**35 Derivace funkce a její užití – met.**

**Stručný přehled teorie – uváděn průběžně – spolu s metodickými radami a vzorovými výpočty úloh**

Met.: Derivace funkce představuje jeden ze základních pojmů diferenciálního počtu. Byl vytvořen ve druhé polovině 17. století při řešení konkrétních fyzikálních a geometrických problémů.

Většina času, který je ve středoškolské matematice věnován diferenciálnímu počtu, je určena pro geometrický význam derivace funkce a jeho využití při vyšetřování průběhu funkcí a při řešení praktických úloh.

Geometrický význam derivace funkce v daném bodě *x0* je směrnice tečny ke grafu funkce v tomto bodě.

 *f:y = f*(*x*)

*x*

*s*

S

x0 + Δx

*x0*

*t*

T

 *f*(*x0 + Δx*)

 *Δy*

 *Δy = f*(*x0 + Δx*) *– f*(*x0*)

 *f*(*x0*)

Q

α

 *Δx*

φ

*x*

Obrázek lze využít k vysvětlení způsobu určení směrnicetečny grafu funkce *f* (tedy způsobu určení derivace funkce *f*).

Na obrázku:

* část grafu funkce *f: y = f*(*x*)
* sečna *s = ↔TS* se směrovým úhlem *φ*
* tečna *t* se směrovým úhlem *α* vedená ke grafu funkce *f* bodem *T.*

Je zřejmé, že směrnici *ks* sečny *s* určíme z pravoúhlého trojúhelníku STQ takto: *ks* = *tg* *φ *

Ze sečny se stane tečna v okamžiku, kdy bod *S* přejde po části grafu funkce *f* do bodu *T*. Pohyb bodu *S*do *T* a přechod sečny do tečny jsou na obrázku naznačeny červenými šipkami.

Přitom se zároveň zmenšují rozměry ΔSTQ (např. Δx → 0).

Směrnice tečny: *kt* =  Směrnicová rovnice tečny *t* je pak *t: y = kt x + q*

Derivace funkce *f* v bodě *x0* je tedy *f´(x0)* =  *(čteme: limita podílu přírůstku funkční hodnoty a přírůstku argumentu za předpokladu, že se přírůstek argumentu blíží k nule).*

Derivace funkce v intervalu: Má-li funkce *f: y = f(x)* v každém bodě *x* jisté množiny *M* derivaci
*f '(x),* pak funkci *f ': y = f '(x)* nazýváme derivací funkce *f* na množině *M*.

Derivace některých elementárních funkcí:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| funkce | její derivace v bodě *x* | *x* z intervalu |
| *y = xn, n*∈***N*** | *y = n.xn-1* |  |
| *y = xk, k*∈***Z*** | *y = k.xk-1* |  |
| *y = xr, r*∈***R*** | *y = r.xr-1* |  |
| *y = c* | *y = 0* |  |
| *y =* sin *x* | *y =* cos *x* |  |
| *y =* cos *x* | *y = -* sin *x* |  |
| *y =* tg *x* | *y* =  | , *k*∈***Z*** |
| *y =* cotg *x* | *y* =  |  , *k*∈***Z*** |
| *y = ex* | *y = ex* |  |
| *y = ax, a > 0, a ≠ 1* | *y = ax.ln a* |  |
| *y =* ln *x* |  |  |
| *y =* log*a x , a > 0, a ≠ 1* |  |   |

Základní pravidla pro derivování:

1. ( *f ± g*)*'*(*x*) *= f '*(*x*) *± g'*(*x*) … derivace součtu (rozdílu) se rovná součtu (rozdílu) derivací
2. (*cf*)*'*(*x*) *= c. f '*(*x*) …… konstanta se „vynáší“ před znak derivace
3. (*fg*)*'*(*x*) *= f '*(*x*) *. g*(*x*) *+ f*(*x*) *. g'*(*x*) ….. (uv)*'* = u*'*v + uv*'*
4.  ….. 
5. derivace složené funkce: [*f* (*g*(*x*))]*' = f '*(*g*(*x*)) *. g'*(*x*)

Zvládnutí derivování elementárních funkcí a funkcí složených, a také zvládnutí používání základních pravidel pro derivování, představuje „abecedu“ celého diferenciálního počtu. Tomuto cíli musí učitel přizpůsobit obsah vyučovacích hodin, během nichž důkladným procvičováním dosáhne u studentů dostatečné obratnosti a jistoty ve výpočtech derivací.

Jako první úlohu může zařadit ukázku výpočtu derivace některé elementární funkce na základě definice:

Př.1: Nechť je dána funkce . Vypočítejte její derivaci v libovolném bodě x.

