32 Posloupnosti a jejich užití - met.

Stručný přehled teorie

Posloupnost je funkce definovaná na množině přirozených čísel nebo její části.

Posloupnost - ***nekonečná*** - má definiční obor celou množinu ***N*** a zapisujeme $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$

- ***konečná*** - má definiční obor {1, 2, 3, …, k} a zapisujeme ji $(a_n)_{n=1}^{k} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$

Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají ***členy posloupnosti***;

Funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in \boldsymbol{N}$ se nazývá ***n-tý člen posloupnosti*** a značí se a_n.

Způsoby zadání posloupnosti:

- ***výčtem prvků*** …. např. (2, 4, 6, 8, 10)
- ***vzorcem pro n-tý člen*** …. např. $a_n = 3n^2 - 5$, $(3n^2 - 5)_{n=1}^{\infty}$
- ***graficky*** … je zadán graf posloupnosti
- ***rekurentně*** – je zadán první člen posloupnosti (případně několik prvních členů) a dále je zadán předpis (tzv. rekurentní vzorec) pro výpočet následujícího členu pomocí členu předcházejícího, případně členů předcházejících.

Vlastnosti posloupnosti:

Monotónnost: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

- **rostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} > a_n$
- **klesající** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} < a_n$
- **konstantní** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} = a_n$
- **nerostoucí** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} \leq a_n$
- **neklesající** $\Leftrightarrow \forall n \in N: a_{n+1} \geq a_n$

Omezenost: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá

- **omezená zdola** $\Leftrightarrow \exists d \in R: (\forall n \in N: a_n \geq d)$
- **omezená shora** $\Leftrightarrow \exists h \in R: (\forall n \in N: a_n \leq h)$
- **omezená** právě tehdy, je-li omezená zdola i shora

ARITMETICKÁ POSLOUPNOST

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **aritmetická** právě tehdy, když existuje reálné číslo $d \in \boldsymbol{R}$, (tzv. diference) tak, že pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + d}$.

Pozn.: 1) Z rekurentního vzorce plyne, že rozdíl každých dvou po sobě následujících členů je konstantní a rovná se diferenci *d*.

2) Pro každou trojici a_{n-1}, a_n, a_{n+1} $(n \geq 2)$ po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti platí $a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, tj. prostřední člen uvedené trojice je aritmetickým průměrem svých sousedních členů.

Pro každou aritmetickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s diferencí $d \in \boldsymbol{R}$ platí:

1) $a_n = a_1 + (n-1)d$ … vzorec pro výpočet libovolného členu aritmetické posloupnosti pomocí členu prvního
2) $a_r = a_s + (r-s)d$ … vzorec pro výpočet libovolného členu aritmetické posloupnosti pomocí libovolného jiného jejího členu
3) $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ … vzorec pro výpočet součtu prvních *n* členů aritmetické posloupnosti

GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **geometrická** právě tehdy, když existuje reálné číslo $q \in \boldsymbol{R}$, (tzv. kvocient) tak, že pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n \cdot q}$.

Pozn.: 1) Z rekurentního vzorce plyne, že podíl každých dvou po sobě následujících členů je konstantní a rovná se kvocientu *q*.

2) V geometrické posloupnosti jsou libovolné trojice po sobě jdoucích členů svázány s geometrickým průměrem.

Pro každou geometrickou posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem $q \in \boldsymbol{R}$ platí:

1) $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$… vzorec pro výpočet libovolného členu geometrické posloupnosti pomocí členu prvního
2) $a_r = a_s \cdot q^{r-s}$… vzorec pro výpočet libovolného členu geometrické posloupnosti pomocí libovolného jiného členu
3) $s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ … vzorec pro výpočet součtu prvních *n* členů geometrické posloupnosti, jejíž kvocient $q \neq 1$.
   Pokud má geometrická posloupnost kvocient $q = 1$, pak je konstantní a součet jejích prvních n členů se určí jednoduše $s_n = n \cdot a_1$.

Užití geometrických posloupností:

- finanční matematika, např. úročení vkladů, splácení dluhů, …
- demografické údaje, např. vývoj počtu obyvatel v čase, …
- fyzikální úlohy, např. pohlcování elektromagnetického záření překážkami, …
- chemické úlohy, např. poločasy přeměny …

Met.: V prvních hodinách by měl učitel velmi důsledně obracet pozornost studentů na to, že posloupnosti, v souladu s jejich definicí, nepředstavují nic jiného než funkce. S funkcemi obecně, konkrétními typy funkcí, vlastnostmi a užitím funkcí byli studenti důkladně seznámeni dříve. Pokud tedy půjde o obecný pohled, nepředstavují posloupnosti vysloveně zcela novou látku, naopak, učitel se může při probírání tématu často významně odkazovat na dříve získané znalosti o funkcích.
Zatímco definičním oborem funkce obecně může být množina reálných čísel nebo jakákoliv podmnožina R, definičním oborem posloupnosti může být pouze množina všech přirozených čísel N nebo její podmnožina $\{1, 2, 3, \dots, n\}$. Tato skutečnost, tedy relativní jednoduchost definičního oboru, vede k některým zjednodušením v zápisech a ke specifickým způsobům práce s posloupnostmi.

