33 Limita posloupnosti, nekonečné řady – met.

Stručný přehled teorie

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu $a \in \boldsymbol{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{R}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$, kde $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme pak: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Tudíž: $$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)(\forall n > n_0, kde\ n \in N: |a_n - a| < \varepsilon)}$$

- Posloupnost, jejíž limitou je reálné číslo ***a***, se nazývá **konvergentní**. (Říkáme také, že posloupnost konverguje k číslu ***a***.)
- Posloupnost, která nemá limitu nebo jejíž limita je rovna ±∞, se nazývá **divergentní**.
- Každá posloupnost může mít nejvýše jednu limitu.

Pozn.: a) Každá konstantní posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ = $(c)_{n=1}^{\infty}$ je konvergentní a $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$.

b) Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

Každá nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

c) Každá konvergentní posloupnost je shora i zdola omezená.

!!*Obrácená věta neplatí* … viz např. posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (-1)^n$!!

Věty o limitách

Nechť $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ a $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti s limitami $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n\rightleftarrows} = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n\rightleftarrows} = b$, kde *a, b* $\in \boldsymbol{R}$.
Nechť je dána konstanta $c \in \boldsymbol{R}$.

Pak platí: **1.** Posloupnosti $(a_n \pm b_n)_{n=1}^{\infty}$, $(a_n . b_n)_{n=1}^{\infty}$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n=1}^{\infty}$ $pro b \neq 0$ a $(c . a_n)_{n=1}^{\infty}$ jsou rovněž konvergentní.

2. Limity uvedených posloupností se určí takto:

- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a \pm b}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (a_n . b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n . \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a . b}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}\ pro\ b \neq 0}$
- $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} (c . a_n) = c . \lim\limits_{n\to\infty} a_n = c . a}$

Pozn.: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Nekonečné řady

Nekonečná řada vznikne z nekonečné posloupnosti vložením znamének + mezi všechny členy posloupnosti.

Tedy: Nekonečná posloupnost ..... $(a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$

Nekonečná řada .... $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ = $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

Nabízí se otázka, zda a za jakých podmínek má smysl uvažovat o součtu nekonečné řady.

Vytvořme (pro danou nekonečnou řadu) tzv. ***posloupnost částečných součtů*** $(s_n)_{n=1}^{\infty} = (s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots)$:

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

....

$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n$

....

Pokud existuje vlastní limita s této posloupnosti částečných součtů při $n \longrightarrow \infty$, tedy pokud $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, pak říkáme, že je nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konvergentní**, píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Je-li navíc nekonečná řada **geometrická**, tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 . q^{n-1}$, pak je konvergentní právě tehdy, když platí:

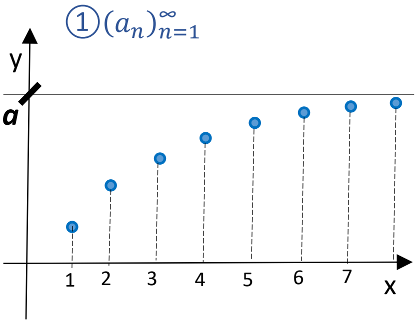
$|q| < 1$. Pak se součet této řady vypočítá podle jednoduchého vzorce $\boxed{s = \frac{a_1}{1-q}}$.

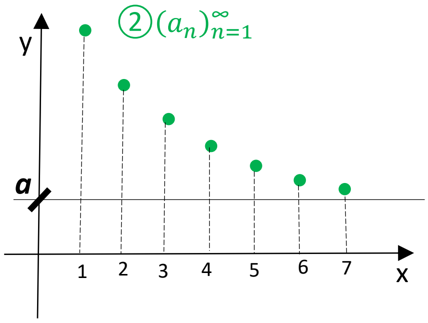
$$\left(s = \lim_{n\to\infty} a_1 . \frac{q^n - 1}{q-1} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 . q^n}{q-1}}_{\text{konvrguje, a to k nule, pouze pro } |q| < 1} - \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{q-1} = \frac{a_1}{1-q} \right)$$