Řeš.: ;

Př.2: Nechť je dána funkce . Vypočítejte její derivaci v libovolném bodě x.

Řeš.:

Příklad prověrky, kterou by studenti měli bez větších problémů zvládnout po zmíněném důkladném procvičení, než se přejde k dalším typům úloh na využití derivací:

**A**

Derivujte:

1. y =
2. y =
3. y =
4. y =
5. y = x.ln2 + log20
6. y =
7. y =
8. y = 

**B**

Derivujte:

1. y =
2. y = 
3. y = 
4. y =
5. y =
6. y = 
7. y =
8. y =

Znalost derivování si studenti mohou procvičit a souvislost derivace funkce a směrnice tečny upevnit na příkladech zabývajících se tečnami grafů funkcí:

Př.3: Napište obecnou rovnici tečny ke grafu funkce v bodě T.

1. ;
2. .

Řeš.:

1. Tečna obecně … . Směrnice tečny v bodě T … .

Pro určení *q* musíme vypočítat *y*-ovou souřadnici T: .

 .

Směrnicová rovnice tečny … .

 Obecná rovnice tečny … .

1. Tečna obecně …

 .

Směrnice tečny v bodě T … .

Pro určení *q* musíme vypočítat *y*-ovou souřadnici T: .

 .

Směrnicová rovnice tečny … .

Obecná rovnice tečny … .

Př.4: Vypočítejte směrový úhel tečny vedené ke grafu funkce průsečíkem grafu s osou x.

1. ; b) ;

 Průsečíky s osou *x* jsou dva: . Každým z nich lze vést jednu tečnu, jejíž směrnice .

 ;

 .

1. je jediný průsečík s osou *x*. Tímto průsečíkem lze vést jedinou tečnu, jejíž směrnice .

Př.5: Na grafu funkce určete bod T tak, aby tečna vedená tímto bodem byla a) rovnoběžná s přímkou ; b) kolmá k přímce .

 Řeš.: a) tečna

 .

 ;

 b) tečna . .

***Souvislost derivace funkce a některých základních vlastností funkce:***

(Stále je třeba si uvědomovat, že derivace funkce je vlastně směrnice tečny grafu funkce a učitel může využít následující obrázek, aby upozornil studenty na to, jak informace o polohách tečen grafu v konkrétních bodech určuje (napovídá) průběh grafu funkce!!!)

* ***Spojitost*** funkce: Má-li funkce *f* v bodě *a* derivaci, pak je v tomto bodě spojitá. Obrácená věta ale neplatí! Funkce může být v bodě *a* spojitá a nemusí tam mít derivaci. (viz např. P11, P12, P13)
* ***Monotónnost*** funkce: Má-li funkce *f* v bodě *a* kladnou (zápornou) první derivaci, pak je v tomto bodě rostoucí (klesající). (viz např. P1, P5, P6, P10, (P3, P7, P9)).

Obrácená věta ale neplatí! Funkce může být v bodě *a* rostouci (klesající) a derivace v bodě *a* se může rovnat nule (viz. např. P8)nebo dokonce vůbec nemusí existovat. (viz např., P11, P12, P13)

* ***Extrémy*** funkce: Funkce *f* může (ale nemusí!!) mít v bodě *a* lokální extrém pouze tehdy, když *f´(a) = 0 (*pak *a* je stacionární bod) (viz např. P2, P4) nebo když derivace v bodě *a* neexistuje (viz např. P12, P13). Uvedené podmínky pro existenci extrému v bodě *a* jsou nutné, nikoliv však postačující. Tozn., že podmínka může být splněna a funkce v bodě *a* přesto extrém nemá (viz např. P8, P11). Ověření existence extrému funkce v daném bodě je třeba provést buď za pomoci intervalů monotónnosti nebo za pomoci vyšších derivací funkce.
* ***Konvexnost a konkávnost*** funkce: Má-li funkce *f* v bodě *a* druhou derivaci *fʺ(a) > 0*, pak je funkce v bodě *a* konvexní (dutá). Je-li *fʺ(a) < 0*, pak je funkce v bodě *a* konkávní (vypuklá). Body, ve kterých *fʺ*(*a) = 0* a ve kterých se zároveň mění konvexní charakter funkce na konkávní či naopak, jsou inflexní body.