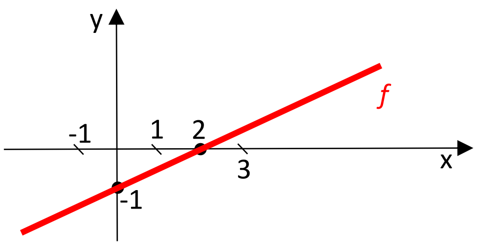
Srovnej:

Funkce (obecně):

$f: y = f_{(x)}$

$f = \{[x; y] \in R\text{x}R; x \in D_{(f)} \wedge y = f_{(x)}\}$

Př.: $f: y = \frac{x}{2} - 1$



Graf funkce může být souvislá čára.

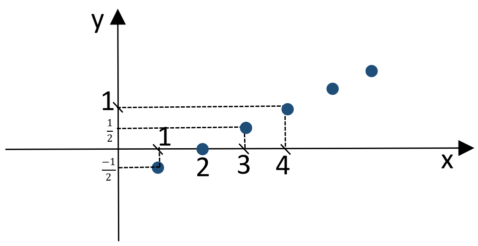
$[-4; -3], [-2; -2], [0; -1], \left[\frac{3}{2}; \frac{-1}{4}\right], \dots \in f$

Posloupnosti („speciální“ funkce):

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(f_{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{[n; a_n] \in N\text{x}R; n \in \text{N} \wedge a_n = f_{(n)}\}$

Př.: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{2} - 1\right)_{n=1}^{\infty}$



Graf posloupnosti je vždy množina izolovaných bodů.

$(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\right)$

Zápisy prvků funkcí jsou evidentně postavené na souvislosti argumentu *x* a jeho funkční hodnoty $y = f_{(x)}$. Členy posloupnosti však představují jednotlivá čísla, jejichž vztah k argumentu je na první pohled skrytý. Je třeba si uvědomit a studentům zdůraznit, že argumentem každého členu posloupnosti je index členu znamenající zároveň pořadí členu v posloupnosti (např. $a_1 = \frac{-1}{2}$, $a_5 = \frac{3}{2}$).

argument

člen posloupnosti =

= funkční hodnota

Prvními úlohami, které by se měli studenti naučit řešit, jsou úlohy

- na přechod od libovolného způsobu zadání posloupnosti k libovolnému jinému způsobu;
- na určování vlastností posloupnosti (včetně důkazu, že posloupnost určenou vlastnost má).

Posloupnost je zadána uvedením několika prvních členů. Zadejte ji n-tým členem.

1. Dáno: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{-2}{4}; \frac{-1}{5}; 0; \frac{1}{7}; \frac{2}{8}; \frac{3}{9}; \dots\right)$. Řeš.: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n-3}{n+3}\right)_{n=1}^{\infty}$
2. Dáno: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (-1; 1; -1; 1; -1; \dots)$. Řeš.: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$
3. Dáno: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1; -1; 1; -1; 1; -1; \dots)$. Řeš.: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$
4. Dáno: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (1; -4; 9; -16; 25; -36; \dots)$. Řeš.: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (n^2.(-1)^{n+1})_{n=1}^{\infty}$

Posloupnost je zadána n-tým členem. Zadejte ji rekurentně.

Dáno: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řeš.: Zapíšeme $\boxed{a_n = \frac{n}{n+1}}$; $\boxed{a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}}$. Při hledání rekurentního vzorce lze využít

- buď $\boxed{\text{rozdíl}}$ $\boxed{a_{n+1} - a_n} = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{(n+1)^2 - n.(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)(n+1)} = \frac{1}{(n+2)(n+1)}$

  a pak rekurentní zadání bude $\boxed{a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+2)(n+1)} \ ; \ a_1 = \frac{1}{2}}$,

- nebo $\boxed{\text{podíl}}$ $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{n.(n+2)}$. V tomto případě bude rekurentní zadání vypadat

  takto: $\boxed{a_{n+1} = a_n . \frac{(n+1)^2}{n.(n+2)} \ ; \ a_1 = \frac{1}{2}}$.

Posloupnost je zadána rekurentně. Vypočítejte prvních šest členů posloupnosti, odhadněte vzorec pro n-tý člen a dokažte jeho správnost: $a_1 = 1; \ a_2 = 3; \ a_n = 4a_{n-1} - 3a_{n-2}$.