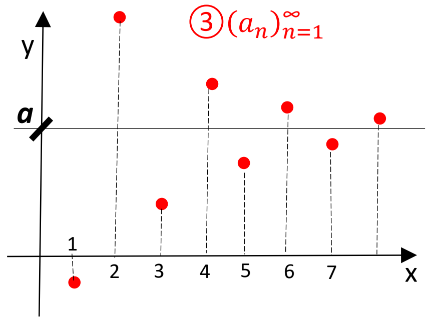
Met.: **Limita posloupnosti**

S termínem „limita“ se studenti setkávají poprvé. Jde o zcela nový pojem, který od studentů vyžaduje značnou dávku abstrakce a nového způsobu představ a myšlení. Učitel by se měl postarat , aby co nejdříve dosáhl u studentů za pomoci obrázků a náčrtů **intuitivního pochopení významu limity posloupnosti**.

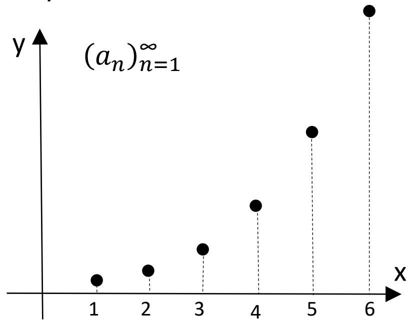
1. **Posloupnost má vlastní limitu *a***, kde ***a*** je konkrétní reálné číslo, jestliže se všechny členy posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s rostoucím *n* neomezeně blízko blíží k ***a***.



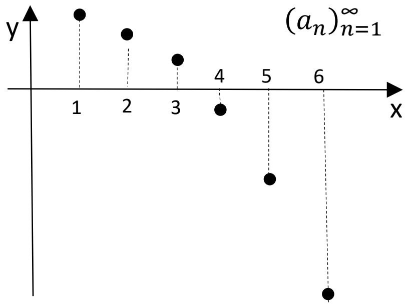




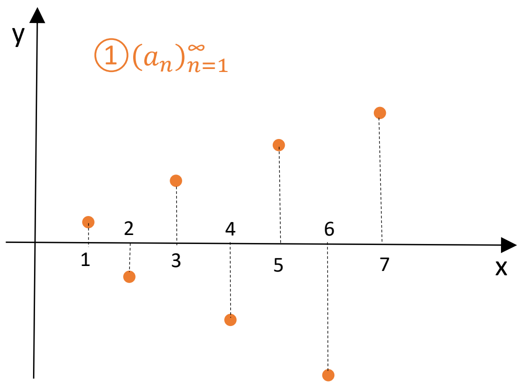
2. **Posloupnost má nevlastní limitu $+\infty$,** jestliže hodnoty všech členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s rostoucím *n* rostou nade všechny meze.

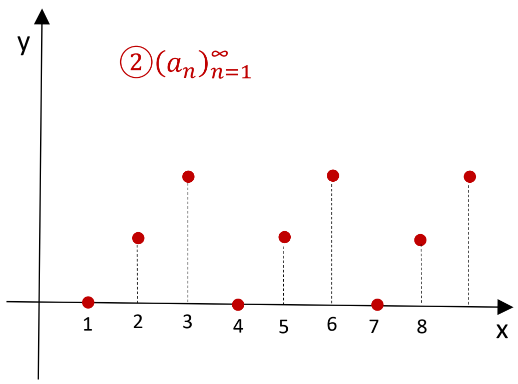


3. **Posloupnost má nevlastní limitu $-\infty$,** jestliže hodnoty všech členů posloupnosti $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ s rostoucím *n* klesají pod všechny meze.



4. **Posloupnost nemá limitu**, jestliže pro členy posloupnosti neplatí žádný z dříve popsaných způsobů chování.





