
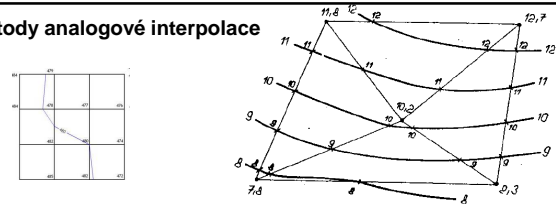


### Metody prostorové interpolace (deterministické metody)



### Metody analogové interpolace



- vytváření izoliní na základě spojování míst s obdobnými hodnotami jevu založené na expertním odhadu
- využívají empirie, obecné teorie a znalosti místních zvláštností
- expertní systémy

**Základní omezení (s ohledem na počítačové zpracování):**

- problém zpracování velkého množství bodů
- problém subjektivního přístupu
- problém časové náročnosti

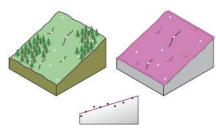
### Globální interpolátory využívající analýzy trendu

**Princip** - mnohonásobná regrese hodnot atributu vs. geografické souřadnice.

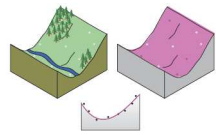
Metodou nejmenších čtverců jsou nalezeny nejhodnější koeficienty pro daný polynom n-tého řádu.

Předpokládá se normální rozdělení.

lineární trend:

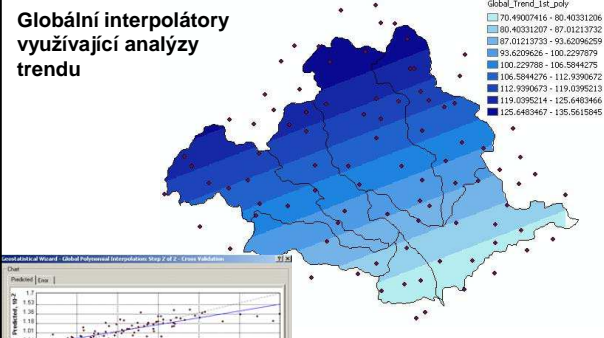
$$z = b_0 + b_1x + b_2y$$


kvadratický trend:

$$z = b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2$$


*b* – koeficienty, *x*, *y* – souřadnice bodů

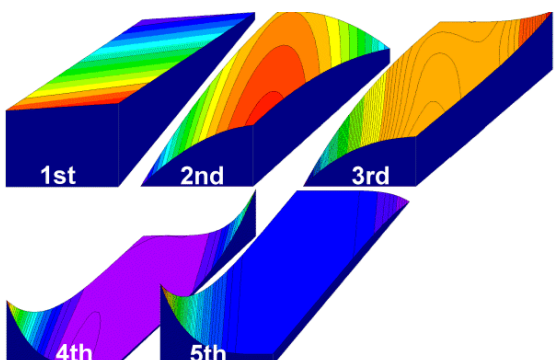
### Globální interpolátory využívající analýzy trendu



Min	Max
70.49027416	93.40331206
80.40531267	87.01213732
87.01213733	93.62096259
93.6209626	100.2297979
100.229798	106.5844275
106.5844276	112.9396213
112.9396213	119.0395213
119.0395214	125.6483466
125.6483467	135.5615965

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (z(x_i) - \hat{z}(x_i))^2}{n}}$$

### Interpolace trendové složky polynomy 1 až 5 stupně



### Globální interpolátory využívající regresní analýzy

**Princip** - existuje vazba mezi hodnotami interpolované veličiny a vybranými jinými atributy studovaného prostoru (např. teplota a nadmořská výška, koncentrace znečištění a vzdálenost od zdroje).

