

Jednoduchá azimutální zobrazení, azimutální projekce



Matematická kartografie

Osnova

1. Základní vztahy a vzorce
2. Ekvidistantní zobrazení
3. Ekvivalentní zobrazení
4. Konformní zobrazení
5. Azimutální projekce

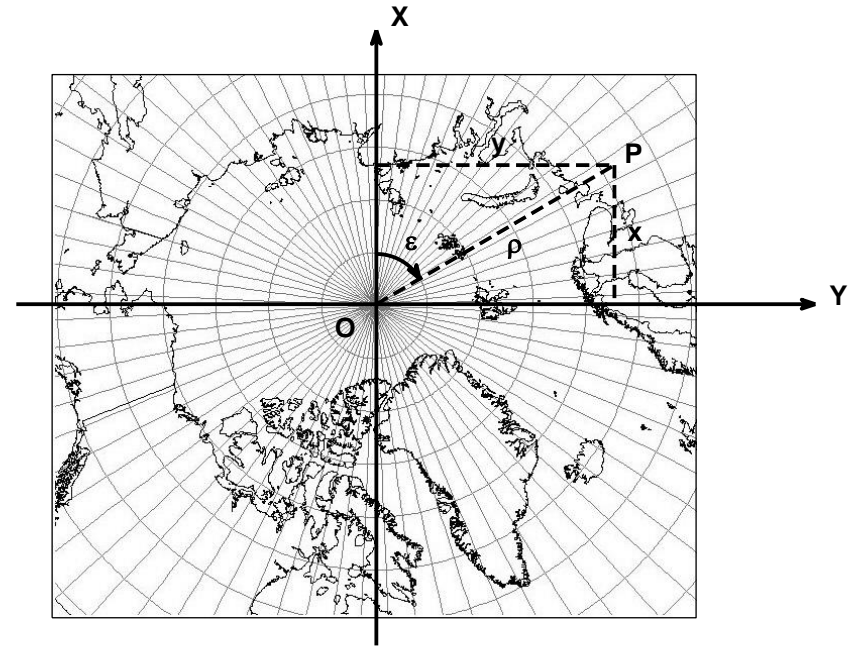


1

ZÁKLADNÍ VZTAHY A VZORCE

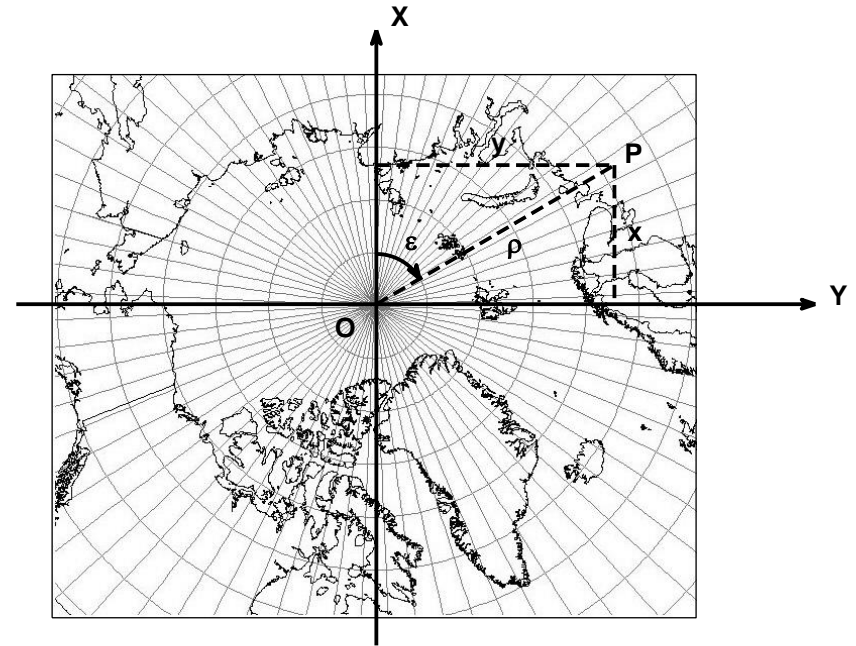
Základní vztahy a vzorce

- kuželová zobrazení: $\varepsilon = nV$
- azimutální zobrazení jsou mezní případ kuželových zobrazení, kdy konstanta $n = 1$
- počátek polární soustavy – vrchol kužele – splyne s pólem (zeměpisným nebo kartografickým)
- počátek rovinné pravoúhlé sítě – ztotožnění s obrazem pólu (středem zobrazení)
- osa x (svislá) se vloží do základního poledníku