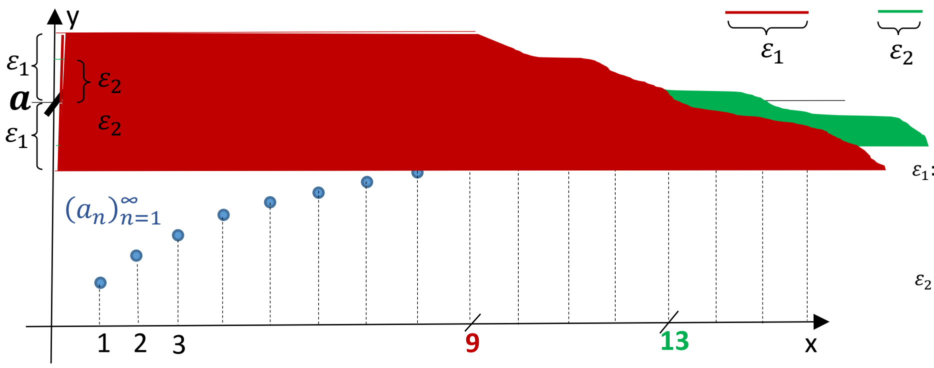
- Posloupnost, jejíž limitou je reálné číslo ***a***, se nazývá **konvergentní**. (Říkáme také, že posloupnost konverguje k číslu ***a***.)

- Posloupnost, která nemá limitu nebo jejíž limita je rovna $\pm\infty$, se nazývá **divergentní**.

Definice: Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má vlastní limitu $a \in \boldsymbol{R}$ právě tehdy, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \boldsymbol{R}$ tak, že pro všechna $n \geq n_0$, kde $n \in \boldsymbol{N}$ platí: $|a_n - a| < \varepsilon$. Píšeme pak: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Je velice důležité, aby studenti pochopili, co je v definici sděleno: ať si zvolíme jakékoliv (tedy i jakkoliv malé) kladné ε, vždy k němu najdeme „první“ člen, tj. člen s nejmenším indexem, počínaje od kterého všechny další členy (s větším indexem) se svojí hodnotou liší od limity *a* méně než o ε. K vizualizaci lze využít některý z prvních tří výše zobrazených grafů posloupností (viz následující obrázek).

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)(\forall n > n_0, kde\ n \in N: |a_n - a| < \varepsilon)$$



ε_1: *hodnota* všech členů počínaje od devátého se od ***a*** liší méně než o ε_1

ε_2: *hodnota* všech členů počínaje od třináctého se od ***a*** liší méně než o ε_2

Výpočty limit posloupností nebudou pro studenty právě snadnou záležitostí. Pro zvládnutí a hlavně dobré pochopení způsobů výpočtů většího množství typů limit by měl učitel nyní zařadit některé základní důkazové úlohy. Samozřejmě přitom může zvážit své časové možnosti a také úroveň třídy (v lepších třídách provést důkazy, ve slabších může jen konstatovat hodnoty některých důležitých limit a svá tvrzení opřít třeba o náčrty grafů posloupností).

Př.1: Dokažte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad (n \in N)$

Řeš.: na základě definice: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)\left(\forall n > n_0, kde\ n \in N: \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon\right)$

Nechť $\varepsilon > 0$ … libovolné. Kdy $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$?

Když $\left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$; $\qquad n \in N \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \;/ .\frac{n}{\varepsilon}$

Tedy když $\underbrace{\quad}_{n_0} < n$.

Ke zvolenému kladnému ε jsme našli $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$ takové, že pro všechna přirozená n větší než toto n_0 bude splněna nerovnost $\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$, která je požadovaná v definici. Protože jsme ale ε volili zcela libovolně, najdeme stejným způsobem n_0 i pro jakékoliv jiné kladné ε. Cbd.

Př.2: Dokažte: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (n \in N)$

Řeš.: na základě definice:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)\left(\forall n > n_0, kde\ n \in N: \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon\right)$$

Nechť $\varepsilon > 0$ … libovolné. Kdy $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^n - 0\right| < \varepsilon$?

$$\text{Když } \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| < \varepsilon \,; \qquad \left|\left(\frac{1}{2}\right)^n\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < \varepsilon$$

$$\log\left(\frac{1}{2}\right)^n < \log\varepsilon$$

$$n.\log\left(\frac{1}{2}\right) < \log\varepsilon \ /:\log\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \textbf{POZOR!! } \log\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

Tedy když $n >$ Cbd.

n_0

Př.3: Dokažte: Je-li $q \in R$ a $|q| < 1$, $pak \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0. (n \in N)$

Řeš.: na základě definice:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)(\forall n > n_0, kde\ n \in N: |q^n - 0| < \varepsilon)$$

Nechť $\varepsilon > 0$ … libovolné. Kdy $|q^n - 0| < \varepsilon$?

