

Úvod do teorie her

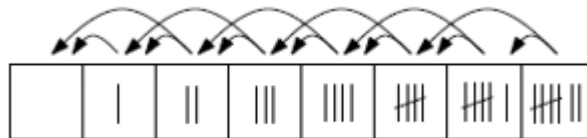
Teorie her je disciplína aplikované matematiky, která analyzuje široké spektrum konfliktních rozhodovacích situací, které mohou nastat kdekoliv, kde dochází ke střetu zájmů. Herně-teoretické modely se pak snaží tyto konfliktní situace nejen analyzovat, ale sestavením matematického modelu daného konfliktu a pomocí výpočtů se snaží nalézt co nejlepší strategie pro konkrétní účastníky takových konfliktů. Teorii her založil jeden z předních matematiků John von Neumann.

Hra je matematický model rozhodovací situace, jejíž výsledek závisí na rozhodnutí alespoň dvou různých hráčů. Protože takové situace můžeme nalézt téměř ve všech oblastech týkajících se našeho života, obor aplikací teorie her je mimořádně široký a bohatý. Zahrnuje ekonomii, telekomunikace, politologii, sociologii, biologii, etiku, dopravu a mnoho dalších oblastí.

Hra 1: Sedm sirek

Na stole je hromádka sedmi sirek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

Počty sirek s možnými tahy:



Hra 2: Ořechy

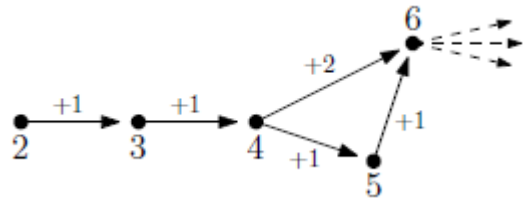
V košíku je 17 ořechů. Míša s Filipem se pravidelně střídají v tazích, začíná Míša. V každém tahu sní hráč minimálně jeden ořech a maximálně třetinu všech zbývajících ořechů. Kdo nemůže udělat tah, prohrál. Rozhodněte (a zdůvodněte), který z nich má vyhrávající strategii.

Hra 3: Přičítání dělitelů (kradení strategií)

Začíná se dvojkou. V jednom tahu hráč přičte k číslu jeho libovolného vlastního dělitele. Kdo jako první překročí hodnotu 5773, prohrál. Kdo má vyhrávající strategii? A co kdyby ten, kdo první překročí 5773, vyhrál?

Řešení. Nakresleme si, jak vypadá prvních pár pozic, viz obrázek.

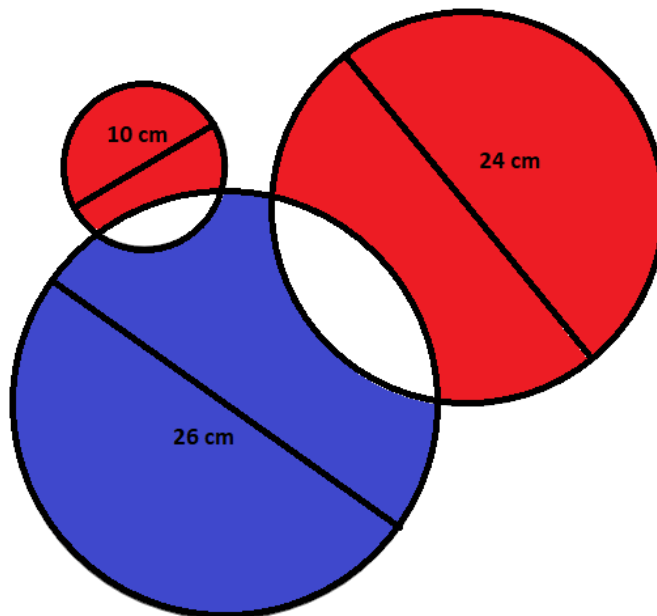
Díky tomu, že hra je konečná a nepřipouští remízy, je pozice 6 buď vyhrávající, nebo prohrávající. Pokud je prohrávající, pak začínající hráč, který je na řadě rovněž v pozici 4, bude volit přičtení dvojky, čímž se druhý hráč dostane do prohrávající pozice 6.



Na druhou stranu, je-li pozice 6 vyhrávající, pak začínající hráč může z pozice 4 táhnout do pozice 5, odkud jeho protivník musí nutně táhnout do pozice 6, čímž se první hráč ocitl ve vyhrávající pozici. Tím jsme dokázali, že **první hráč má vyhrávající strategii – vždy si ji může pro sebe ukrást.**

Únik od tématu: Kruhy

Na obrázku jsou tři kruhy se zadaným průměrem. Je větší červená nebo modrá plocha? Vypočítejte, o kolik se barevné plochy liší.