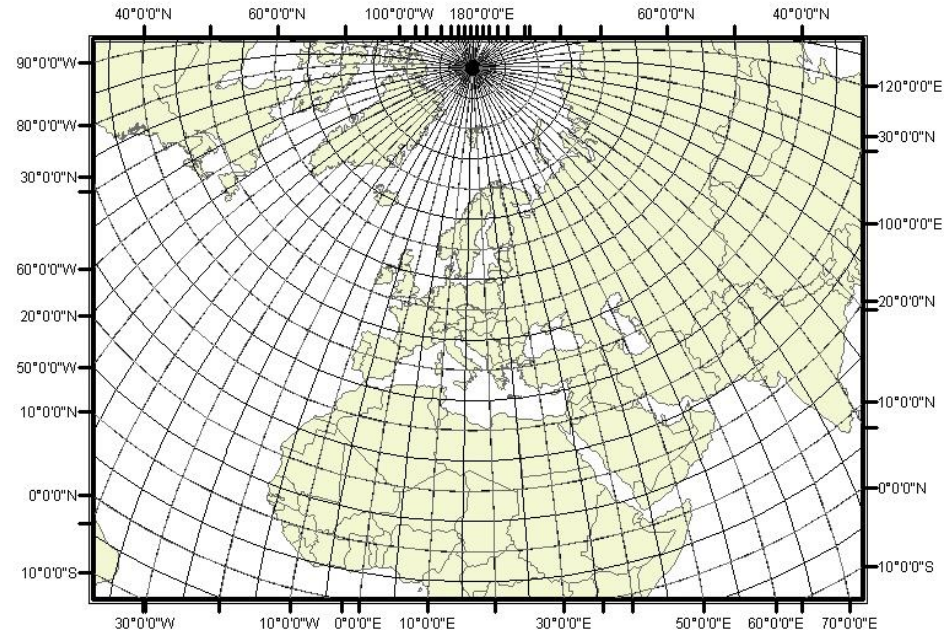
Základní vztahy a vzorce

- obrazem pólu je bod
- obrazem sítě poledníků jsou polopřímky z pólu
- obrazem rovnoběžek jsou soustředné kružnice se středem v pólu
- je to jednoduché zobrazení, poledníky a rovnoběžky jsou vzájemně kolmé
- ekvideformáty mají tvar soustředných kružnic se středem v pólu zobrazení



Základní vztahy a vzorce

- Odvozeno pro kouli, ale lze i pro elipsoid.
- Odvozeno pro pólovou polohu, ale používá se i šikmá nebo rovníková:
 - Obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složitými křivkami.
 - Pouze poledník procházející středem zobrazovaného území, který je totožný se základním kartografickým poledníkem (a tedy i s osou X), je zobrazen jako přímka.

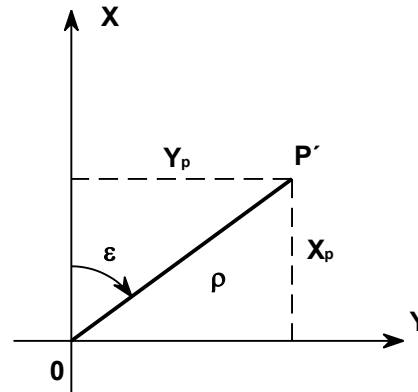
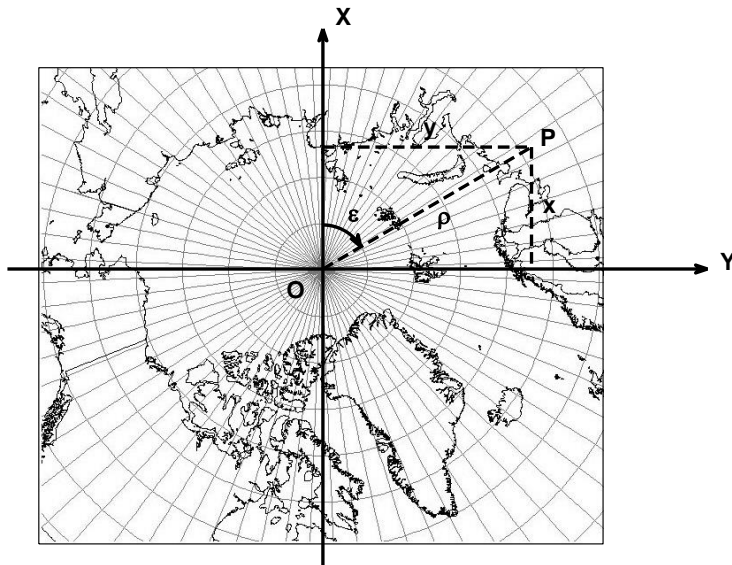
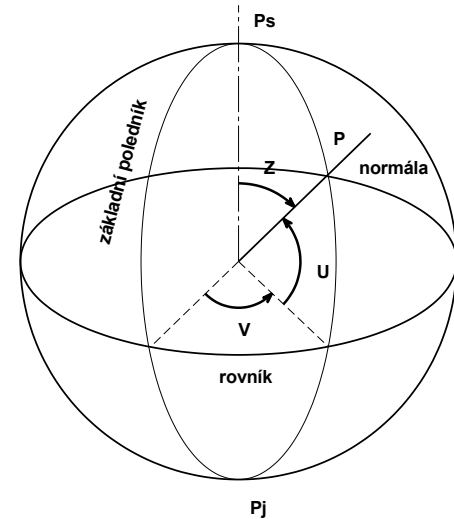


Základní vztahy a vzorce

- zobrazovací rovnice v polárních souřadnicích
- použití zenitové vzdálenosti Z místo U

$$\rho = f(Z) \quad Z = 90^\circ - U$$

$$\varepsilon = V$$



přepočít do
pravoúhlých souřadnic:

$$x = \rho \cos \varepsilon$$

$$y = \rho \sin \varepsilon$$

Základní vztahy a vzorce

Podobné jako u kuželového zobrazení, ale:

- bez konstanty n ,
- se Z místo U ,
- bez záporného znaménka – Z a ρ mají stejný směr.

rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{d\rho}{RdZ}$$

$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z}$$

$$m_{pl} = m_r m_p$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$



2

EKVIDISTANTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvidistantní azimutální zobrazení