Když $|q^n| < \varepsilon$;

$|q|^n < \varepsilon$

1) $q = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0^n = 0$

2) $q \neq 0 \Rightarrow 0 < |q| < 1$

$$\log|q|^n < \log\varepsilon$$

$$n.\log|q| < \log\varepsilon/:\log|q| < 0\ !!!$$

$n >$ Cbd.

n_0

Př.4: Výpočty limit posloupností jejichž n-tý člen je vyjádřen podílem dvou polynomů; využívá se vytýkání nejvyšší mocniny proměnné:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^5-2n^3}{8n^6+15} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5.\left(7-\frac{2}{n^2}\right)}{n^6.\left(8+\frac{15}{n^6}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-\frac{2}{n^2}}{8+\frac{15}{n^6}} = 0.\frac{7}{8} = 0;$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n^5-2n^3}{8n^5+15} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5.\left(7-\frac{2}{n^2}\right)}{n^5.\left(8+\frac{15}{n^5}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{7-\frac{2}{n^2}}{8+\frac{15}{n^6}} = \frac{7}{8}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-7n^8-2n^3}{8n^5+15} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^8.\left(-7-\frac{2}{n^5}\right)}{n^5.\left(8+\frac{15}{n^5}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} n^3.\frac{-7}{8} = \infty.\left(-\frac{7}{8}\right) = -\infty$.

Při praktickém počítání limit posloupností tohoto typu se nemusí vždy postupovat takto podrobně. Lze využít následujícího postupu:

- je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, je limita rovna nule (viz zadání a));
- je-li stupeň čitatele stejný jako stupeň jmenovatele, je limita rovna podílu koeficientů při nejvyšších mocninách proměnné (viz zadání b));
- je-li stupeň čitatele větší než stupeň jmenovatele, měl by být dodržen postup jako v zadání c).

Př.5: Vypočítejte limitu posloupnosti a své tvrzení dokažte: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+3}{2n}$ – ?

Řeš.: Evidentně $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+3}{2n} = \frac{5}{2}$;

Důkaz: na základě definice:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+3}{2n} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in R)\left(\forall n > n_0, kde\ n \in N: \left|\frac{5n+3}{2n} - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon\right)$$

Nechť $\varepsilon > 0$ … libovolné. Kdy $\left|\frac{5n+3}{2n} - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon$?

Když $\left|\frac{5n+3-5n}{2n}\right| < \varepsilon$;

$\left|\frac{3}{2n}\right| < \varepsilon$ $\qquad n \in N \Rightarrow \left|\frac{3}{2n}\right| = \frac{3}{2n}$

$\frac{3}{2n} < \varepsilon$

$\underset{n_0}{\ } < n$ $\qquad$ Cbd.

Př.6: Vypočítejte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n.(n-0{,}4^n)^3}{n.(3^n.n^2-2n)}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n.(1-2^{-n})}{(3n-2).(2+3^{-n})}$.

Řeš.: a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n.(n-0{,}4^n)^3}{n.(3^n.n^2-2n)} = \left[\frac{3^n.n^3-3.3^n n^2.0{,}4^n+3.3^n.n.0{,}4^{2n}-3^n.0{,}4^{3n}}{3^n.n^3-2n^2} . \frac{\frac{1}{3^n.n^3}}{\frac{1}{3^n.n^3}} = \frac{1-\frac{3}{n}.0{,}4^n+\frac{3}{n^2}.0{,}16^n-\frac{1}{n^3}.0{,}064^n}{1-\frac{1}{3^n}.\frac{2}{n}}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-0+0-0}{1-0} = 1\ ;$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n.(1-2^{-n})}{(3n-2).(2+3^{-n})} = \left[\frac{n.\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{n.\left(3-\frac{2}{n}\right).\left(2+\frac{1}{3^n}\right)}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0}{(3-0).(2+0)} = \frac{1}{6}\ .$$

Nekonečná řada

Hlavní pozornost se ve středoškolské matematice věnuje nekonečné geometrické řadě a jejímu užití. Nicméně učitel může třeba hned na začátku zařadit úlohu, jejímž cílem je výpočet součtu nekonečné řady, která geometrická není. Ukáže tak studentům, jak by měli postupovat, kdyby museli k výpočtu součtu řady využít tzv. posloupnosti částečných součtů.