P1

P2

P3

P4

P5

P11

P12

P7

P8

P9

P13

P10

t1

t2

t3

t4

t5

t6

P6

t7

t8

t9

t10

Než učitel naučí studenty vyšetřovat celý a kompletní průběh funkce, měli by se studenti na několika příkladech naučit zpracovávat jednotlivé fáze této náročné úlohy:

1. ***Monotónnost a extrémy funkce:***

Př.6: Rozhodněte o typu monotónnosti funkce *f* v daném bodě *x*: a) ; b) ;

Řeš.: a) ; b) ;

Př.7: Určete intervaly monotónnosti a extrémy dané funkce:

1. ;
2. ;

 Řeš.: a)

**-2**

**0**

**3**

-3

-1

1

4

 **A**

min

 **B**

max

 **C**

min

 Funkce *f* je klesající v intervalech .

 Funkce *f* je rostoucí v intervalech .

 V bodě má funkce lokální minimum … .

 V bodě má funkce lokální maximum … .

 V bodě má funkce lokální minimum … .

 b)

***0***

-2

-1

1

2

 **A**

max

 **B**

min

 Funkce *f* je rostoucí v intervalech .

 Funkce *f* je klesající v intervalech .

 V bodě má funkce lokální maximum ….

 V bodě má funkce lokální minimum ….

1. ***Konvexnost a konkávnost funkce:***

Př.8: Určete intervaly konvexnosti a konkávnosti funkce: .

Řeš.: 1. první derivace: ; 2. druhá derivace: ;

**-1**

**1**

-2

2

0

 **D**

inf

 **E**

inf

 Funkce *f* je konvexní v intervalech .

 Funkce *f* je konkávní v intervalu .

 Funkce *f* má v bodech dva inflexní body … .

1. ***Asymptoty grafu funkce:***

Př.9: Je dána funkce . Určete všechny asymptoty jejího grafu.

Řeš.: 1. Asymptoty bez směrnice: Jediným bodem nespojitosti funkce *f* je . ***Asymptota bez směrnice existuje v bodě nespojitosti právě tehdy, jeli alespoň jedna z jednostranných limit v tomto bodě nevlastní.***

# Asymptota bez směrnice:

;

 ;

 2. Asymptoty se směrnicí: ; ;

Asymptota se směrnicí:

Osnova pro vyšetření průběhu funkce f: y = f(x):

1. D(f), sudost, lichost, periodičnost, průsečíky s osami, intervaly kladných a záporných funkčních hodnot
2. Chování funkce *f* v nevlastních bodech (určení ),

určení asymptot (pokud existují)

- bez směrnice … … asymptota *ab* bez směrnice může existovat pouze v bodě nespojitosti *b*, a to tehdy, jestliže alespoň jedna z jednostranných limit v *b* je nevlastní. Pak *ab: x = b*.

- se směrnicí ……. *a*s*: y = k.x + q*, kde 

1. Určení intervalů monotónnosti a extrémů funkce (užití první derivace funkce)
2. Určení intervalů konvexnosti a konkávnosti a inflexních bodů funkce (užití druhé derivace funkce)
3. Graf funkce

Pozn. k asymptotám se směrnicí:

Je-li asymptota, pak se pro přímka a křivka ,

(tedy a neomezeně přibližují. Proto:

Tozn., že . **= 0**

Tozn., že .

Analogicky pro asymptotu při .

y

x

Př.10: Vyšetřete průběh funkce: .

Řeš.: ① a) ; b) Funkce f není ani sudá ani lichá …S, L ; c) Průsečíky s osami souřadnic: ; d) Intervaly kladných a záporných funkčních hodnot:

**0**

**1**

-1

2

 ② a) ; ;

 b) Asymptoty:

 1. bez směrnice … bod nespojitosti: . ; ;

 2. se směrnicí … ;

 ; ;

 ③ ; ◘ neexistuje pro ; ◘ …. stacionární body

***1***

-1

2

4

 **A**

min

 V bodě má funkce lokální minimum …;

 ④ ; ◘ …. kritický bod

**0**

**1**

-1

2

 **B**

inf

 V bodě je inflexní bod … .

 ⑤ Graf:

x

y

**1**

**2**

**3**

**2**

**-2**

A

B

***f***

**Slovní úlohy řešené užitím derivací:**

U slovních úloh jde o to, abychom na základě zadaných parametrů vztahujících se k nějakému ději, který musíme pro účely řešení matematizovat do podoby vhodné funkce ***f***, nalezli hodnotu veličiny, případně několika veličin, pro které uvedená funkce ***f*** nabude extrémní, tedy buď maximální nebo minimální, hodnoty.