- asi nejběžnější ekvidistantní azimutální zobrazení – Postelovo
- ekvidistantní v polednicích

$$m_p = \frac{d\rho}{RdZ} = 1 \quad \text{podmínka}$$

$$\int_0^\rho d\rho = R \int_0^Z dZ$$

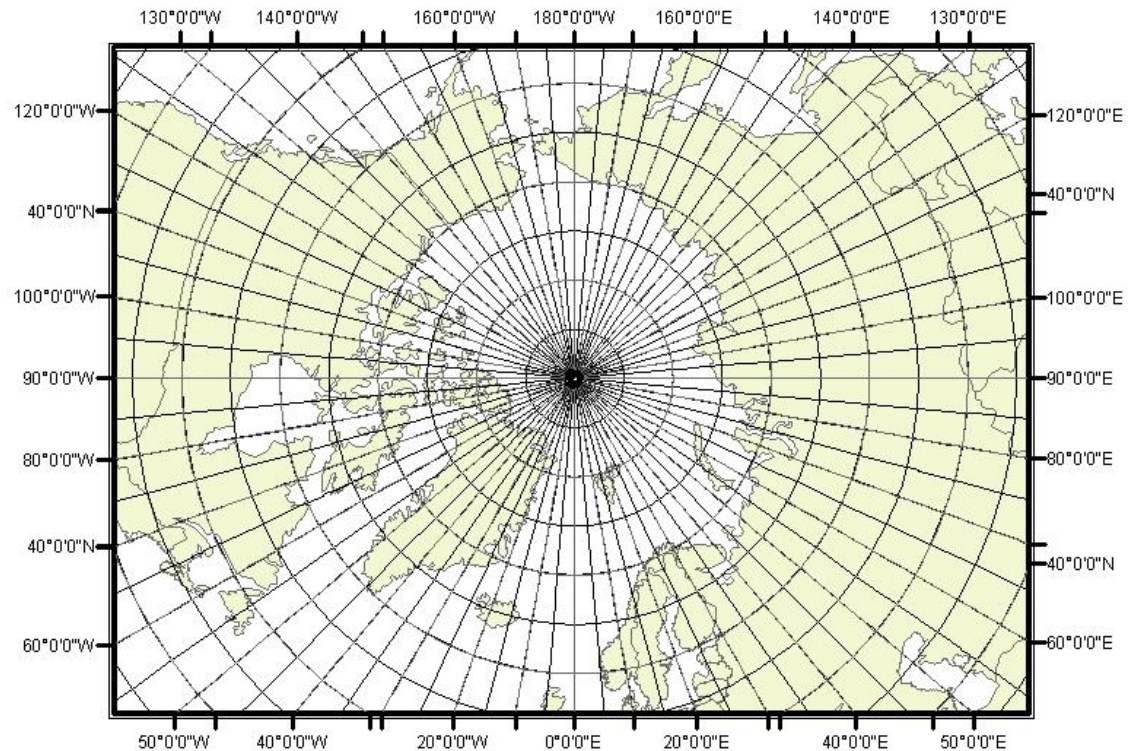
$$\rho = RZ \quad 1. \text{ zobrazovací rovnice}$$

$$\varepsilon = V \quad 2. \text{ zobrazovací rovnice}$$

$$m_p = 1$$

$$m_r = m_{pl} = \frac{Z}{\sin Z}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z}$$



Kde se typicky používá?