Př.1: Vypočítejte součet nekonečné řady $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n.(n+1)}\right)$.

Řeš.:

1. nejprve vypočítáme několik prvních členů: $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = \frac{1}{6}$; $a_3 = \frac{1}{12}$; $a_4 = \frac{1}{20}$; …
2. všimneme si, že řada evidentně není geometrická, pro součet tedy nelze použít vzorce, který za předpokladu splnění podmínek platí pro součet nekonečné geometrické řady;
3. můžeme ověřit, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n.(n+1)} = 0$, což je nutná podmínka konvergence dané řady;
4. vytvoříme posloupnost částečných součtů:

   $s_1 = a_1 = \frac{1}{2}$;

   $s_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$;

   $s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$;

   $s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$;

   ……….

   $s_n = \frac{n}{n+1}$; ……
5. vypočítáme limitu této posloupnosti částečných součtů: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$;
6. součet dané řady je roven této limitě: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n.(n+1)}\right) = 1$

Znak sumy je pro studenty nový (nebo se s ním dosud setkávali málo) a některým studentům může dělat potíže. Proto by bylo dobré zařadit nyní několik úloh, v nichž by si studenti procvičili jednak zápis nekonečné geometrické řady pomocí sumy a také opačný úkol rozepsání nekonečné geometrické řady zadané pomocí sumy do podoby součtu:

Př.2: Rozepište pomocí součtu:

a) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{2i}$; b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2^{i-5}}$; c) $\sum_{i=1}^{\infty} 4.(x+1)^{-i}$; d) $\sum_{i=1}^{\infty} [4.(x+1)]^{-i}$.

Řeš.: a) $\sum_{i=1}^{\infty} x^{2i} = x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \cdots$;

b) $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{3}{2^{i-5}} = \frac{3}{2^{-4}} + \frac{3}{2^{-3}} + \frac{3}{2^{-2}} + \frac{3}{2^{-1}} + 3 + 3.2^1 + 3.2^2 + \cdots$;

c) $\sum_{i=1}^{\infty} 4.(x+1)^{-i} = \frac{4}{x+1} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{4}{(x+1)^3} + \cdots$;

d) $\sum_{i=1}^{\infty} [4.(x+1)]^{-i} = \frac{1}{4.(x+1)} + \frac{1}{4^2.(x+1)^2} + \frac{1}{4^3.(x+1)^3} + \cdots$.

Př.3: Zapište pomocí sumy:

a) $3 + 9 + 27 + 81 + \cdots$;

b) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \cdots$;

c) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \cdots$;

d) $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 3 + 3x + 3x^2 + \cdots$.

Řeš.: a) $3 + 9 + 27 + 81 + \cdots = 3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} 3^i$;

b) $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}x + \cdots = \frac{1}{2^0}x + \frac{1}{2^1}x + \frac{1}{2^2}x + \frac{1}{2^3}x + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}}x$;

c) $2 - 4 + 8 - 16 + 32 - \cdots = (-1)^0.2^1 + (-1)^1.2^2 + (-1)^2.2^3 + (-1)^3.2^4 + \cdots =$
$= \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i-1}.2^i$;

d) $\frac{3}{x^3} + \frac{3}{x^2} + \frac{3}{x} + 3 + 3x + 3x^2 + \cdots = 3x^{-3} + 3x^{-2} + 3x^{-1} + 3x^0 + 3x^1 + 3x^2 + \cdots =$
$= \sum_{i=1}^{\infty} 3x^{i-4}$.