Řeš.: **První krok** – výpočet členů:

$$\left.\begin{aligned} a_3 &= 4a_2 - 3a_1 = 4.3 - 3.1 = 9, \\ a_4 &= 4a_3 - 3a_2 = 4.9 - 3.3 = 27, \\ a_5 &= 4a_4 - 3a_3 = 4.27 - 3.9 = 81, \\ a_6 &= 4a_5 - 3a_4 = 4.81 - 3.27 = 243 \end{aligned}\right\} \ (a_n)_{n=1}^{\infty} = (1; 3; 9; 27; 81; 243; \dots)$$

Druhý krok – odhad vzorce pro n-tý členu:

Zdá se, že platí: $\boxed{a_n = 3^{n-1}}$

Třetí krok – důkaz správnosti vzorce pro n-tý člen:

$a_1 = 3^{1-1} = 3^0 = 1$ platí;

$a_2 = 3^{2-1} = 3^1 = 3$ platí;

rekurentní vzorec (pro $n \geq 3$): $L_{(n)} = a_n = 3^{n-1}$

$\boxed{a_{n-1} = 3^{n-2}}$, $\boxed{a_{n-2} = 3^{n-3}}$; $P_{(n)} = 4a_{n-1} - 3a_{n-2} = 4.3^{n-2} - 3.3^{n-3} =$

$= 4.3^{n-2} - 3^{n-2} = 3^{n-2}.(4-1) = 3^{n-2}.3 = 3^{n-1}$.

Platí: $L_{(n)} = P_{(n)}$ cbd.

Zjistěte, zda je daná posloupnost monotónní. Své tvrzení dokažte: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n+1}{n+4}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řeš.: O typu monotónnosti rozhoduje vztah mezi libovolným členem posloupnosti a_n a členem bezprostředně za ním následujícím a_{n+1} (viz definice v teorii).

$a_n = \frac{n+1}{n+4}$; $a_{n+1} = \frac{n+2}{n+5}$. Vypočítáme rozdíl $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} = \frac{n+2}{n+5} - \frac{n+1}{n+4} = \frac{3}{(n+5).(n+4)} > \mathbf{0}$.

Jestliže je evidentně rozdíl každého následujícího a jemu bezprostředně předcházejícího členu vždy kladný, znamená to, že každý následující člen je větší než jemu předcházející. A to znamená, že je posloupnost **rostoucí**. Cbd.

Zjistěte, zda je daná posloupnost omezená. Své tvrzení dokažte: $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{4n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Řeš.: Posloupnost je omezená, je-li omezená zdola i shora.

*Omezenost **zdola**:* dolní mez ***d*** určíme snadno: $\frac{4n+1}{n+2} > 0$. Proto $\boldsymbol{d} = 0$.

*Omezenost **shora**:* horní mez ***h*** se pokusíme odhadnout dosazením „velkého“ (a pro výpočet jednoduchého) čísla za *n*. Např. pro *n* = 1000 je $a_n = \frac{4001}{1002}$. Toto číslo se blíží čtyřem, je nepatrně menší. Zkusíme tedy zvolit ***h*** = 4. Ověříme: $\frac{4n+1}{n+2} < 4$ */.(n + 2)*

$4n + 1 < 4n + 8$

$1 < 8$ *Platí.* Proto $\boldsymbol{h} = 4$.

Posloupnost je omezená zdola i shora, je tedy **omezená**. Cbd.

Jakmile se studenti seznámí obecně s posloupnostmi a s jejich základními vlastnostmi, je čas přejít k probírání konkrétních typů posloupností – aritmetické a geometrické.

Autoři učebnic i sbírek úloh z matematiky přistupují k probírání aritmetické a geometrické posloupnosti dvěma různými způsoby:

- jedni pracují s oběma souběžně a při probírání je porovnávají;
- druzí nejprve probírají aritmetickou posloupnost, později posloupnost geometrickou.

Je samozřejmě na učiteli, která z obou možností mu vyhovuje víc a kterou při své pedagogické práci použije. Zkušenosti ukazují, že studentům více vyhovuje možnost druhá, kdy pracují nejprve s relativně jednodušší aritmetickou posloupností, později pak s posloupností geometrickou a na závěr s oběma.

Pozn.: Učitel může studentům doporučit, aby si zvykli k úvodu řešené úlohy poznačit AP, GP, případně AP i GP podle toho, které z obou posloupností se řešená úloha týká. Důvodem tohoto doporučení je skutečnost, že studenti občas posloupnosti zamění. Vzhledem k tomu, že zadání bývají zpravidla „šitá na míru“ danému typu posloupnosti, záměnou si mohou studenti řešení buď příliš zkomplikovat nebo naopak příliš zjednodušit. Výrazné označení typu posloupnosti může pomoci pravděpodobnost uvedené možnosti záměny zmenšit.

