

Úvod do teorie grafů

Teorie grafů je obor diskrétní matematiky, který zkoumá vlastnosti takzvaných grafů. **Graf** je matematická struktura, definovaná množinou vrcholů a množinou hran, kde každá hrana je určena povinně dvěma vrcholy a volitelně směrem nebo váhou; váha může odrážet např. délku, náklady na přesun nebo průchodnost. Graf si lze dobře představit jako mapu, na které vrcholy představují města a hrany představují dálnice, přičemž každá z těchto dálnic přímo spojuje dvě města.



Problém 1: Sedm mostů města Královce

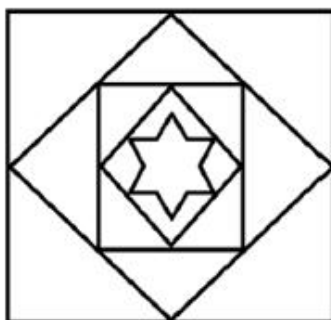
Sedm mostů města Královce (též Königsberg, nyní Kaliningrad) je slavný, již vyřešený matematický problém. Otázka zní, zda **je možné všechny mosty přejít tak, aby ten, kdo se o to pokouší, vstoupil na každý most pouze jednou**. Zdůvodněte svou odpověď.

Video:



Problém 2: Eulerovské grafy (jednotažky)

Nakreslete útvar jednou čarou. (Svůj postup popište pomocí šipek.)



Brněnská logická hra



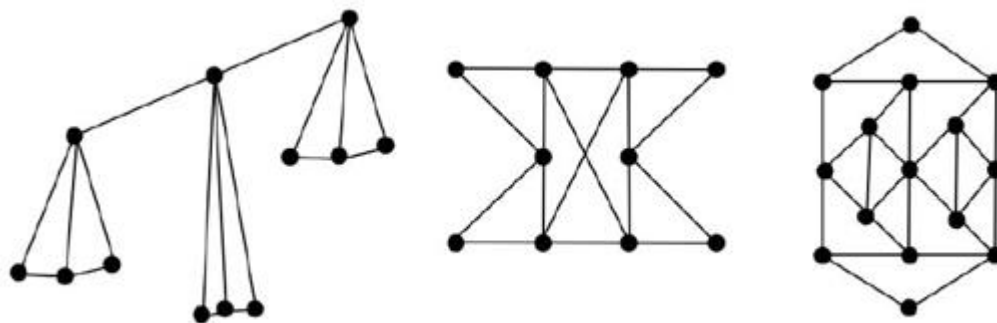
BRLOH

Video: Úvod do teorie grafů <https://www.youtube.com/watch?v=8EGOLgZR5gs>

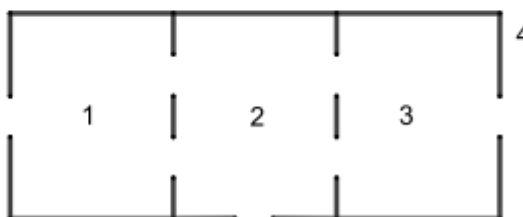
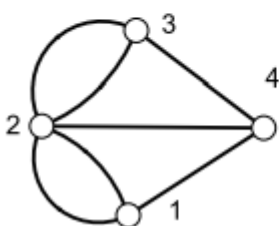


Problém 3: Eulerovské grafy (jednotažky)

Rozhodněte, zda lze obrázky nakreslit jedním tahem (otevřeným, uzavřeným). Poté tah navrhněte.

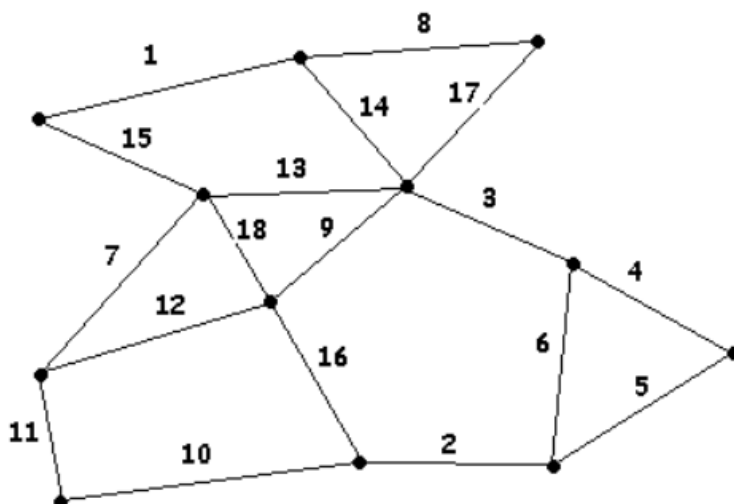


Procházení labyrintem. Problém eulerovských tahů můžeme přeformulovat i na procházení labyrintu. Při daném půdorysu labyrintu je třeba projít všemi dveřmi právě jednou. Jednotlivé místnosti reprezentujeme uzly a tyto spojíme hranou, pokud jsou spojeny dveřmi. Slavný problém města Královce převedený na průchod labyrintem je na obrázku 5 vpravo.