Př.4: Rozhodněte, zda je daná nekonečná geometrická řada (NGŘ) konvergentní nebo divergentní. U konvergentní řady vypočítejte její součet:

a) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \cdots$;

b) $\sqrt{2} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \cdots$;

c) $2 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4} + \cdots$;

d) $\sqrt{5} - \sqrt{3} + 5 - \sqrt{15} + 5\sqrt{5} - 5\sqrt{3} + \cdots$.

Řeš.: a) $a_1 = -\frac{1}{3}$; $q = -\frac{1}{2}$. $|q| = \frac{1}{2} < 1$ … Tozn.: NGŘ je konvergentní. Její součet

$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-\frac{1}{3}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{3}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{9}$;

b) $a_1 = \sqrt{2}$; $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $|q| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ … Tozn.: NGŘ je konvergentní. Její součet

$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\sqrt{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} . \frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}+4}{2} = 2\sqrt{2} + 2$;

c) $a_1 = 2$; $q = \frac{3}{2}$. $|q| = \frac{3}{2} > 1$ … Tozn.: NGŘ je divergentní.

d) $a_1 = \sqrt{5} - \sqrt{3}$; $q = \sqrt{5}$. $|q| = \sqrt{5} > 1$ … Tozn.: NGŘ je divergentní.

Př.5: Řešte v ***R*** rovnici: $1 + 3x + 9x^2 + \cdots = 10$.

Řeš.: Levá strana rovnice představuje NGŘ s $a_1 = 1$, $q = 3x$. Její součet bude existovat v případě, že $|q| = |3x| = 3|x| < 1$.

$$|x| < \frac{1}{3}$$

$$x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Bude-li tato podmínka splněna, je levá strana rovnice $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-3x}$;

$$\frac{1}{1-3x} = 10$$
$$1 = 10 - 30x$$
$$x = \frac{9}{30} = \frac{3}{10} \qquad K = \left\{\frac{3}{10}\right\}$$

Př.6: Řešte v R rovnici: $2 - 4x + 8x^2 - \cdots = 1$.

Řeš.: Levá strana rovnice představuje NGŘ s $a_1 = 2$, $q = -2x$. Její součet bude existovat v případě, že $|q| = |-2x| = 2|x| < 1$.

$$|x| < \frac{1}{2}$$
$$x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Bude-li tato podmínka splněna, je levá strana rovnice $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2}{1+2x}$.

$$\frac{2}{1+2x} = 1$$
$$2 = 1 + 2x$$

$x = \frac{1}{2}$ … tento kořen koliduje s podmínkou, proto $K = \emptyset$.

Př.7: Řešte v ***R*** rovnici: $1 + \log x + (1 + \log x)^2 + (1 + \log x)^3 + \cdots = -6 \log x$.

Řeš.: Levá strana rovnice představuje NGŘ s $a_1 = 1 + \log x$, $q = 1 + \log x$. Její součet bude existovat v případě, že budou splněny podmínky: 1) $|q| = |1 + \log x| < 1$

$$|\log x - (-1)| < 1$$
$$\log x \in (-2; 0)$$
$$x \in (10^{-2}; 10^0) = \left(\frac{1}{100}; 1\right)$$

2) $x > 0$

Bude-li tato podmínka splněna, je levá strana rovnice $s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1+\log x}{1-(1+\log x)} = \frac{1+\log x}{-\log x}$.

$$\frac{1+\log x}{-\log x} = -6 \log x \qquad \text{Subst.: } y = \log x$$
$$\frac{1+y}{-y} = -6y$$
$$6y^2 - y - 1 = 0$$
$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = < \begin{matrix} -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \\ \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{matrix}$$

1) $y = \log x = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad x = 10^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{10}} = \frac{\sqrt[3]{100}}{10}$;

2) $y = \log x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ … tento kořen koliduje s podmínkou, proto

$$K = \left\{\frac{\sqrt[3]{100}}{10}\right\}$$

Př.8: Řešte v ***R*** rovnici: $\underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{x}\right)^{i-1}} = \frac{4}{x-4}$.