Aritmetická posloupnost:

Př.1: V aritmetické posloupnosti platí: $a_1 + a_4 + a_6 = 71$
$a_5 - a_3 - a_2 = 2$.

a) Určete tuto posloupnost.

b) Vypočítejte, kolik jejích členů dává součet 182.

Řeš.: a) V zadání je soustava dvou rovnic o šesti neznámých. Pokud každý člen posloupnosti vyjádříme pomocí prvního a diference, zmenšíme počet neznámých na dvě: $a_n = a_1 + (n-1).d$

$$a_1 + a_1 + 3d + a_1 + 5d = 71$$
$$a_1 + 4d - (a_1 + 2d) - (a_1 + d) = 2$$

$$3a_1 + 8d = 71$$
$$-a_1 + d = 2 \quad \rightarrow \quad d = a_1 + 2$$

$$3a_1 + 8(a_1 + 2) = 71$$

$$11a_1 = 55\,; \qquad a_1 = 5\,; \quad d = 7$$

b) n – ? … $s_n = 182$

$$s_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n) \quad \dots \quad 182 = \frac{n}{2}.(5 + 5 + (n-1).7)$$

$$7n^2 + 3n - 364 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+4.7.364}}{14} = \frac{-3\pm\sqrt{10201}}{14} = \frac{-3\pm101}{14} =< \begin{matrix} 7 \\ -\frac{52}{7} < 0 \ nelze \end{matrix}$$

$n = 7$.

Př.2: Určete první kladný člen aritmetické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = -47$ a diference $d = \frac{3}{5}$.

Řeš.: n – ? $\quad a_n > 0$

$$a_n = a_1 + (n-1).d = -47 + (n-1).\frac{3}{5} = -47{,}6 + 0{,}6n > 0$$

$$6n > 476 \quad \rightarrow \quad n > 79{,}\overline{3} \quad \rightarrow \quad n = 80$$

Hledaný člen je $a_{80} = -47 + 79.\frac{3}{5} = \frac{-235+237}{5} = \frac{2}{5}$ $\qquad a_{80} = \frac{2}{5}$

Př.3: Řešte rovnici s neznámou $x \in N$: $\quad 1 + 6 + 11 + 16 + 21 + \cdots + x = 970$.

Řeš.: Levá strana rovnice představuje součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 1$ a $d = 5$.

$\boxed{x = a_n} = a_1 + (n-1).d \qquad a_n = 1 + (n-1).5 = 5n - 4\,;$

$s_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n)\,;$ Rovnice: $970 = \frac{n}{2}.(1 + 5n - 4) = \frac{n}{2}.(5n - 3)$

$5n^2 - 3n - 1940 = 0$

$n_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4.5.1940}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{38809}}{10} = \frac{3 \pm 197}{10} =< \begin{matrix} 20 \\ -19{,}4 < 0 \ \ nelze \end{matrix}$

$x = a_{20} = 1 + 19.5 = 96$

Př.4: Řešte nerovnici s neznámou $x \in N$: $\quad 15 + 10 + 5 + 0 - 5 - \cdots - x \leq -100$.

Řeš.: Levá strana nerovnice představuje součet prvních *n* členů aritmetické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 15$ a $d = -5$.

Při **takto zadané úloze** je třeba dát velký ***pozor*** na souvislost neznámé *x* a členu a_n. Tyto dvě hodnoty se v předcházející úloze sobě rovnaly. V této úloze však platí $a_n = -x,\ neboli\ \boxed{x = -a_n}$. Pokud bychom si to neuvědomili, nemůžeme úlohu dořešit správně.

$a_n = a_1 + (n-1).d = 15 + (n-1).(-5) = 20 - 5n\,;$

$s_n = \frac{n}{2}.(a_1 + a_n)\,;$ Nerovnice: $\frac{n}{2}.(15 + 20 - 5n) \leq -100$

$-5n^2 + 35n \leq -200$

$n^2 - 7n - 40 \geq 0$

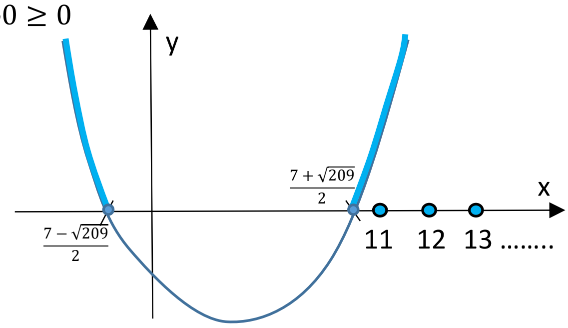
$n_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{209}}{2} \sim \frac{7 \pm 14{,}46}{2} =< \begin{matrix} 10{,}73 \\ -3{,}73 \end{matrix}$

$n \in \{11; 12; 13; \dots\}$

$x = -a_n = -(20 - 5n) = 5n - 20$

$n \geq 11 \quad \rightarrow \quad x \geq 5.11 - 20 = 35$

$x \in \{35; 36; 37; \dots\}$



Geometrická posloupnost:

Př.1: V geometrické posloupnosti platí: $\quad a_2 + a_3 = 60$

$a_1 + a_4 = 252$. Určete tuto posloupnost.