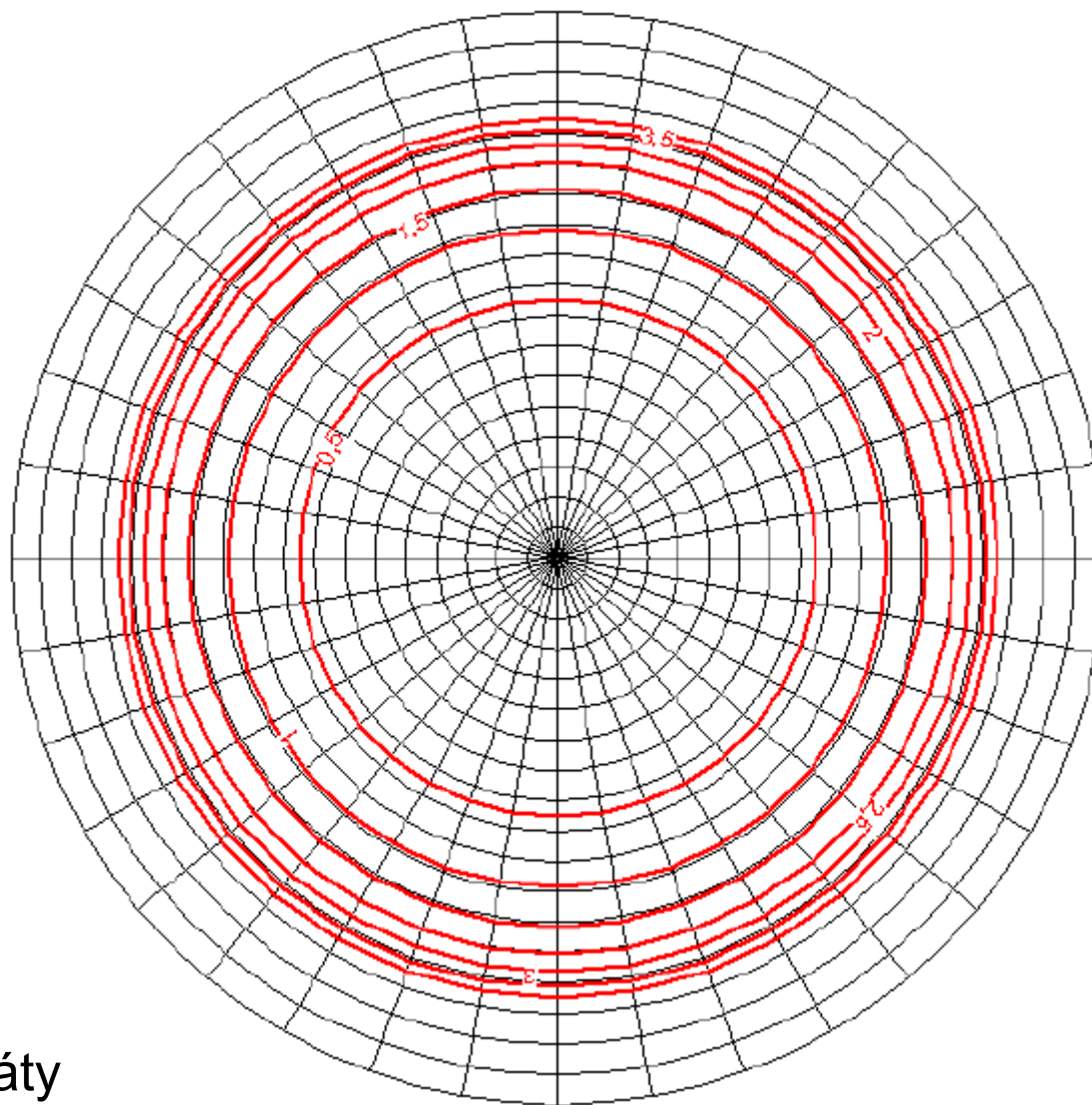
Ekvidistantní azimutální zobrazení

- Zachovává vzdálenosti od pólu k libovolnému bodu v zobrazovaném prostoru
 - vzdálenosti obrazů rovnoběžek jsou stejné
 - zkreslení v polednicích není ($m_p=1$)
- Vhodné pro rychlé zjišťování vzdáleností od pozorovacího místa - např. displeje radiolokátorů.



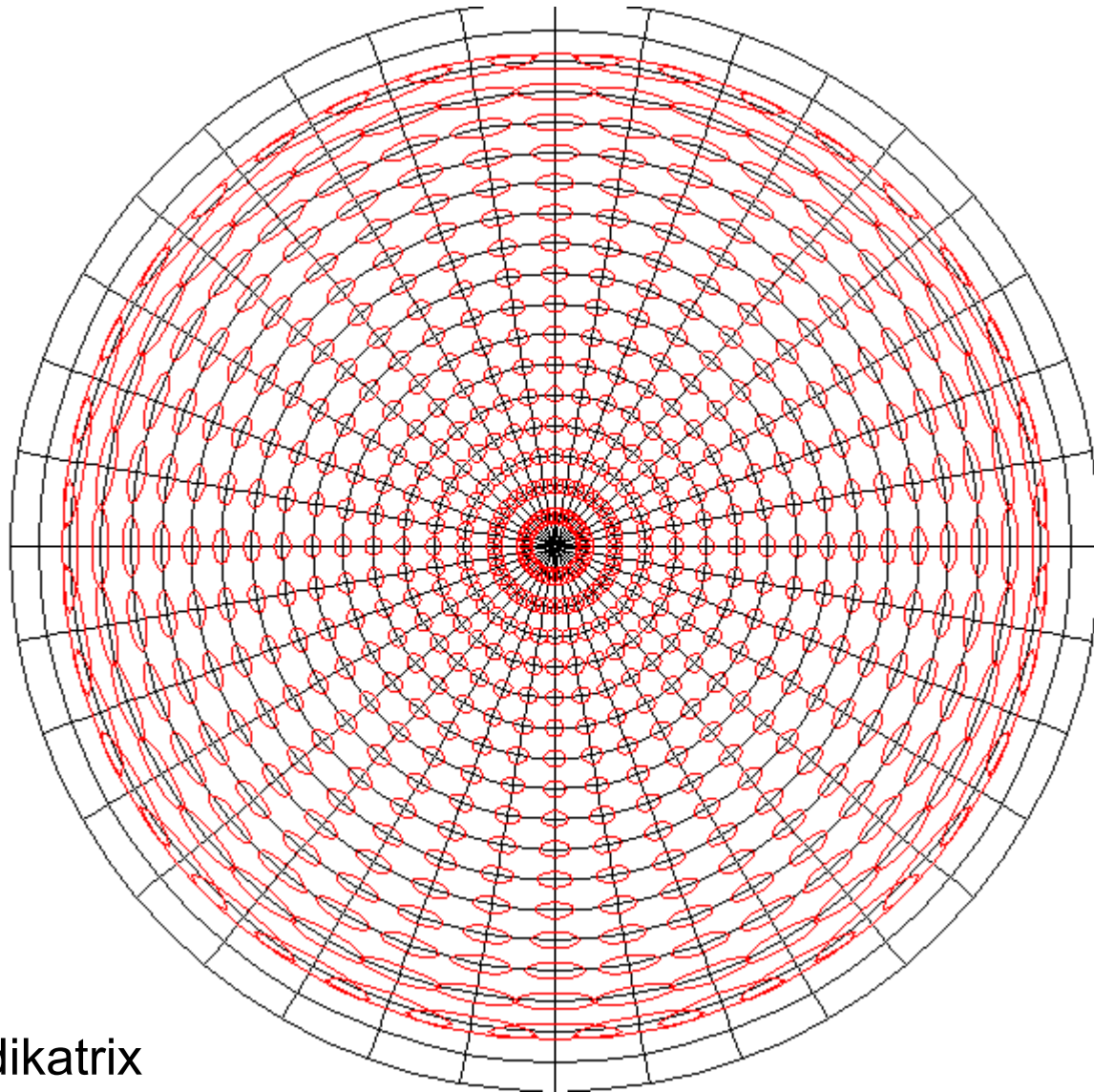
Jaké je zkreslení u pólu? A jaké na 60° rovnoběžce?

