V'_{(1,5)}$ -?	1	2	3	4	5	$V'_{(1,5)} = 5$
$V'_{(2,5)}$ -?	11	12	13	14	15	
	21	22	23	24	25	
	31	32	33	34	35	$V'_{(2,5)} = 5 \cdot 5 = 5^2$
	41	42	43	44	45	
	51	52	53	54	55	

$V'_{(3,5)}$ -?  $\rightarrow$  ( ) z každé uspořádané dvojice se vytvoří 5 uspořádaných trojic

$\rightarrow$  ( )  $V'_{(3,5)} = 5^3$

.....

**Zobecnění:**  $M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$

$$V'_{(1,n)} = n$$

$$V'_{(2,n)} = n^2$$

$$V'_{(3,n)} = n^3$$

.....

$$V'_{(k,n)} = n^k$$

③ **Permutace z n prvků  $P_{(n)}$ —?** (prvky se nesmí opakovat)

Permutace z n prvků = variace k-té třídy z n prvků:

$$P_{(n)} = V_{(n,n)} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$P_{(n)} = n!$$

④ **Permutace s opakováním  $P'_{(k)}$ —?**

$$M = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3\}$$

V této množině je  $k_1 = 4$  prvků typu  $x$  a  $k_2 = 3$  prvků typu  $y$ , tedy celkem  $k = k_1 + k_2 = 7$  prvků.

Počet permutací (bez opakování) z těchto prvků je  $P_{(7)} = 7!$ .

Jedna z těchto permutací je např.  $[x_1, x_2, y_1, x_3, x_4, y_2, y_3]$ . Kdybychom z této permutace tvořili další tak, že bychom všechny prvky typu  $y$  nechali na „svých“ místech a „promíchávali“ bychom pouze prvky typu  $x$ , získali bychom spolu s původní celkem  $4!$  permutací. Ty všechny by ovšem splynuly v jedinou permutaci v okamžiku, kdy bychom přestali rozlišovat prvky typu  $x$ , tj. zavedli bychom  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$ . Množina  $M$  by se změnila na  $M = \{x, x, x, x, y_1, y_2, y_3\}$ , vybraná permutace by se změnila na  $[x, x, y_1, x, x, y_2, y_3]$  a počet permutací (teď už s opakováním prvku  $x$ ) by se změnil na  $\frac{7!}{4!}$ .

Když přestaneme rozlišovat navíc i prvky typu  $y$ , bude  $M = \{x, x, x, x, y, y, y\}$  a počet permutací s opakováním bude  $P'_{4,3}(7) = \frac{7!}{4! \cdot 3!}$

**Zobecnění:**

$$M = \underbrace{\{x, \dots, x\}}_{k_1}, \underbrace{\{y, \dots, y\}}_{k_2}, \dots, \underbrace{\{z, \dots, z\}}_{k_n}$$

Přitom  $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ .

Počet všech permutací s opakováním z prvků množiny  $M$  je  $P'_{k_1, k_2, \dots, k_n}(k) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \dots \cdot k_n!}$



prvky 1	prvky 2	prvky 3	Zápis	znamená
• • •		• •	• • •    • •	{1, 1, 1, 3, 3}
	• • • • •		• • • • •	{2, 2, 2, 2, 2}
• •	•	• •	• •   •   • •	{1, 1, 2, 3, 3} = = {3, 3, 2, 1, 1}

Je evidentní, že všechny kombinace s opakováním páté třídy ze tří prvků dokážeme zobrazit pomocí pouhých dvou druhů znaků: pět modrých teček odpovídá pěti použitým prvkům (páté třídě), dvě červené rysky představují dva potřebné oddělovače).

Zároveň je jasné, že na pořadí těchto znaků záleží. Proto musíme pracovat s permutacemi s opakováním:  $K'_{(5,3)} = P'_{5,2}(7) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$

Tento druhý způsob řešení úlohy je jednoduchý, srozumitelný a logický, takže jej studenti mohou používat vždy, když hledají počet kombinací s opakováním, a to aniž by si museli pamatovat nepříjemný vzorec.

Navíc díky němu může učitel studentům ukázat, jak lze ke vzorci  $K'_{(k,n)} = \binom{n+k-1}{k}$  dojít:

$$K'_{(5,3)} = P'_{5,2}(7) = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = \binom{7}{2} = \binom{7}{5} = \binom{3+5-1}{5}.$$

#### Základní poznatky:

Poznámka: Ve výsledcích příkladů 2 – 6 této části uveďte také druh kombinatorické skupiny, kterou příklad procvičuje.

- MA 2017 Čtyřciferné přirozené číslo se má sestavit ze čtyř **různých** číslic. Na prvním místě má být číslice 2 a na místě desítek lichá číslice. (Daným podmínkám vyhovují např. čísla 2 430 a 2 793.) Kolik různých čísel je možné uvedeným způsobem sestavit?

a) 21      b) 240      c) 280      d) 360      e) jiný počet      [C]
- Je dána množina  $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

  - Kolik trojčiferných čísel, v nichž se neopakují cifry, lze vytvořit z jejich prvků?  
[60, variace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]
  - Kolik z nich je dělitelných pěti?  
[12, variace bez opakování]
  - Kolik pětčiferných čísel bez opakování číslic lze vytvořit z prvků množiny  $M$ ?  
[120, permutace z 5 prvků (bez opakování) nebo variace 5. třídy z 5 prvků bez opakování]

**Met.:** Učitel by měl ukázat studentům dva způsoby řešení a nechat na studentech, který z nich si vyberou, až budou psát prověrku:

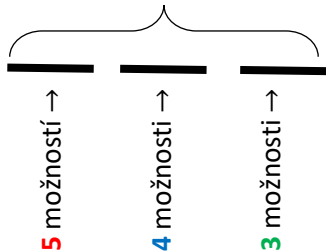
1. způsob: užitím vzorců a)  $V_{(3,5)} = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$  ;

b) Poslední cifra musí být 5, obsazujeme tedy jen první dvě pozice v čísle a nesmíme už použít 5 ...  $V_{(2,4)} = \frac{4!}{2!} = 12$  ;

c)  $P_{(5)} = 5! = 120$ .