Řeš.: NGŘ: $a_1 = 1$, $q = \frac{3}{x}$

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3}{x}} = \frac{x}{x-3}$$

$$\frac{x}{x-3} = \frac{4}{x-4}$$
$$x^2 - 8x + 12 = 0$$
$$(x-2).(x-6) = 0$$
$$x_1 = 2$$

$x_2 = 6$ … tento kořen koliduje s podmínkou, proto $K = \{2\}$

Podm.: 1) $\left|\frac{3}{x}\right| < 1$

$$\frac{3}{|x|} < 1$$
$$3 < |x|$$
$$x \in (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$$

2) $x \neq 4$

Př.9: Převeďte dané neryze periodické číslo na zlomek s celým čitatelem a celým jmenovatelem: $a = 1{,}0\overline{15}$.

Řeš.: 1. způsob: Jednoduchý způsob řešení, který studentům možná ukázal učitel matematiky na základní škole:

$$\begin{aligned} 100a &= 101{,}5\,15\,15\,15\,15\,\ldots \\ -\,a &= 1{,}0\,15\,15\,15\,15\,\ldots \\ \hline 99a &= 100{,}5 \end{aligned}$$

$$a = \frac{100{,}5}{99} = \frac{1005}{990} = \frac{67}{66}$$

2. způsob: **Užitím nekonečné geometrické řady**:

$$a = 1{,}0\overline{15} = 1{,}0 + \underbrace{15.10^{-3} + 15.10^{-5} + \cdots}$$

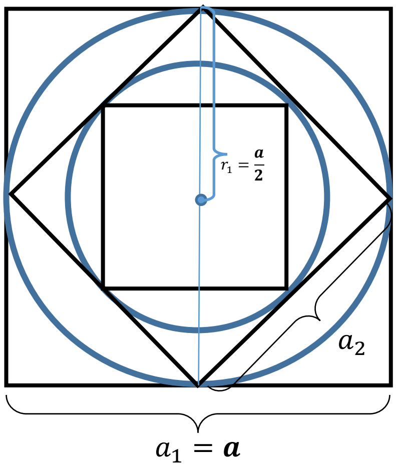
NGŘ: $a_1 = 15.10^{-3}$, $q = 10^{-2}$, tedy $|q| = |10^{-2}| < 1$

$$s = \frac{a_1}{1-q} = \frac{15.10^{-3}}{1-\frac{1}{100}} = \frac{1{,}5}{99} = \frac{15}{990} = \frac{1}{66}$$

$$a = 1{,}0 + \frac{1}{66} = \frac{67}{66}$$

Př.10: Do čtverce o straně $\boldsymbol{a}$ je vepsán kruh. Do tohoto kruhu je opět vepsán čtverec. Do čtverce opět kruh, do kruhu čtverec, … . Vypočítejte:
a) součet obvodů všech čtverců;
b) součet obvodů všech kruhů.

Řeš.: Zvolíme vhodně náčrt (polohy čtverců!!!)



a) $o_1 = 4a$

$o_2 = 4a_2 = 4.\frac{a\sqrt{2}}{2} = 4a.\frac{\sqrt{2}}{2}$

$o_3 = 4a_3 = 4.\frac{a}{2} = 4a.\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$

……………..

$a_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$a_3 = \frac{a}{2}$

NGŘ: $o_1 = 4a$,

$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|q| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$

$$s_{\square} = \frac{o_1}{1-q} = \frac{4a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{8a}{2-\sqrt{2}}.\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = 4a.\left(2+\sqrt{2}\right) ;$$

b) $o_1 = 2\pi r_1 = 2\pi.\frac{a}{2} = \pi a$

$o_2 = 2\pi r_2 = 2\pi.\frac{a\sqrt{2}}{4} = \pi a.\frac{\sqrt{2}}{2}$

…………………

$r_2 = \frac{a_2}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

NGŘ: $o_1 = \pi a$,

$q = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$|q| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| < 1$

$$s_{\circ} = \frac{o_1}{1-q} = \frac{\pi a}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\pi a}{2-\sqrt{2}}.\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} = \pi a.\left(2+\sqrt{2}\right) .$$

Základní poznatky:

1. Napište definici limity dané posloupnosti a dokažte tvrzení: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0.$
2. Vypočítejte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{n^3-2n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\pi}{2^n}$ $[0;\ 0]$
3. Rozhodněte, kdy je aritmetická posloupnost $\left(a_1+(n-1)d\right)_{n=1}^{\infty}$ divergentní. $[d \neq 0]$
4. Rozhodněte, kdy je geometrická posloupnost $\left(a_1 . q^{n-1}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergentní.