Problém 4: Silničáři (Hledání minimální kostry)

Napadne sníh a silničáři musí pluhem prohrabat cesty a tím propojit spojení mezi 12 městy (12 vrcholů grafu). Chtějí, aby práce byla hotova co nejdříve, tzn. pluhař odhrabal co nejkratší úsek. Pokud pluhař pojedou po nějaké cestě podruhé, už se její délka nepočítá, neboť cesta zůstala odhrabaná a pluh pouze projíždí bez námahy. Na obrázku je u každé cesty zapsaná její délka v kilometrech. Co musí silničáři minimálně prohrabat?



Pozn.: Je nutné zvýraznit v obrázku takovou variantu, aby byl počet prohrabaných kilometrů co nejkratší, a přesto se obyvatelé kteréhokoliv města mohli dostat do ostatních měst.

Zdroje:

Sedm mostů města Královce

https://cs.wikipedia.org/wiki/Sedm_most%C5%AF_m%C4%9Bsta_Kr%C3%A1lovce

Eulerovské grafy (jednotažky)

<https://teorie-grafu.cz/vybrane-problemy/jednotazky.php>

Klasické úlohy teorie grafů na školách

<http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/Voracova.pdf>

Videa:

Euler, grafy a 7 mostů kdesi v Rusku

<https://www.youtube.com/watch?v=cZdIDgDhm70&list=PLbRLrrkYHYe6JUKa4yCY3ys1vCmtNuSuf>

Řešení bludišť za využití teorie grafů

<https://www.youtube.com/watch?v=Dcpmd5ae1kc>

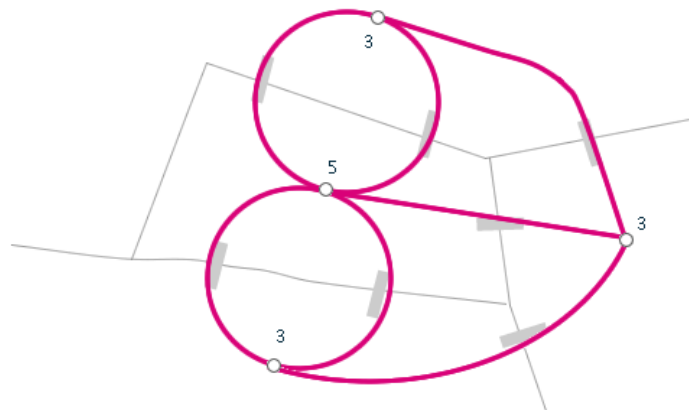
Úvod do teorie grafů

<https://www.youtube.com/watch?v=8EGOLgZR5gs>

Řešení:

Problém 1: Sedm mostů města Královce:

Leonhard Euler jako první dokázal, že to možné není, odpovídající graf totiž nelze projít pomocí tzv. eulerovského tahu. Pouze eulerovské grafy mají tu vlastnost, že je možné je „nakreslit jedním tahem“. Pokud tedy sedm mostů města Královce eulerovský graf netvoří, dokazuje to, že mosty není možné tímto způsobem přejít.



Věta: Graf je možno nakreslit jedním tahem právě tehdy, když je souvislý a všechny vrcholy jsou sudého stupně (vychází z nich sudý počet hran), nebo má právě dva vrcholy lichého stupně.

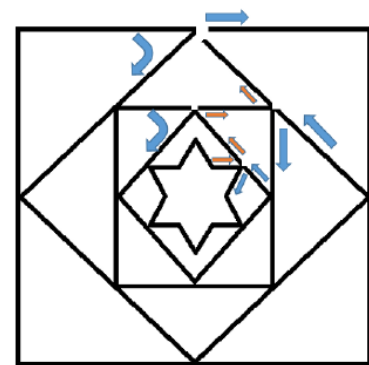
- Jsou-li v grafu dva vrcholy lichého stupně, potom tah začíná v jednom z těchto stupňů a končí ve druhém.



Problém 2: Jednotažky - Brlloh

Problém 3: Jednotažky

První nelze jedním tahem (více jak dva vrcholy s lichým počtem hran). Druhý lze jedním uzavřeným tahem (všechny vrcholy sudého stupně, lze začít v libovolném vrcholu a skončit v něm). Třetí graf má dva vrcholy lichého stupně, lze zkonstruovat otevřený tah (začneme v jednom vrcholu lichého stupně a skončíme v druhém).



Problém 4: Silničáři (Hledání minimální kostry)

- 1) Seřadíme cesty (= hrany grafu) podle jejich délky od nejkratší po nejdelší
- 2) Zkoumejme postupně jednotlivé cesty, nejdříve 1 km dlouhou, potom 2 km dlouhou...
- 3) Pokud cesta spojuje města, která zatím nejsou nijak propojena (neexistuje mezi nimi žádná cesta ani delší přes jiná města), zvýrazníme ji pastelkou (= přidáme ji na seznam pluhaře = přidáme ji do našeho grafu), pokud však města již nějak propojena jsou (viz obr. 33), tuto cestu nezvýrazníme a pluhař ji prohrabávat nebude.
- 4) Jestliže jste tímto způsobem prověřili všechny cesty, ověřte sami, že jsou opravdu všechna města navzájem propojena a je možno se z jakéhokoliv dostat po vyhrabané cestě do kteréhokoliv jiného.