**Forma** - empirický model závislosti interpolované veličiny na hodnotách jedné či několika veličinách nezávislých:

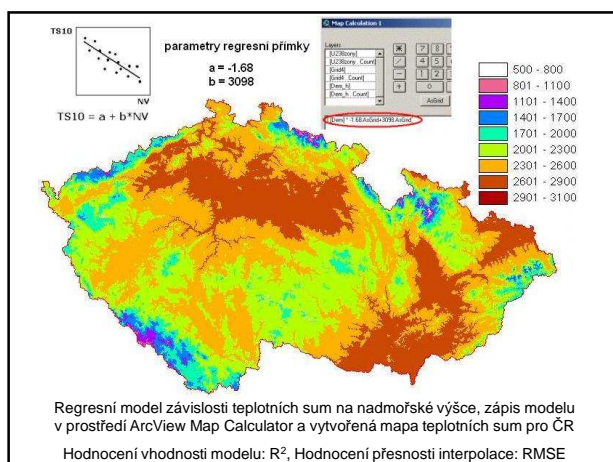
$$z(x) = b_0 + b_1P_1 + b_2P_2 + \epsilon$$

*b*<sub>0</sub>...*b*<sub>*n*</sub> - regresní koeficienty  
*P*<sub>1</sub>... *P*<sub>*n*</sub> - nezávislé proměnné

Sestavení regresní závislosti je založeno na metodě nejmenších čtverců.

Výsledný model může být lineární i nelineární.

Jako nezávislé proměnné lze kombinovat geografické souřadnice s jinými atributy.

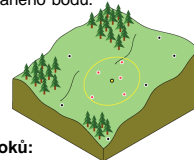


### Metody lokální interpolace (lokální interpolátory)

Globální interpolátory - lokální efekty = náhodný šum

Lokální interpolátory - hledaná hodnota je určena z určitého počtu měření z předem definovaného okolí počítaného bodu.

$$\hat{Z}_j = \sum_{i=1}^n \lambda_i z_i$$



Obecný postup se sestává z následujících kroků:

1. definování velikosti a tvaru zájmového okolí
2. nalezení měřených bodů v tomto okolí
3. nalezení matematické funkce vystihující kolísání hodnot nacházejících se v okolí daného bodu
4. výpočet hodnoty pro uzly regulérní sítě (grid)

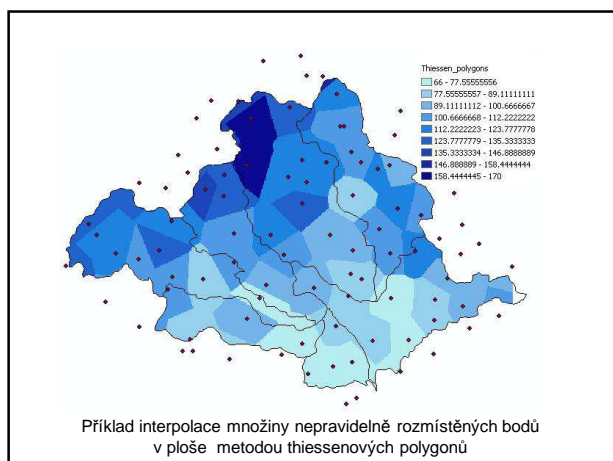
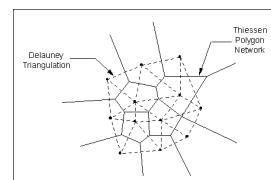
Pro lokální interpolace jsou důležité následující skutečnosti:

- druh použité interpolační funkce
- velikost, tvar a orientace okolí
- počet bodů v okolí zahrnutých do výpočtu
- rozložení uvažovaných bodů (regulérní či nepravidelné)
- možné začlenění externí informace např. o obecném trendu

### Metoda nejbližšího souseda (thiessenovy polygony)

**Princip** - hodnoty atributů v neměřených místech jsou určeny z hodnot nejbližšího místa měřeného.

1. Plocha je rozdělena na nepravidelné trojúhelníky (**Delaunay triangulace**)
2. Z trojúhelníkové sítě jsou definovány tzv. **thiessenovy polygony**.



### Metody konstrukce nepravidelných trojúhelníků (TIN)

➤ Exaktní metoda vhodná pro nepravidelně rozmístěné body měření.