Ekvidistantní azimutální zobrazení



ekvideformáty

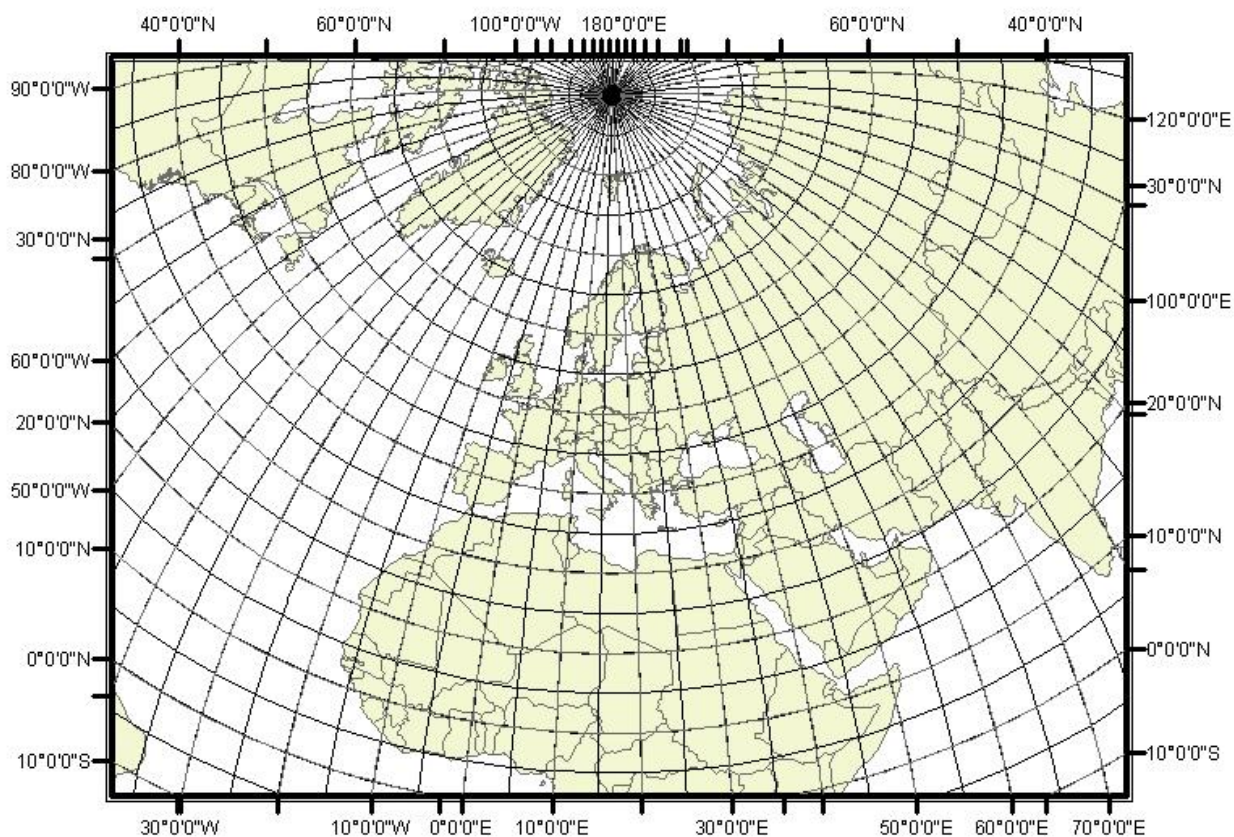
Ekvidistantní azimutální zobrazení



Tissotovy indikatrix

Ekvidistantní azimutální zobrazení

Šikmá poloha zobrazení - obrazy zeměpisných poledníků a rovnoběžek jsou složité křivky.



Ukázka - kartografický pól v Brně ($U_k = 49^\circ 12'$, $V_k = 16^\circ 36'$).

Ekvidistantní azimutální zobrazení

varianta zobrazení:

-doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0

-doplní se parametr c (redukční konstanta)

$$m_{r_0} c = 1 \quad \xrightarrow{\text{dosazení}} \quad m_{r_0} = \frac{Z_0}{\sin Z_0} \quad c = \frac{\sin Z_0}{Z_0}$$

$$\rho = cRZ \quad 1. \text{ zobrazovací rovnice}$$

$$\varepsilon = V \quad 2. \text{ zobrazovací rovnice}$$

rovnice zkreslení:

$$m_p = c \quad m_r = \frac{cZ}{\sin Z} \quad m_{pl} = \frac{c^2 Z}{\sin Z} \quad \sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{Z - \sin Z}{Z + \sin Z}$$

c je konstanta, zkreslení v polednicích není nulové, ale konstantní



3

EKVIVALENTNÍ ZOBRAZENÍ

Ekvivalentní azimutální zobrazení

- Ekvivalentní azimutální zobrazení – též Lambertovo.
- Lambert Azimuthal Equal Area (zkratka LAEA).
- Využíváno v rámci Evropského souřadnicové sítě Grid_ERTS_89-LAEA.
- Nezkresluje vzájemnou velikost kontinentů – používáno při zobrazování velkých územních celků na jedné mapě – např. hemisféry.
- Kartografický pól může být umístěn kdekoliv – např. na rovníku.
- Zmenšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.