Řeš.: V zadání je soustava dvou rovnic o čtyřech neznámých. Pokud každý člen posloupnosti vyjádříme pomocí prvního a kvocientu, zmenšíme počet neznámých na dvě: $\quad a_n = a_1.q^{n-1};$

$a_1.q + a_1.q^2 = 60$

$a_1 + a_1.q^3 = 252$

$a_1.q.(1 + q) = 60$

$a_1.(1 + q)^3 = 252$

$a_1.q.(1 + q) = 60 \quad \rightarrow \quad a_1.(1 + q) = \frac{60}{q}$

$a_1.(1 + q).(1 - q + q^2) = 252$

$\frac{60}{q}.(1 - q + q^2) = 252\ /:12$

$5q^2 - 26q + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad q_{1,2} =< \begin{matrix} 5 \\ \frac{1}{5} \end{matrix}$

1. řešení: $a_1 = 2,\ q_1 = 5$
2. řešení: $a_2 = 250,\ q_2 = \frac{1}{5}$

Př.2: V dané geometrické posloupnosti platí: $a_6 = 2\,, a_{10} = 32$. Určete součet prvních deseti členů této posloupnosti.

Řeš.: $a_{10} = a_6 . q^4$

$q^4 = \frac{a_{10}}{a_6} = 16$

$q = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

1) $q = -2$. Pak $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = \frac{2}{(-2)^5} = -\frac{1}{16}$;

$$s_{10} = a_1 . \frac{q^{10}-1}{q-1} = -\frac{1}{16} . \frac{(-2)^{10}-1}{-2-1} = \frac{1023}{48} = \frac{341}{16}$$

2) $q = 2$. Pak $a_1 = \frac{a_6}{q^5} = \frac{2}{2^5} = \frac{1}{16}$;

$$s_{10} = a_1 . \frac{q^{10}-1}{q-1} = \frac{1}{16} . \frac{2^{10}-1}{2-1} = \frac{1023}{16}$$

Pozn.: V této úloze (a v úlohách jí podobných) se studenti často dopouštějí následujících chyb:

- Za kořen rovnice $q^4 = 16$ považují pouze číslo 2 a zapomínají na kořen -2.
- Pokud zjistí správně, že $q = \pm 2$ a provedou nejprve výpočet např. pro $q = -2$ (najdou tedy $a_1 = -\frac{1}{16}$ a $s_{10} = \frac{341}{16}$), pak se mnozí vzápětí dopustí zbrklé a chybné úvahy, že výpočet pro $q = 2$ není třeba provádět, protože když jsou opačné hodnoty kvocientu, bude i výsledný součet pro $q = 2$ opačným číslem k součtu pro $q = -2$. A to samozřejmě není pravda.

Př.3: V sedmičlenné geometrické posloupnosti je součet prvních tří členů roven 26 a součet posledních tří členů je roven 2106. Určete tuto posloupnost.

Řeš.:

$$\underbrace{a_1 \quad a_2 \quad a_3}_{s_{1-3} = 26} \quad a_4 \quad \underbrace{a_5 \quad a_6 \quad a_7}_{s_{5-7} = 2106}$$

$s_{1-3} = a_1 . \frac{q^3-1}{q-1}$

[redacted] = [redacted]

$s_{5-7} = a_5 . \frac{q^3-1}{q-1} = a_1 . q^4 . \frac{q^3-1}{q-1}$

[redacted] $. q^4 .$ [redacted] $= 2106$

[redacted] $q^4 = 2106$

$q^4 = 81$

$q = \pm 3$

1) $q = 3$. Pak $a_1 . \frac{27-1}{3-1} = 26 \rightarrow a_1 = 2$. 1. řešení: $a_1 = 2\,,\ q = 3$

2) $q = -3$. Pak $a_1 . \frac{-27-1}{-3-1} = 26 \rightarrow a_1 = \frac{26}{7}$. 2. řešení: $a_1 = \frac{26}{7}\,, q = -3$

Př.4: Řešte rovnici s neznámou $x \in N$: $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \cdots + \frac{x}{1024} = 8188$.

