Výpočet Ludolfova čísla π

Ludolfovo číslo je matematická konstanta udávající poměr obvodu kruhu k jeho průměru. Jeho hodnotu lze snadno nalézt například měřením obvodu a průměru mince

$$\pi = \frac{o}{d}$$

Už žáci na základní škole rychle zjistí, že π je konstanta, protože jim vychází stejná hodnota uvedeného poměru bez ohledu na velikost mince.

Lze určit hodnotu Ludolfova čísla pomocí náhody?

Představme si rovinu, na níž jsou narýsovány rovnoběžky a jejichž vzdálenost je d. Na tuto rovinu házíme náhodně jehlu délky $l, l \leq d$. Ptáme se: Jaká je pravděpodobnost, že jehla přetne některou z rovnoběžek?

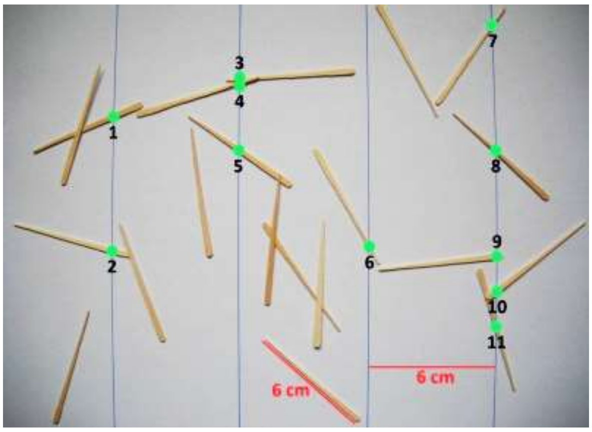
Takto zní slavná matematická úloha, kterou v roce 1777 vymyslel francouzský matematik Georges Louis Leclerc de Buffon a je známá pod názvem **Buffonova úloha o jehle**. Nejpozoruhodnější na tomto jevu je, že při dostatečném počtu hodů jehlou umožňuje spočítat přibližnou hodnotu čísla π.

Rozbor úlohy:

Pravděpodobnost, že hozená jehla dopadne na čáru, spočítáme takto:

$$P = \frac{v}{n} = \frac{\text{počet průsečíků jehly s linkou}}{\text{počet hodů}}$$

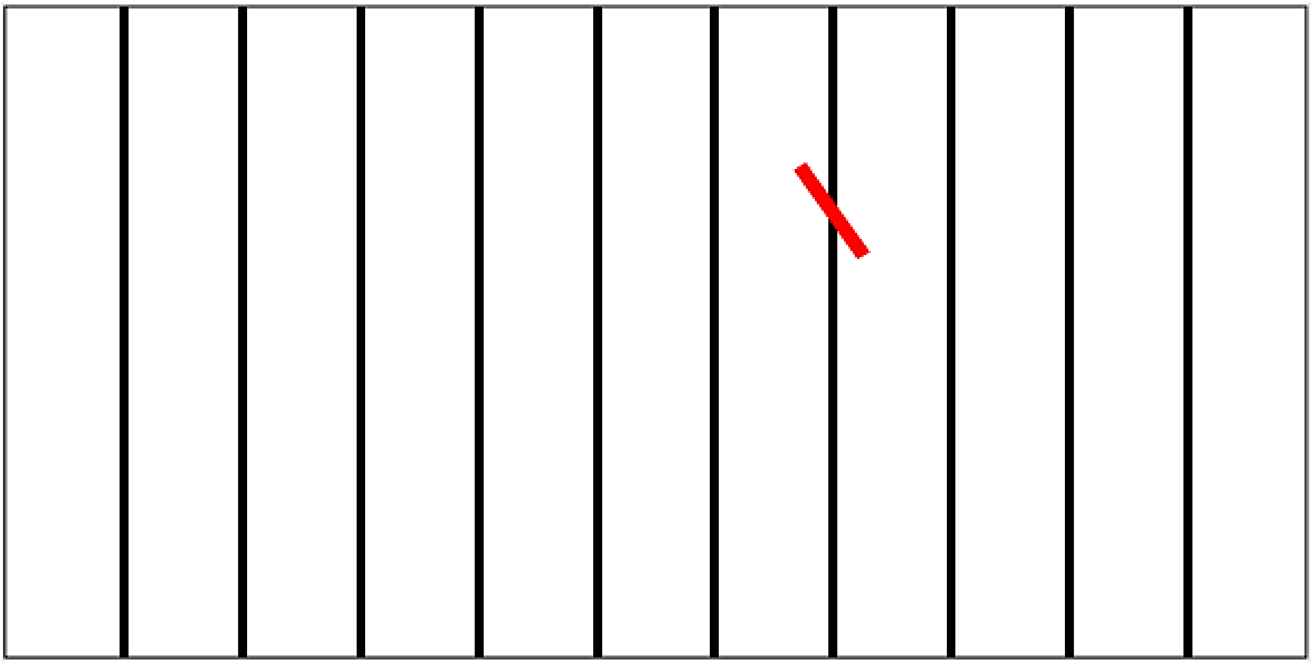
Pro $l \approx d$ dostaneme $P = \frac{2l}{\pi d}$, z čehož při dosazení z prvního vztahu pro *P* dostáváme $\boldsymbol{\pi = \frac{2ln}{vd}}$.
Platí, že čím více hodů provedeme, tím bude odhad hodnoty π přesnější (přibližování se k přesné hodnotě není moc rychlé).