Abychom byli v řešení slovní úlohy úspěšní, musíme provést přehledný zápis, ve kterém jasně určíme: **Zadané veličiny: ……**  **Hledané veličiny:** je-li jich více, musíme všechny vyjádřit pomocí jedné z nich a pomocí veličin zadaných …… **Funkci**, u které budeme hledat extrém: ……

 Pozn. 1: V zadání každé úlohy je vždy naprosto jasně řečeno, jaká veličina má být maximální nebo minimální – – např.: 1) „…určete rozměry … tak, aby objem byl maximální …“, 2) „…určete rozměry … tak, aby povrch byl minimální …“, 3) „… určete čísla … tak, aby jejich součin byl maximální …“, … Učitel by měl na začátku projít se studenty v některé sbírce úloh pár zadání příkladů a vyzvat studenty, aby rychle v textu našli funkci, u níž budou hledat extrém. Zbaví je tím obav, že pro ně bude obtížné správnou funkci najít. Pozn. 2: Hledání extrémů funkce ***f*** se samozřejmě provádí za pomoci určení první derivace funkce, určení bodů, ve kterých první derivace neexistuje a především určení stacionárních bodů, ve kterých je první derivace rovna nule. Protože nás však u těchto praktických úloh vůbec nezajímá průběh funkce ***f***, nýbrž pouze body, v nichž má extrém, můžeme místo intervalů monotónnosti použít následující tvrzení: **Nechť , ale .**

 **Je-li n – sudé číslo, pak má *f* v  lokální extrém, a to: • maximum, když ; • minimum, když .**

 **Je-li n – liché číslo, pak *f* v  lokální extrém nemá.**

 Studenti si nepochybně použití posledního tvrzení k určení extrémů funkce lépe zapamatují, jestliže jim učitel ukáže, jak tvrzení funguje na následujících třech jednoduchých funkcích:

stac. bod …0

,

**První od nuly různá derivace je**

**čtvrtá, tedy sudá, pro bod**

**je kladná, proto má funkce *f***

**v tomto bodě minimum.**

stac. bod …0

**První od nuly různá derivace je**

**třetí, tedy lichá, proto funkce *g***

**v tomto bodě extrém nemá.**

stac. bod …0

**První od nuly různá derivace je**

**druhá, tedy sudá, pro bod**

**je záporná, proto má funkce h**

**v tomto bodě maximum.**

x

x

x

y

y

y

***f***

***g***

***h***

Př.11: Určete stranu čtverců, které musíme vyříznout ve všech rozích obdélníkového kartonu o rozměrech *80 cm* a *50 cm* tak, aby po složení vznikla krabice maximálního objemu.

**x**

**x**

**x**

**x**

**x**

**x**

**x**

**x**

Řeš.: **Dáno:** rozměry obdélníku: ;

 **Hledáme:** ;

 **Funkce**, u níž určujeme extrém: **Objem kvádru ;**

Kořen nepřichází v úvahu vzhledem k zadaným rozměrům kartonu. Proto budeme dál pracovat pouze s kořenem .

 Ověříme pomocí vyšších derivací, že pro nabude funkce ***f*** maxima:

 **.**

Pozn.: Ve zvídavé třídě může učitel očekávat dotaz (nebo jej může v případě dostatku času položit sám): Jak s řešením úlohy souvisí druhý kořen ? Aby neztrácel příliš mnoho času, měl by být učitel na tuto situaci připraven:

1. Graf funkce

x

y

0

10

25

40

***f***

1. Hledaná délka strany čtverce ***x*** evidentně musí ležet v . Stacionární bod

 leží mimo tento interval, ale kubická funkce *f* v něm má minimum.

Př.12: Do koule daného poloměru ( vepište kužel maximálního objemu. Určete

 poloměr podstavy a výšku kužele.

Řeš.: **Dáno: koule s poloměrem R** ;

 **Hledáme:** poloměr podstavy **r** a výšku **v**vepsaného kužele(dvě neznámé – jednu

 musíme vyjádřit pomocí druhé, případně pomocí zadané veličiny ***R***;

***r***

***R***

***v***

***R***

***O***

***A***

***B***

***V***

***S***

 **Funkce**, u níž určujeme extrém: **Objem kužele** ;

 Pro řešení úlohy má evidentně význam pouze druhý kořen.

 Ověříme pomocí vyšších derivací, že pro nabude funkce ***f*** maxima.

 .

 Nakonec dopočítáme druhý požadovaný rozměr:

 ;

 Poloměr podstavy kužele je , výška kužele .

**Derivace funkce zadané implicitně:**

Funkce může být zadaná - explicitně (přímo, tedy rovnicí *f: y = f*(*x*))

 - implicitně (nepřímo, zastřeně, zprostředkovaně) – např. pomocí analytického vyjádření křivky *F*(*x, y*) *= 0*, která sama nemusí být grafem funkce, ale může představovat sjednocení grafů několika funkcí *fi* (viz např. kuželosečky).