Řeš.: Levou stranu rovnice tvoří součet prvních jedenácti členů geometrické posloupnosti, jejíž první člen

$a_1 = x$ a kvocient $q = \frac{1}{2}$. Rovnice: $x . \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{11} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8188$;

$x . \frac{-\frac{2047}{2048}}{-\frac{1}{2}} = 8188 \rightarrow x . \frac{4094}{2048} = 8188 \ /: 4094 \rightarrow x . \frac{1}{2048} = 2 \rightarrow x = 4096$

Př.5: Řešte nerovnici s neznámou $x \in N$: $2 + 20 + \cdots + 2.10^x < 10^6$.

Řeš.: Levou stranu nerovnice tvoří součet prvních jedenácti členů geometrické posloupnosti, jejíž první člen je $a_1 = 2$ a kvocient $q = 10$. Nerovnice:

$$2.\frac{10^{x+1}-1}{10-1} < 10^6$$
$$10^{x+1} - 1 < \frac{9}{2}.10^6$$
$$10^{x+1} < 4\,500\,001$$

Protože $10^6 = 1\,000\,000$, ale $10^7 = 10\,000\,000$, musí být $x + 1 \leq 6$, tedy $x \leq 5$.

Vzhledem k definičnímu oboru nerovnice platí: $x \in \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Př.6: Rozhodněte, zda je daná posloupnost aritmetická nebo geometrická:

a) $\left(\frac{1}{3}.(4n-1)\right)_{n=1}^{\infty}$; b) $(2^{2-2n}.3^{3-3n})_{n=1}^{\infty}$; c) $\left((n+1).5^n\right)_{n=1}^{\infty}$

Řeš.: • Posloupnost je aritmetická, pokud rozdíl libovolného jejího členu (kromě členu prvního) a členu jemu bezprostředně předcházejícího je konstantní.

• Posloupnost je **geometrická**, pokud **podíl** libovolného jejího členu (kromě členu prvního) a členu jemu bezprostředně předcházejícího je **konstantní**.

• **Pokud rozdíl ani podíl** libovolného členu posloupnosti (kromě členu prvního) a členu jemu bezprostředně předcházejícího **není konstantní,** nemůže být posloupnost **ani aritmetická, ani geometrická.**

a) $a_n = \frac{1}{3}.(4n-1)$ … libovolný člen dané posloupnosti,

$a_{n+1} = \frac{1}{3}.(4(n+1)-1) = \frac{1}{3}.(4n+3)$ … člen za ním bezprostředně následující.

Rozdíl $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} = \frac{1}{3}.(4n+3) - \frac{1}{3}.(4n-1) = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$ … $\boldsymbol{konstanta}$. Jde o aritmetickou posloupnost.

$b)$ $a_n = 2^{2-2n}.3^{3-3n}$ … libovolný člen dané posloupnosti,

$a_{n+1} = 2^{2-2(n+1)}.3^{3-3(n+1)} = 2^{-2n}.3^{-3n}$ … člen za ním bezprostředně následující.

Podíl $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{2^{-2n}.3^{-3n}}{2^{2-2n}.3^{3-3n}} = \frac{1}{2^2.3^3} = \frac{1}{108}$ … **konstanta**. Jde o **geometrickou** posloupnost.

c) $a_n = (n+1).5^n$ … libovolný člen dané posloupnosti,

$a_{n+1} = \left((n+1)+1\right).5^{n+1} = (n+2).5.5^n$ … člen za ním bezprostředně následující.

Rozdíl $\boldsymbol{a_{n+1} - a_n} = (n+2).5.5^n - (n+1).5^n = 5^n.[5.(n+2) - (n+1)] = 5^n.(4n+9)$ evidentně **závisí na *n***, nepředstavuje tedy konstantu. Posloupnost proto **není aritmetická**.

Podíl $\frac{\boldsymbol{a_{n+1}}}{\boldsymbol{a_n}} = \frac{(n+2).5.5^n}{(n+1).5^n} = \frac{5n+10}{n+1}$ rovněž **závisí na *n***, není konstantou, posloupnost proto **není ani geometrická.**

Př.7: Tři čísla tvoří tři po sobě následující členy aritmetické posloupnosti a součet jejich druhých mocnin je 126. Jestliže první číslo zmenšíme třikrát, druhé číslo necháme a třetí číslo zvětšíme čtyřikrát, dostaneme tři po sobě jdoucí členy geometrické posloupnosti. Určete tuto trojici čísel.