$$m_p m_r = 1 \quad \text{podmínka}$$

$$\frac{d\rho}{RdZ} \frac{\rho}{R \sin Z} = 1$$

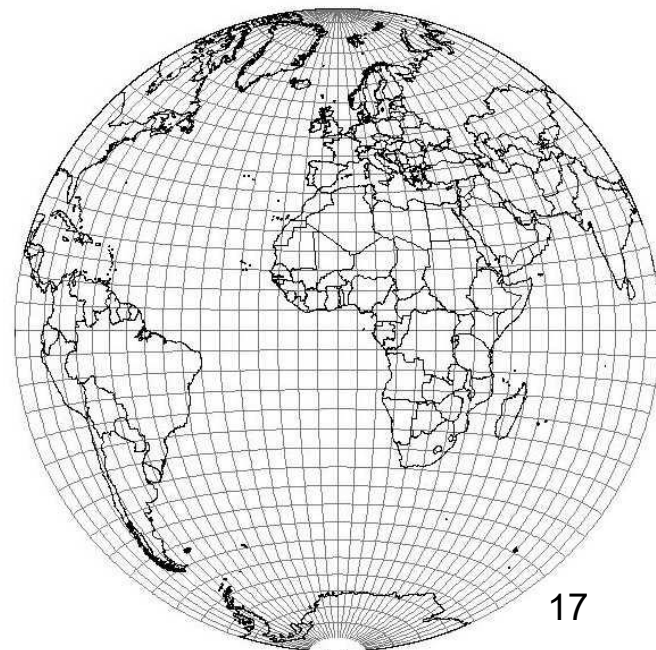
$$\int_0^\rho \rho d\rho = R^2 \int_0^Z \sin Z dZ$$

$$\rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$$

$$\varepsilon = V$$

1. zobrazovací rovnice

2. zobrazovací rovnice



Ekvivalentní azimutální zobrazení

rovnice zkreslení zobrazovací rovnice

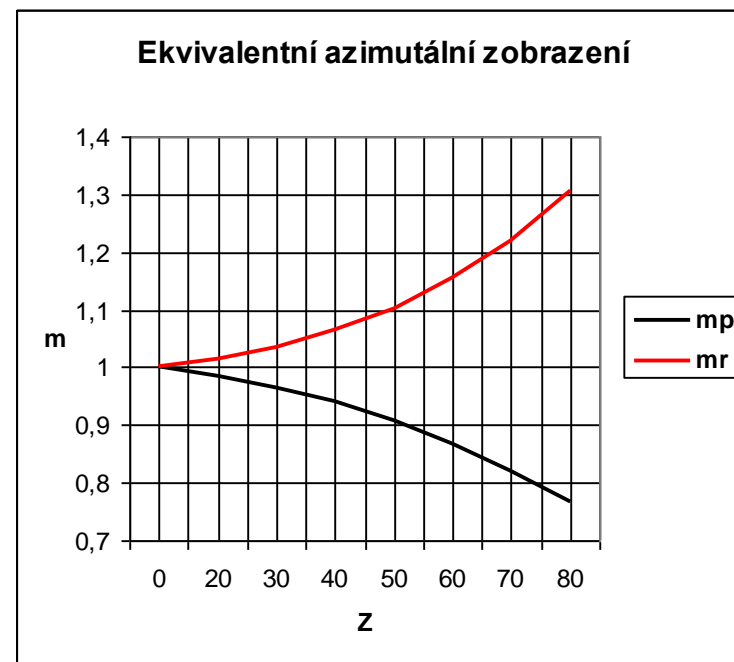
$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z} \quad \leftarrow \quad \rho = 2R \sin \frac{Z}{2}$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{2R \sin \frac{Z}{2}}{R \sin Z}$$

$$m_r = \frac{1}{m_p} = \frac{1}{\cos \frac{Z}{2}}$$

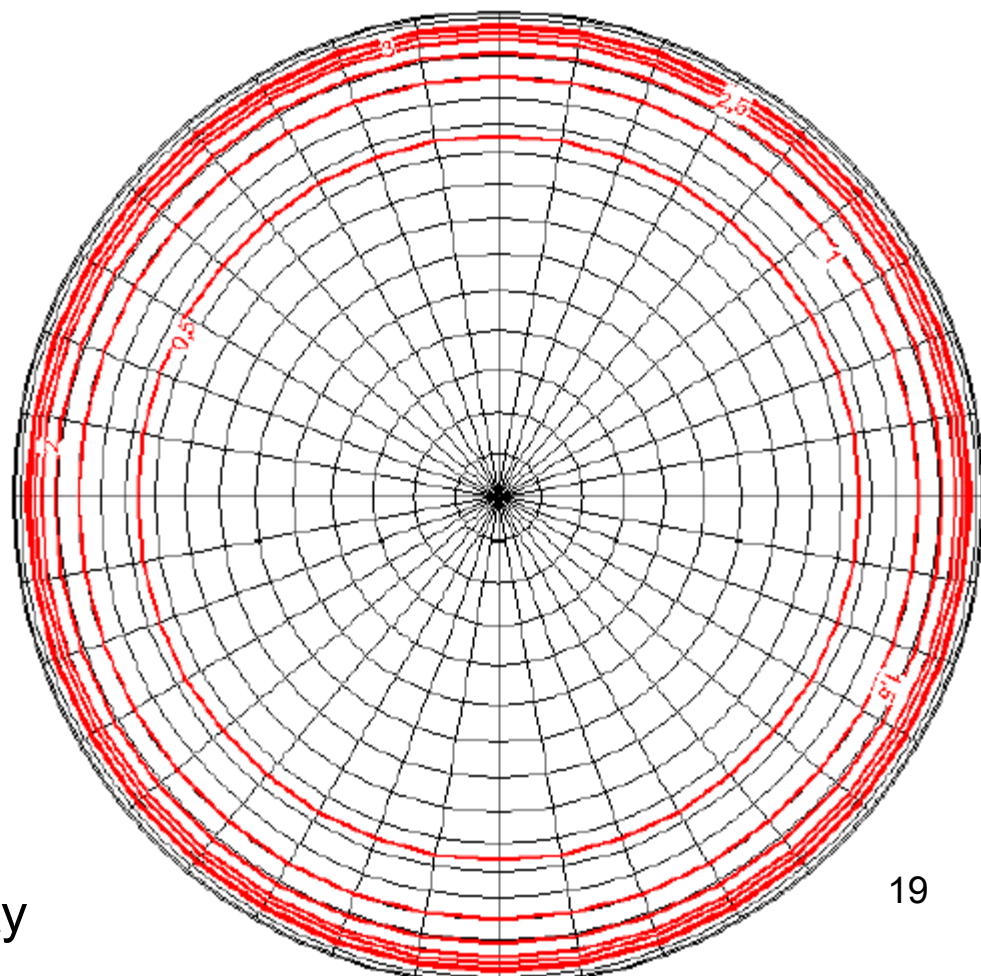
$$m_{pl} = 1$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{1 - \cos^2 \frac{Z}{2}}{1 + \cos^2 \frac{Z}{2}}$$