Pozn.: Například Volf v roce 1850 provedl 5000 hodů a dostal pro π odhad 3.1596. Problém Buffonovy jehly poprvé převedl do praxe Lazaroni v roce 1901, když provedl 34080 hodů jehlou a došel k hodnotě $\pi = 3.1415929$. Po zavedení počítačů se však naskytla příležitost tento pokus nasimulovat na počítači a rychlost „pokusů" o několik řádů zrychlit. Metoda řešení matematických úloh pomocí modelování náhodných veličin a statistického odhadu se nazývá **metodou Monte Carlo**.

Pravděpodobnost jevu, kdy jehla stejné délky, jako je vzdálenost mezi rovnoběžkami, po dopadu na papír zůstane ležet na papíře tak, že protíná některou z linek je rovna $\frac{2}{\pi}$.

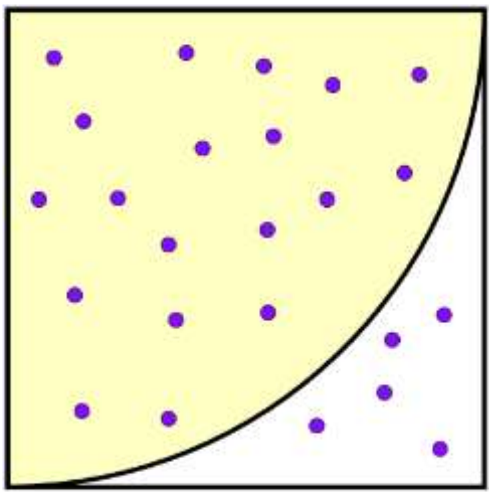
Nyní už zbývá vzít si linkovaný papír, tyčku přibližně stejné délky jako jsou mezery mezi linkami a začít náhodně házet. Jaká hodnota π Ti vychází?



Podobně lze stanovit hodnotu Ludolfova čísla π následujícím způsobem.

Narýsujme čtverec o straně délky *r* a do něj čtvrtkruh se středem v jednom rohu čtverce s poloměrem také *r.* Nyní házejme náhodně kuličky do čtverce a výsledný poměr počtu všech hodů a hodů do čtvrtkruhu stanoví hodnotu π.

Rozbor úlohy:



Obsah čtverce je $S_1 = r^2$

Obsah čtvrtkruhu je $S_2 = \frac{\pi r^2}{4}$

Pravděpodobnost, že kulička náhodně dopadne do čtvrtkruhu je dána poměr obsahů jednotlivých ploch: $P = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\frac{\pi r^2}{4}}{r^2} = \frac{\pi}{4}$

--> **Pro Ludolfovo číslo platí** $\boldsymbol{\pi = 4 \cdot \frac{S_2}{S_1}}$, kde počet hodů do čtvrkruhu je S_2 a celkový počet hodů S_1.

Jaké jsou Tvé výsledky?

Literatura:

Joan Gómez – Neeuklidovské geometrie (když se přímky zakřivují), str. 105-107

Buffonova jehla v Geogebře: https://www.geogebra.org/m/vnAZxxzN nebo https://www.geogebra.org/m/MXhS2Zs3

Prezentace: http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/ppk_tema03.pdf