Řeš.: Pro řešení úlohy je důležité rozmyslet si způsob zápisu čísel, s nimiž máme pracovat. Výhodné je

např.: AP ... $a_{n-1} = x - d\,,\quad a_n = x\,,\quad a_{n+1} = x + d\,.$

Platí: $(x-d)^2 + x^2 + (x+d)^2 = 126$

$$3x^2 + 2d^2 = 126$$

GP ... $b_{k-1} = \frac{x-d}{3}\,,\quad b_k = x\,,\quad b_{k+1} = 4.(x+d)$

Platí: $\frac{b_k}{b_{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}$

$$b_k{}^2 = b_{k-1}.b_{k+1}$$

$$x^2 = \frac{x-d}{3}.4.(x+d) = \frac{4}{3}.(x^2-d^2)\ /.3$$

$$4d^2 = x^2$$

$$3x^2 + \frac{x^2}{2} = 126$$

$$7x^2 = 252$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \pm 6 \qquad d = \pm 3$$

1. řešení: $-9,\ -6,\ -3$;
2. řešení: $-3,\ -6,\ -9$;
3. řešení: $3,\ 6,\ 9$;
4. řešení: $9,\ 6,\ 3$.

Př.8: Za kolik let klesne cena stroje na desetinu původní hodnoty, klesá-li každoročně o 20 %?

Řeš.: C_0 ... původní cena stroje;

n ... hledaný počet let, za které cena klesne na hodnotu $C_n = \frac{C_0}{10}$

$$C_1 = C_0 - \frac{20}{100}C_0 = C_0.(1-0{,}2) = C_0.0{,}8$$

$$C_2 = C_1 - \frac{20}{100}C_1 = C_1.0{,}8 = C_0.0{,}8^2$$

$$C_3 = C_0.0{,}8^3$$

....

$$C_n = C_0.0{,}8^n$$

$$\frac{C_0}{10} = C_0.0{,}8^n\ /:C_0$$

$$0{,}1 = 0{,}8^n$$

$$\log 0{,}1 = n.\log 0{,}8$$

$$n \sim 10\ \text{let}$$

Př.9: Počátkem roku uložil pan Novák do banky 100 000,- Kč. Vklad je úročen $p = 5$ % ročně.

a) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za jeden rok, jestliže daň z úroků neuvažujeme?
b) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za jeden rok, jestliže daň z úroků je $d = 15$ %?
c) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za deset let, jestliže daň z úroků neuvažujeme?
d) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za deset let, jestliže daň z úroků je 15 %?
e) Kolik korun bude mít na vkladovém účtu za deset let, jestliže daň z úroků je 15 % a jestliže počínaje od druhého roku bude pan Novák každého 1. ledna ukládat na účet $P_v = 20\,000$,- Kč?

Řeš.: P_0 ... počáteční vklad;

a) na konci 1. roku ... $P_1 = P_0 + P_0 . \frac{p}{100} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100}\right) = 100\,000 . \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 100\,000.1{,}05 =$
$= 105\,000. - Kč$;

b) na konci 1. roku ...$P_{1d} = P_0 + P_0 . \frac{p}{100} - P_0 . \frac{p}{100} . \frac{d}{100} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right) = 100\,000.1{,}0425 =$
$= 104\,250, - Kč$;

c) na konci 1. roku ... $P_1 = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

na konci 2. roku ... $P_2 = P_1 . \left(1 + \frac{p}{100}\right) = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$; ......

na konci 10. roku ... $P_{10} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10} = 100\,000.\,1{,}05^{10} \sim 100\,000.1{,}62889 \sim 163\,000, - Kč$;

d) na konci 1. roku ... $P_{1d} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)$; ....

na konci 10. roku ... $P_{10d} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^{10} = 100\,000.\,1{,}0425^{10} \sim 100\,000.1{,}51621 \sim$
$\sim 152\,000, - Kč$;

e) na konci 1. roku ... $P_{1d} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)$;

na konci 2. roku ... $P_{2d} = (P_{1d} + P_v) . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right) = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^2 +$
$+ P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)$;

na konci 3. roku ... $P_{3d} = (P_{2d} + P_v) . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right) = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^3 +$
$+ P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^2 + P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)$;

na konci 4. roku ... $P_{4d} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^4 + P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^3 +$
$+ P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^2 + P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)$;

......

na konci 10. roku ... $P_{10d} = P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^{10} + P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^9 +$

$$+ P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^8 + \cdots + P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^2 + P_v . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right) =$$

$$= P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^{10} + P_v . \left[\left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^9 + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^8 + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^7 + \cdots + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^2 + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)\right] =$$

$$= P_0 . \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^{10} + P_v . \left[\left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^9 + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^8 + \right.$$
$$\left. + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^7 + \cdots + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)^2 + \left(1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}\right)\right]$$

Součet prvních devíti členů geometrické posloupnosti s prvním členem
$a_1 = 1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}$ a s kvocientem $q = 1 + \frac{p}{100} - \frac{p.d}{10\,000}$