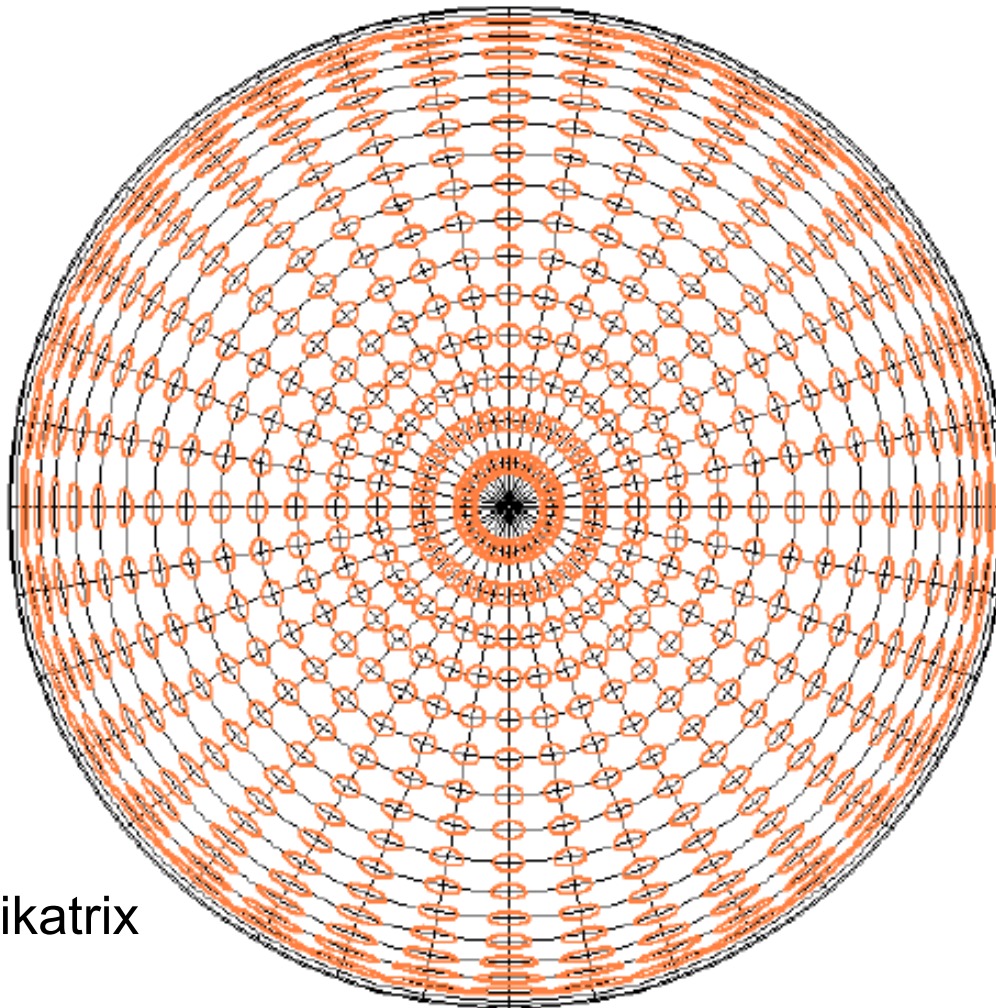
Ekvivalentní azimutální zobrazení

- Zmenšování obrazu poledníkového úseku mezi rovnoběžkami směrem od středu mapy.
- Neplatí tedy, že u jednoduchých ekvivalentních zobrazení se šířka poledníkového pásu zkracuje vždy směrem k pólům nebo vždy směrem od pólů!
- Vždy od středu mapy nebo od osově přímky.



ekvideformáty

Ekvivalentní azimutální zobrazení



Tissotovy indikatrix



4

KONFORMNÍ ZOBRAZENÍ

Konformní azimutální zobrazení

$$m_p = m_r$$

podmínka

$$\frac{d\rho}{RdZ} = \frac{\rho}{R \sin Z}$$

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = \int \frac{dZ}{\sin Z}$$

neurčitý integrál – protože Z a ρ může nabývat i hodnotu 0

$$\ln \rho = \ln \operatorname{tg} \frac{Z}{2} + \ln c$$

závislé na parametru c (integrační konstanta)
– musíme ho určit

$$\rho = c \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$$

1. zobrazovací rovnice

$$\varepsilon = V$$

2. zobrazovací rovnice

rovnice zkreslení:

$$m = \frac{c}{2R \cos^2 \frac{Z}{2}}$$

$$m_{pl} = m^2$$

$$\Delta \omega = 0$$

Konformní azimutální zobrazení

Musíme zjistit parametr c .