Zdroje:

Teorie her pro nadané žáky středních škol, Bc. Alena Skálová,
<https://is.cuni.cz/webapps/zzp/detail/129490/>

Přednáška z teorie her
<https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/hyksova.pdf>

Videopřednáška Teorie her v praxi
https://www.youtube.com/watch?v=WH-H0a_wlK8

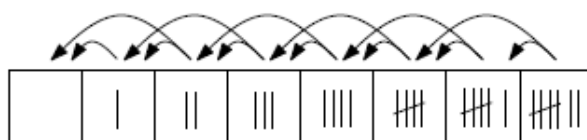


Řešení:

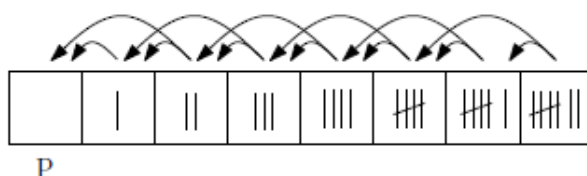
Hra 1: Sedm serek

Hra 1. Na stole je hromádka sedmi serek. Hráč, který je na řadě, může odebrat jednu nebo dvě sirky. Kdo nemůže táhnout (na stole už není žádná sirka), prohrál.

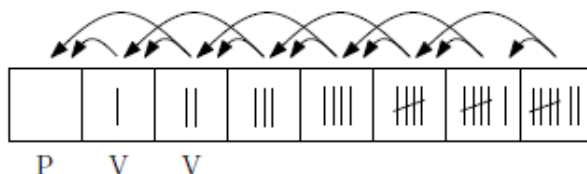
Řešení. Nakresleme si možné počty serek včetně možných tahů z jednotlivých pozic – viz následující obrázek.



Koncová pozice je v této hře jediná (na stole nezbyla žádná sirka) a podle pravidel je prohrávající. Můžeme si to poznačit do nákresu.

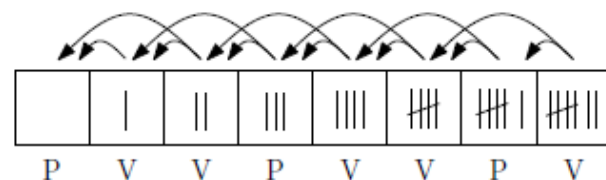


Pokud na stole zbývá jedna nebo dvě sirky, může je hráč ve svém tahu všechny odebrat a tím vyhrát (jeho soupeř se dostane do pozice, o které už víme, že je prohrávající).



Zbývají-li na stole tři sirky, pak hráč nemá jinou možnost než táhnout do vyhrávající pozice (což jistě potěší jeho protihráče), a tedy tři sirky jsou prohrávající pozice.

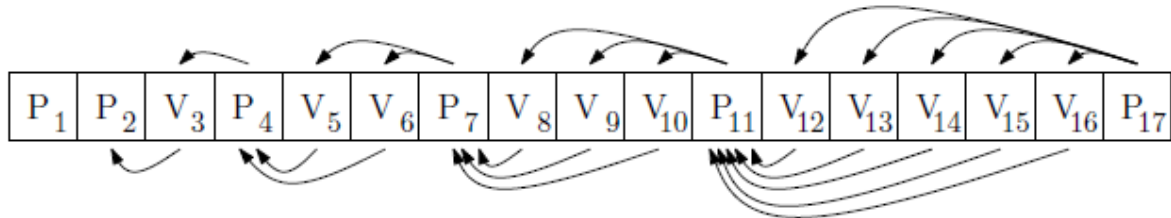
Z hromádky čtyř, resp. pěti serek lze odebrat jednu, resp. dvě a tím se dostat do prohrávající pozice – proto jsou obě tyto pozice vyhrávající. Podobně si můžeme rozmyslet, že šest serek je prohrávající pozice a sedm vyhrávající.



Po označení V a P pozic v této hře je ihned patrná vyhrávající strategie prvního hráče – hraj tak, aby protihráči zbyly na stole sirky v počtu násobků tří. ♠

Hra 2: Ořechy

Úloha 1. Úlohu budeme řešit podobně jako v seriálu. Nakresleme si možné pozice (počty ořechů) – viz následující obrázek. Postupně určíme, zda jsou vyhrávající nebo prohrávající.



Již ze zadání víme, že pozice s jedním a dvěma ořechy jsou prohrávající, neboť pokud bychom z nich chtěli táhnout, mohli bychom sníst maximálně $\frac{1}{3}$, resp. $\frac{2}{3}$ ořechu, ale protože můžeme jíst pouze celé ořechy, nemůžeme nic sníst, tedy nemáme tah a prohráli jsme. Pozice 3 je vyhrávající, protože se z ní umíme dostat do pozice 2, která je prohrávající. Pozice 4 je prohrávající, protože se z ní umíme dostat jen do vyhrávající pozice 3, a ze stejného důvodu jsou prohrávající i pozice 7, 11 a 17 – viz odpovídající tahy na obrázku. Vyhrávající strategii má druhý hráč, tedy Filip, a to držet Míšu vždy na prohrávajících pozicích.¹⁴

Kruhy

Odpověď: 0

Označme bílé plochy X, Y . Pak platí, že $\pi \cdot 13^2 - X - Y - (\pi \cdot 12^2 - X + \pi \cdot 5^2 - Y) = 169\pi - 144\pi - 25\pi = 0$.