Konkrétně: $P_{10d} = 100\,000.\,1{,}0425^{10} + 20\,000.\,(1{,}0425^9 + 1{,}0425^8 + \cdots + 1{,}0425^3 +$
$+ 1{,}0425^2 + 1{,}0425) \sim 100\,000.1{,}516 + 20\,000.1{,}0425 . \frac{1{,}0425^9 - 1}{1{,}0425 - 1} \sim$

$\sim 151\,600 + 20\,000.11{,}146 = 151\,600 + 222\,920 = 374\,520, - Kč$

Základní poznatky:

1) Je dána posloupnost: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \ldots$ Vyjádřete ji vzorcem pro n-tý člen a rekurentně.

[$a_n = \frac{1}{n}; n \in N$; $a_1 = 1; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1}; n \in N$]

2) Posloupnost je zadána rekurentně: $a_1 = \frac{1}{2}; a_{n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$. Určete několik jejích členů a zadejte ji vzorcem pro n-tý člen. [$\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots\ a_n = \frac{n}{n+1}$]

3) a) První člen aritmetické posloupnosti je 2 a diference 3. Určete prvních pět členů posloupnosti, člen sedmdesátý a součet prvních 70 členů.

[2; 5; 8; 11; 14, 209, 7385]

b) První člen geometrické posloupnosti je 2 a kvocient 3. Určete prvních pět členů posloupnosti, člen desátý a součet prvních 10 členů.

[2; 6; 18; 54; 162, 39366, 59048]

Typové příklady standardní náročnosti

4) a) Dokažte, že je posloupnost z příkladu 1) klesající.
b) Dokažte, že je posloupnost z příkladu 2) omezená.

5) MA Jaro 2016 V aritmetické posloupnosti platí: $a_n = \frac{5-10n}{0{,}4}$, n ∈ N. Jaká je diference posloupnosti? a) 12,5 b) -5 c) 5 d) -12,5 e) -25 [e]

6) MA Podzim 2016 Je dáno pět po sobě jdoucích členů aritmetické posloupnosti: 4, x, y, z, -8. Která hodnota vyjadřuje součet x+y+z ?
a) -2 b) -3 c) -4 d) -6 e) žádná z uvedených [d]

7) V geometrické posloupnosti je člen $a_3 = \sqrt{3}$ a $a_5 = 2\sqrt{3}$. Určete tuto posloupnost.

[$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}; q = \sqrt{2}$ nebo $a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}; q = -\sqrt{2}$]

8) a) V aritmetické posloupnosti je součet třetího a sedmého členu 46 a podíl druhého a šestého členu $\frac{2}{7}$. Určete tuto posloupnost. [a_1 = 3, d = 5]

b) Geometrická posloupnost má 4 členy. Součet krajních je 56, součet vnitřních je 24. Určete tuto posloupnost. [a_1= 2, q = 3 nebo a_1 = 54, q = 1/3]

9) MA + 2017 Posloupnost obsahuje n po sobě jdoucích celých čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$, z nichž nejmenší je a_1. Platí: $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$, kde n ∈ N.
1) Pro n = 15 vypočtěte a_1.
2) Určete n, jestliže a_1 = -20.
3) Vyjádřete a_1 v závislosti na n a uveďte množinu všech n, pro něž daná posloupnost existuje.

[-6, 43, $a_1 = \frac{3-n}{2}$, n je $liché$]

10) Roční objem výroby podniku je 50 milionů Kč. Jaký roční objem výroby lze očekávat za 5 let při 10% přírůstku ročně? [80,53 milionů]

11) Kolik skleněných desek pohlcujících 5 % světla musíme dát na sebe, aby intenzita světla klesla na polovinu? [14]

12) Dvacetiletý kuřák utratí za cigarety ročně 17 700 Kč, což odpovídá 10 cigaretám za den, při ceně 97 Kč za krabičku cigaret.
   a) Částku 17 700 Kč uloží začátkem roku 2020 na termínovaný účet s roční úrokovou mírou 3 procenta. Daň z úroku je 15 procent. Kolik bude mít naspořeno na konci roku 2070?
   b) Částku 17 700 Kč uloží začátkem roku 2020 na termínovaný účet s roční úrokovou mírou 3 procenta, přičemž stejnou částku bude ukládat vždy na začátku každého úrokovacího období. Daň z úroku je 15 procent. Kolik bude mít naspořeno na konci roku 2070?
   [63 928 Kč, 1 876 797 Kč]

Rozšiřující cvičení

13) Pan Starý má půjčku 300 000 Kč na roční úrok 4 %. Jak velká musí být každoroční splátka dluhu koncem roku, chce-li pan Starý splatit dluh za 5 let? [67 388 Kč]