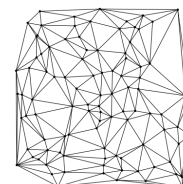
➤ Body jsou spojeny liniemi a vytváří síť nepravidelných trojúhelníků.

➤ Metody není možné použít k extrapolaci

➤ Hodnoty v bodech na počátku a konci linií jsou známy, lze použít jednoduchou lineární závislost k interpolaci bodů mezi dvěma body na linii.

➤ TIN je metoda interpolace i způsob vizualizace spojených povrchů.

➤ Metoda vhodná pro povrchy vyznačující se náhlými změnami spádu (fluviálně erodované povrchy).



**Proces vytváření spojitého povrchu metodou TIN zahrnuje:**

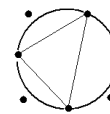
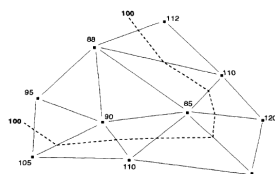
- výběr charakteristických bodů (ne z jakékoliv množiny nepravidelně rozmístěných bodů lze vytvořit TIN)
- způsob propojení bodů do trojúhelníkové sítě
- způsob modelování povrchu uvnitř trojúhelníků

**Výběr bodů a algoritmy pro výběr bodů:**

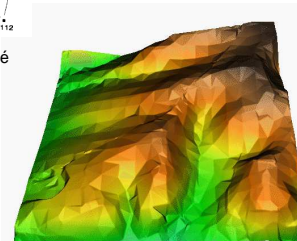
- algoritmus Fowler and Little
- VIP algoritmus
- Drop heuristic algoritmus

<http://www.ncgia.ucsb.edu/giscc/units/u056/>

**Způsob propojení bodů do TIN - Delaunay triangulace:**



TIN je model vhodný k následné konstrukci izoliní.



**Metoda inverzní vzdálenosti**

**Princip** - hodnota atributu v určitém bodě je váženým aritmetickým průměrem hodnot okolních měřených bodů.

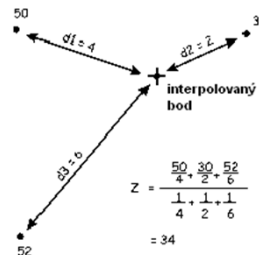
Váhy jsou určeny pro každý bod jako inverzní vzdálenost měřeného bodu od bodu interpolovaného.

Obecný vzorec pro odhad hodnoty Z:

$$\hat{Z} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i z_i}{\sum_{i=1}^n w_i}$$

Váhy se určují ze vztahu:  $w = \frac{1}{d^k}$  nebo  $w = e^{-kd}$

Hodnoty vah  $w_i$  představují funkci vzdálenosti  $d$ . Hodnota exponentu  $k$  se nejčastěji volí 1 či 2.



$$Z = \frac{\frac{50}{4} + \frac{30}{2} + \frac{52}{6}}{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}} = 34$$

**Odhad hodnoty v bodě metodou inverzní vzdálenosti**

**Metoda inverzní vzdálenosti efekt „průměrování“ - potlačení lokálních extrémů**

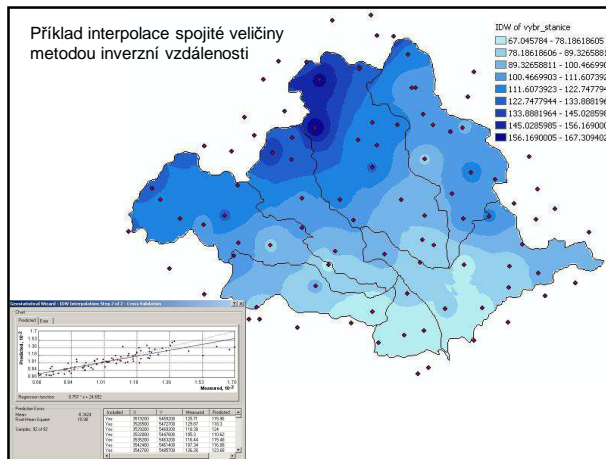


Problém generování koncentrických struktur kolem interpolovaných bodů (tzv. „bulls eyes“)