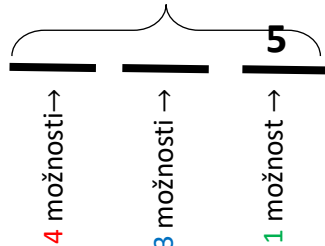
2. způsob: užitím kombinatorického pravidla součinu:

a) Trojciferné číslo – znázornění pozic



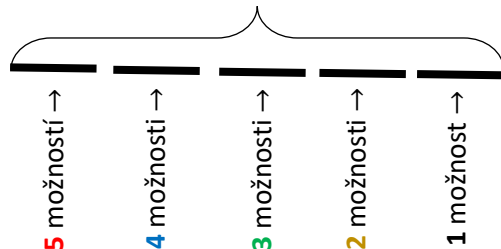
Počet možností:  $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

b) Trojciferné číslo – znázornění pozic



Počet možností:  $4 \cdot 3 \cdot 1 = 12$

c) Pěticiferné číslo – znázornění pozic



Počet možností:  $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Pozn.: Zadání úlohy by měl učitel ještě zkomplikovat tím, že mezi prvky množiny  $M$  zařadí nulu. Pak může být např.  $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ . Předchozí výpočet je potom třeba doplnit o vyřazení všech trojic, které mají nulu na prvním místě.

Úlohu lze nejprve využít jako prémiovou úlohu, jejíž správné řešení může učitel odměnit ...

3) Řešte úlohu č. 2 pro případ, kdy se cifry mohou opakovat.

[a) 125, variace 3. třídy z 5 prvků s opakováním

b) 25, variace s opakováním c) 3125, variace 5.

třídy z 5 prvků s opakováním]

4) Kolik existuje osmiciferných čísel, ve kterých jsou 3 dvojky, 1 pětka a 4 šestky?

[280, 8 členné permutace s opakováním typu

$P'_{3,1,4}(8)$ ]



- 5) Kolik existuje tříprvkových podmnožin množiny M?  
[10, kombinace 3. třídy z 5 prvků bez opakování]
- 6) Student psal v matematice během pololetí 7 písemných prací a známky na konci pololetí uspořádal od nejlepších po nejhorší, např. 1, 1, 2, 3, 3, 4, 5. Kolik různých výsledků mohl student získat?  
[330, kombinace 7. třídy z 5 prvků s opakováním]
- 7) Vyjádřete jedním kombinačním číslem:  
a)  $\binom{17}{8} + \binom{17}{9}$       b)  $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3}$       [a)  $\binom{18}{9}$  b)  $\binom{7}{4}$ ]

#### Typové příklady standardní náročnosti

- 8) MA 2016 Je dána rovnice s neznámou  $n \in \mathbb{N}$ :  $\frac{80!}{9!} + \frac{80!}{10!} = \frac{n \cdot 80!}{10!}$   
Jaké je řešení rovnice?      A) 11    B) 10    C) 9    D) 8    E) jiné řešení      [A]
- 9) Kolik přímek je určeno 12 body, jestliže:  
a) žádné tři body neleží na přímce?    b) čtyři z nich leží na přímce?      [66, 61]
- 10) S připomínkami k navrhovanému zákonu chce v parlamentu vystoupit 6 poslanců A, B, C, D, E, F. Určete počet:  
a) všech možných pořadí jejich vystoupení.  
b) všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A po E.  
c) všech možných pořadí jejich vystoupení, v nichž vystupuje A ihned po E  
[720, 360, 120]
- 11) MA 2014 Trenér vybírá z 5 děvčat a 4 chlapců šestičlennou skupinu, v níž budou 3 dívky a 3 chlapci. Kolika způsoby lze šestičlennou skupinu za těchto podmínek sestavit?  
A) 16      B) 20      C) 40      D) 180      E) jiným počtem      [C]
- 12) V sérii 12 výrobků jsou 3 vadné. Kolika způsoby lze z nich vybrat 6 výrobků, z nichž právě 2 jsou vadné?      [378]
- 13) a) Z kolika prvků lze vytvořit 600 variací druhé třídy bez opakování?      [25]  
b) Kolik prvků dává 55 kombinací 2. třídy bez opakování?      [11]
- 14) a) Upravte a určete podmínky pro n:  
$$\frac{n^2 - 9}{(n+3)!} + \frac{6}{(n+2)!} - \frac{1}{(n+1)!}$$
       $\left[ \frac{1}{(n+2)!}, n \in \mathbb{Z}; n \geq -1 \right]$   
b) Řešte v  $\mathbb{Z}$ :  $\frac{(n+6)!}{(n+4)!} - n \cdot \frac{(n-4)!}{(n-5)!} = 5n + 80$       [5]

15) Řešte rovnici a nerovnici:

$$a) \binom{n-1}{n-3} + \binom{n-2}{n-4} = 9$$

$$b) \binom{n}{2} + \binom{n-3}{2} + \binom{n-6}{2} < 72 \quad [a) \{5\}, b) \{8, 9\}]$$

Rozšiřující cvičení

16) V novinovém stánku lze koupit 10 druhů pohledů, přičemž každý druh je k dispozici v 50 exemplářích. Určete, kolika způsoby lze zakoupit:

- a) 15 pohledů      b) 51 pohledů      c) 8 různých pohledů

[1 307 504;  $K'(51, 10) - 10; 45]$