   $[|q| < 1 \text{ nebo } q = 1]$

Typové příklady standardní náročnosti:

5. Vypočítejte: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)(n-3)}{(2n+1)^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{2^n+3}$ $[\frac{1}{4}; 2]$
6. Dané neryze periodické číslo převeďte na zlomek $a = 0{,}23\overline{48}$ $\left[\frac{31}{132}\right]$
7. Spirála se skládá z půlkružnic. Poloměr každé následující je roven $\frac{2}{3}$ poloměru půlkružnice předcházející. Určete délku spirály, je-li poloměr první půlkružnice *r*. $[3\pi r]$
8. Řešte v $\mathbb{R}$: $1 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3} + \ldots = \frac{6}{x+5}$ $[K = \{-3; 4\}]$
9. Rozhodněte o konvergenci řady a vypočítejte $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

   [řada není geometrická, je konvergentní, součet je 1]
10. Prověřte konvergenci řady $\sqrt{3} - \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \ldots$ a určete její součet. $[3(\sqrt{3} - \sqrt{2})]$
11. Vypočítejte pro $x \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} -(-2)^{-n+1} x^n = \frac{4}{3} x$ $[K = \{1\}]$

Rozšiřující cvičení:

12. Vypočtěte:

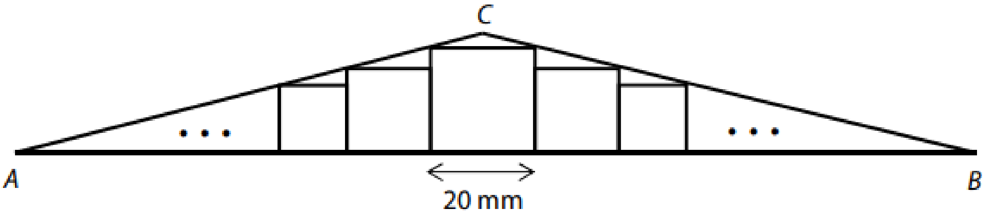
    a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n.(n-0{,}4^n)^3}{n.(3^n.n^2-2n)}$ $[1]$

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n.(1-2^{-n})}{(3n-2).(2+3^{-n})}$ $\left[\frac{1}{6}\right]$

13. Státní maturita 2017 - Matematika+

Do rovnoramenného trojúhelníku *ABC* je vepsáno nekonečně mnoho čtverců. Jedna strana každého čtverce leží na základně *AB* trojúhelníku. Čtverce se vzájemně dotýkají.

Největší čtverec s délkou strany 20 mm je umístěn tak, že osa trojúhelníku je současně osou čtverce. Každé dva sousední čtverce mají jeden společný vrchol a délky jejich stran jsou v poměru 5 : 4.



(CZVV)

max. 3 body

11 Vypočtěte v mm² obsah trojúhelníku *ABC*.

[S = 2025 mm^2]

14. Státní maturita 2016 - Matematika+

Jsou dány dvě nekonečné řady:

$a + a^2 + a^3 + a^4 + \cdots + a^n + \cdots$

$b - b^2 + b^3 - b^4 + \cdots + (-1)^{n+1} b^n + \cdots$

Uvažujme takové dvojice hodnot $a \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$ a $b \in (0; 1)$, pro něž mají obě řady **stejný součet** s.

(CZVV)

max. 4 body

12

12.1 **Vypočtěte b, jestliže je $a = \frac{1}{6}$.**

12.2 **Vyjádřete b v závislosti na a.**

12.3 **Vypočtěte součet s, jestliže je $b = 2a$.**

Řešení:

12.1	$b = \frac{1}{4}$	+ postup řešení
12.2	$b = \frac{a}{1 - 2a}$	+ postup řešení
12.3	$s = \frac{1}{3}$	+ postup řešení