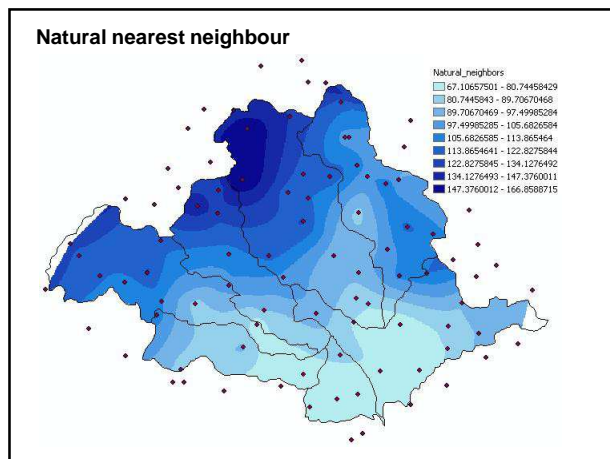
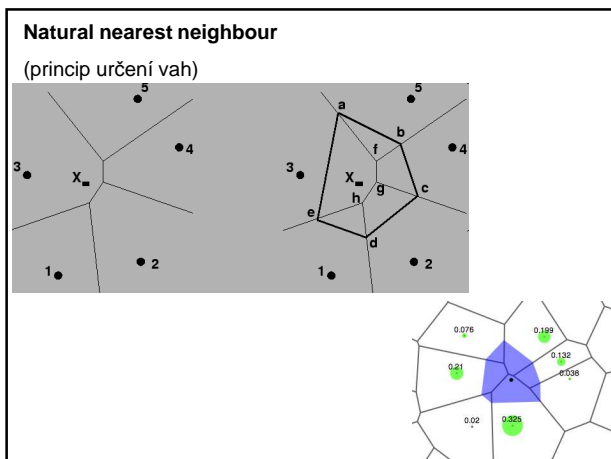
**Způsob definování okolí**

- izotropní povrch - kruhové okolí interpolovaného bodu, pro odhad hodnoty bereme všechny body bez ohledu na směr
- anizotropie - body v jistém směru mohou mít na interpolovanou hodnotu jinou váhu než ve směru jiném - okolí tvaru elipsy
- minimální a maximální počet bodů pro výpočet nové hodnoty
- rozmístění bodů v rámci definovaného okolí (kvadranty, oktanty)
- IDW je senzitivní na shluky měřených bodů a také na odlehle hodnoty

**Příklad interpolace spojité veličiny metodou inverzní vzdálenosti**







### Splínové funkce

Matematicky definované křivky, které po částech **exaktně** interpolují jednotlivé body povrchu, jsou lokálním interpolátorem

Zajišťují kontinuální spojení jednotlivých částí interpolovaného povrchu.