 Derivování implicitní funkce:

x … známým způsobem

 y … jako složenou funkci závisící na x

(např.: (y3+ x2 +7)´= 3y2. y´ + 2x )

Př.13: Napište rovnici tečny křivky k: v jejím bodě .

Řeš.:

Př.14: Kterým bodem elipsy je vedena tečna, která svírá s kladnou poloosou *x* úhel = 45°?

Řeš.:

 ;

 .

Fyzikální význam derivace:

Jednou z nejdůležitějších oblastí použití derivace ve fyzice je derivace podle časové proměnné vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase.

 Např. rychlost je derivace dráhy podle času;

 zrychlení je derivace rychlosti podle času; …

Př.15: Kámen vyhozený z výšky svisle vzhůru má počáteční rychlost a) Jakou rychlost bude mít kámen v čase 1,5 s?

 b) Za jaký čas dosáhne maximální výšku?

 c) Jakou výšku kámen dosáhne?

Řeš.: a)

 ;

 b) ;

 c) .

Rychlost kamene v čase 1,5 s je . Maximální výšku dosáhne za .

Př.16: Těleso sjede po nakloněné rovině 50 m dlouhé za 10 s. Jaká je jeho konečná rychlost, pokud předpokládáme, že dráha je kvadratickou funkcí času a že počáteční rychlost je nulová?

Řeš.:

 Závislost dráhy na čase:

 Konečná rychlost: .

Konečná rychlost tělesa je .

Př.17: Rychlík jedoucí rychlostí má zabrzdit tak, aby se rovnoměrně zpomaleným pohybem zastavil na vzdálenost . Po jakém čase zastaví?

Řeš.: ;

 ; ;

 ;

Rychlík zastaví za .

Př.18: Množství elektrického náboje *Q*, který prochází vodičem, se mění s časem podle vztahu:. a) Vypočítejte okamžitou hodnotu proudu *i* v době . b) Vypočítejte, kdy bude hodnota okamžitého proudu

Řeš.:

1. ;

V čase je okamžitá hodnota proudu . Hodnoty bude dosaženo za .

Př.19: V indukční cívce s indukčností protéká proud . Vypočtěte indukované napětí v čase

Řeš.: ;

 ;

 .

Okamžitá hodnota indukovaného napětí je .

Př.20 Těleso koná harmonický kmitavý pohyb a pro jeho výchylku z rovnovážné polohy platí , kde je amplituda výchylky a je úhlová frekvence pohybu. Odvoďte vzorec pro výpočet rychlosti a zrychlení harmonického kmitavého pohybu.

Řeš.: ;

 ;

 .

**Základní poznatky:**

1. Určete derivace funkce (Realisticky.cz – 10.2.7):
2. ; b) ; c) ; d) ;

1. Určete rovnici tečny a normály grafu funkce v bodě

 [Realisticky.cz – 10.2.14, ]

Typové příklady standardní náročnosti

1. Vypočítejte derivace funkcí:
2. Vypočítejte derivace (Realisticky.cz – 10.2.8):
3. b) c)

1. Určete rovnici tečny grafu funkce , která je rovnoběžná s přímkou .
2. Určete rovnici tečny ke křivce , v bodě T[-8, 4].

1. Do koule o poloměru ***R*** vepište kužel maximálního objemu. Určete výšku tohoto kužele.
2. Ze čtvrtky kartonu formátu A4 (210 x 297 mm) vystřihněte v rozích čtyři stejné čtverečky tak, aby složením vzniklého obrazce vznikla krabička maximálního objemu.

 [Realisticky.cz – 10.2.15: Je nutné vystřihnout čtverce o straně *40,4 mm*.]

1. Určete ideální rozměry válcové pivní plechovky, která při objemu *0,5 l* bude mít minimální povrch (minimální spotřeba plechu).
2. Vyšetřete průběh funkce: a) ; b)

Rozšiřující cvičení

1. Určete rovnice tečen křivky *k:*  v jejích průsečících s přímkou .
2. Určete rovnici tečny křivky v jejím bodě .

1. Trosečníka na voru unáší mořský proud rychlostí 7 km/h. Kolmo na směr proudu pluje obchodní loď rychlostí 30 km/h (vzhledem k povrchu Země). V jeden okamžik je námořní loď vzdálena od místa, kde se protínají jejich trajektorie 100 km a trosečník 10 km. V jaké nejmenší vzdálenosti se minou? Zachrání loď trosečníka, když předměty jeho velikosti vidí na vzdálenost 20 km?

[Realisticky.cz – 10.2.15: Minou se v minimální vzdáleností 13 km, asi ho loď zachrání.]