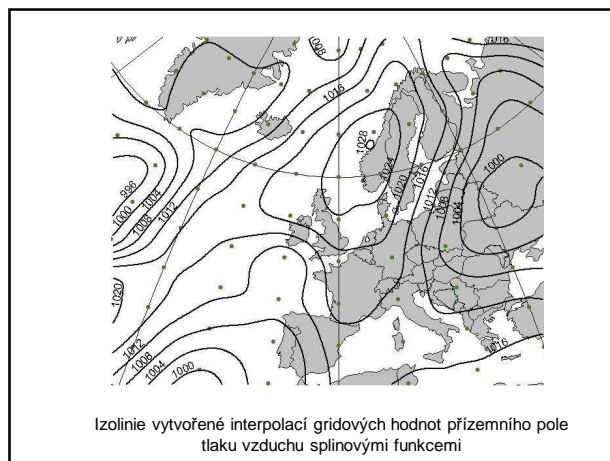
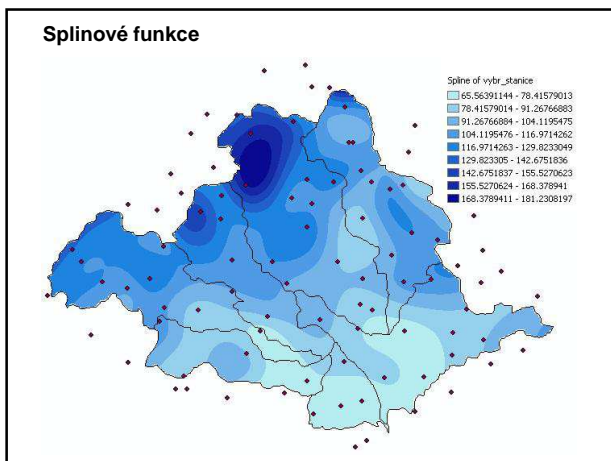
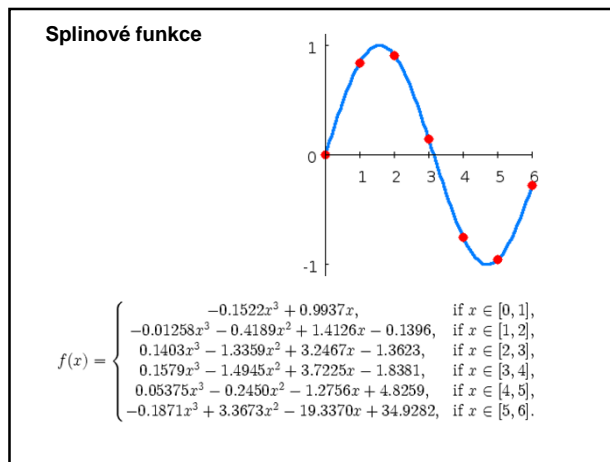
Lze modifikovat část povrchu bez přepočtu celého povrchu (toto neumožňují trendy).

Pro interpolování linií se používá tzv. **kubických splínů**, pro interpolování povrchů se využívá jejich 2D analogie označované jako „**thin plate splines**“

Nahrazují části povrchů interpolované přesným splínem lokálně shladenou průměrnou hodnotou.

Povrch je interpolován tak, aby procházel co nejbližě měřeným bodům a také aby zachoval **podmínku minimální křivosti**.

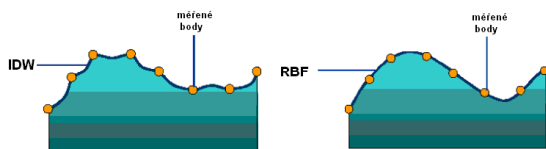
Interpolované povrchy jsou často značně shladené, jsou vhodné pro interpolaci jevů, které se mění spojitě.



**„Radial basis functions“**

Exaktní interpolátory využívající splinové funkce a umělé neuronové sítě

Analogie „přetažení“ gumové membrány přes body v prostoru.



Porovnání výsledků interpolace metodou inverzní vzdálenosti (IDW) a metodou splinových funkcí (RBF)

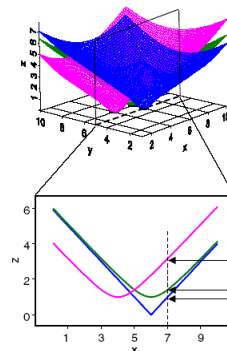
**„Radial basis functions“**

Hodnotu každé RBF v predikovaném bodě můžeme odečíst z grafu jako  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ .

Prediktor má podobu váženého průměru, tedy neznámou hodnotu  $z$  v bodě  $p$  najdeme jako :

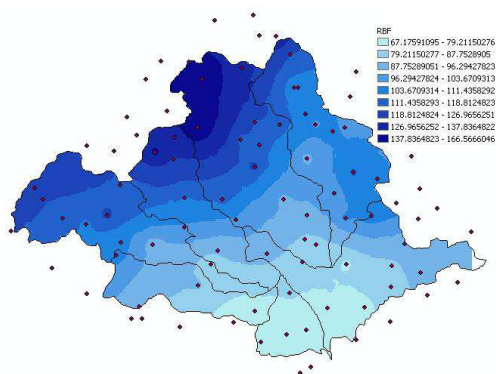
$$z(p) = w_1\phi_1 + w_2\phi_2 + w_3\phi_3 + \dots$$

Váhy  $w_1, w_2, w_3$  jsou vypočteny z hodnot interpolované veličiny v bodech měření a jsou nalezeny na základě podmínky, že pokud je odhadován bod v bodě měření, je interpolován přesně.



Princip interpolace metodou multiquadric RBF

**„Radial basis functions“**



**Multiquadric RBF**

$$B_i(x, y) = \sqrt{d_i(x, y)^2 + R^2}$$

$B_i(x, y)$  – radiální funkce vzdálenosti  $d_i(x, y)$

$d_i(x, y)$  – relativní vzdálenost měřeného bodu v místě  $x, y$ , od místa odhadu  $x, y$

$R^2$  – vyhlazovací parametr

Pro funkce  $B_i(x, y)$  jsou během výpočtu v každém interpolovaném bodě stanovovány váhy řešením soustavy lineárních rovnic.

Čím větší je hodnota  $R$ , tím více je shladený je výsledný interpolovaný povrch.

**„Radial basis functions“**

Parametry konkrétní interpolující funkce jsou optimalizovány výpočtem chyby RMSPE.

RBF jsou exaktní metodou a jsou vhodné pro hladké povrchy generované z velkého počtu bodů (např. modely terénu).

Nehodí se pro interpolaci jevů, které se výrazně mění v prostoru a dále pro interpolaci jevů, u nichž existuje jistá míra nejistoty ohledně přesnosti měřených bodů.

**RBF a splinové funkce**

„terracing and ringing“ efekt



**Topogrid/Topo to raster (metoda ANUDEM)**

<http://fennergchool.anu.edu.au/publications/software/anudem.php>

- hydrologicky „korektní“ DEM z vrstevnic

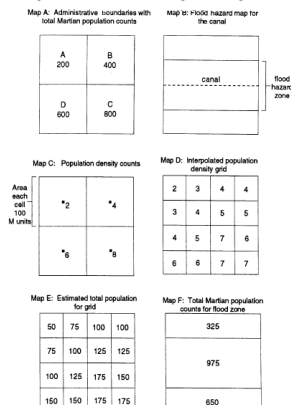
### Metody prostorové interpolace ploch

Mnoho jevů se vztahuje k plošným jednotkám spíše než k bodům ( hustota obyvatelstva, kvalita pitné vody...).

Metody řeší způsob, jakým lze odhadnout hodnoty jistého jevu na základě hodnot jiného jevu vázaných na plošné jednotky.

- plošné jednotky se shodují
- zdrojové jednotky jsou podmnožinou jednotek výstupních
- metody zachovávající objem studovaného jevu (volume preserving)
- metody nezachovávající objem studovaného jevu (non-volume preserving)

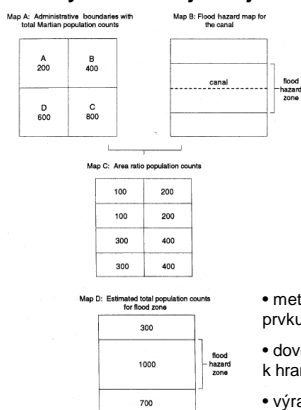
### Metody nezachovávající objem studovaného jevu



Jaký je počet obyvatelstva uvnitř záplavové zóny?

1. výpočet hustoty obyvatelstva pro každou plochu
2. určení centroidu každé plochy
3. interpolace hustoty obyvatelstva výše popsánymi metodami
4. Suma počtu obyvatelstva za všechny plochy v dané zóně

### Metody zachovávající objem studovaného jevu



„pncophylactic method“

1. Proveďte se překrytí cílových zón (oblastí) přes oblasti zdrojové.
2. Určte se poměrná část cílové zóny, která spadá do zóny zdrojové.
3. Celková hodnota atributu v cílové zóně je určena v závislosti na plošném zastoupení zón zdrojových.

- metoda zachovává sumu studovaného prvku
- dovoluje kontinuální změnu směrem k hranicím každé třídy.
- výrazně mění min a max hodnoty