A) doplňkový požadavek na nezkreslenou rovnoběžku Z_0

$$m_{r_0} = 1 \quad \frac{\rho_0}{R \sin Z_0} = 1 \quad \xrightarrow[\rho = ctg \frac{Z}{2}]{\text{dosazení zobrazovací rovnice}} \quad c = 2R \cos^2 \frac{Z_0}{2}$$

zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2R \cos^2 \frac{Z_0}{2} \operatorname{tg} \frac{Z}{2} \quad \varepsilon = V$$

rovnice zkreslení:

$$m = \frac{\cos^2 \frac{Z_0}{2}}{\cos^2 \frac{Z}{2}} \quad m_{pl} = m^2 \quad \Delta\omega = 0$$

Konformní azimutální zobrazení

Musíme zjistit parametr c .

B) doplňkový požadavek na nezkreslený pól $Z_0=0^\circ$ (střed mapy)

Tzv. stereografická projekce – ukázka viz dále.

$$m_{r_0} = 1$$

$$c = 2R$$

zobrazovací rovnice:

$$\rho = 2Rt \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$$

$$\varepsilon = V$$

rovnice zkreslení:

$$m = \frac{1}{\cos^2 \frac{Z}{2}}$$

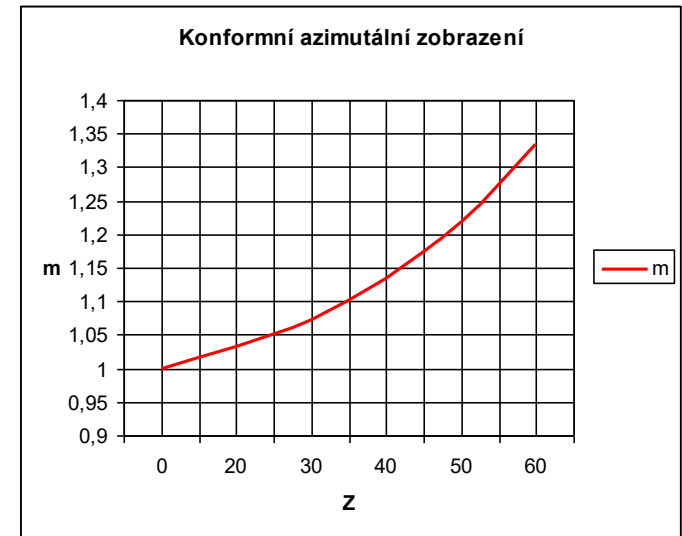
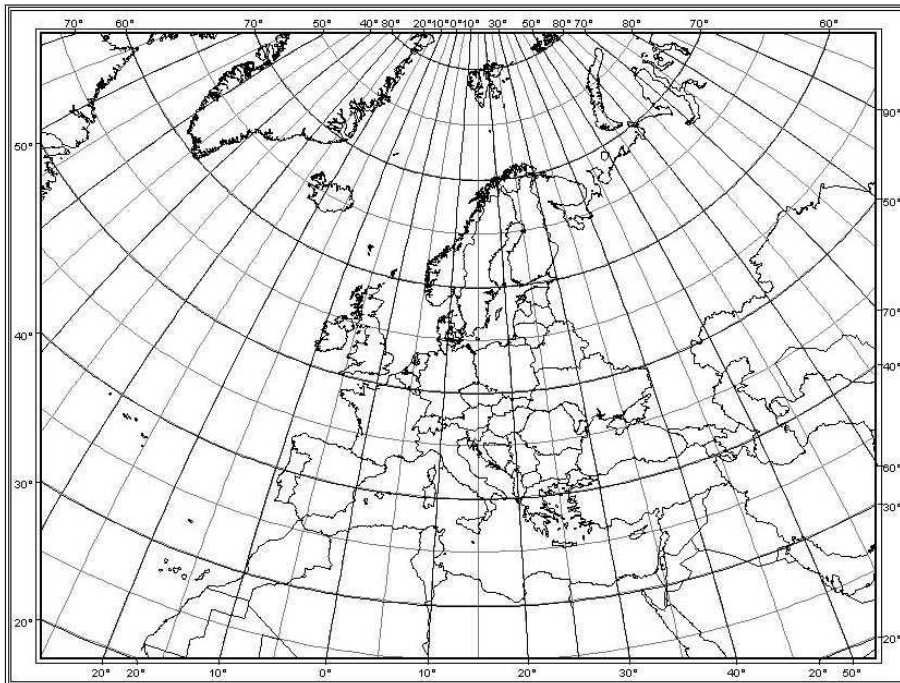
$$m_{pl} = m^2$$

$$\Delta\omega = 0$$

Někdy se nastavuje hodnota délkového zkreslení na pólu (měřítkový faktor).
Např. při definování zobrazení UPS (Universal Polar Stereographic).

Konformní azimutální zobrazení

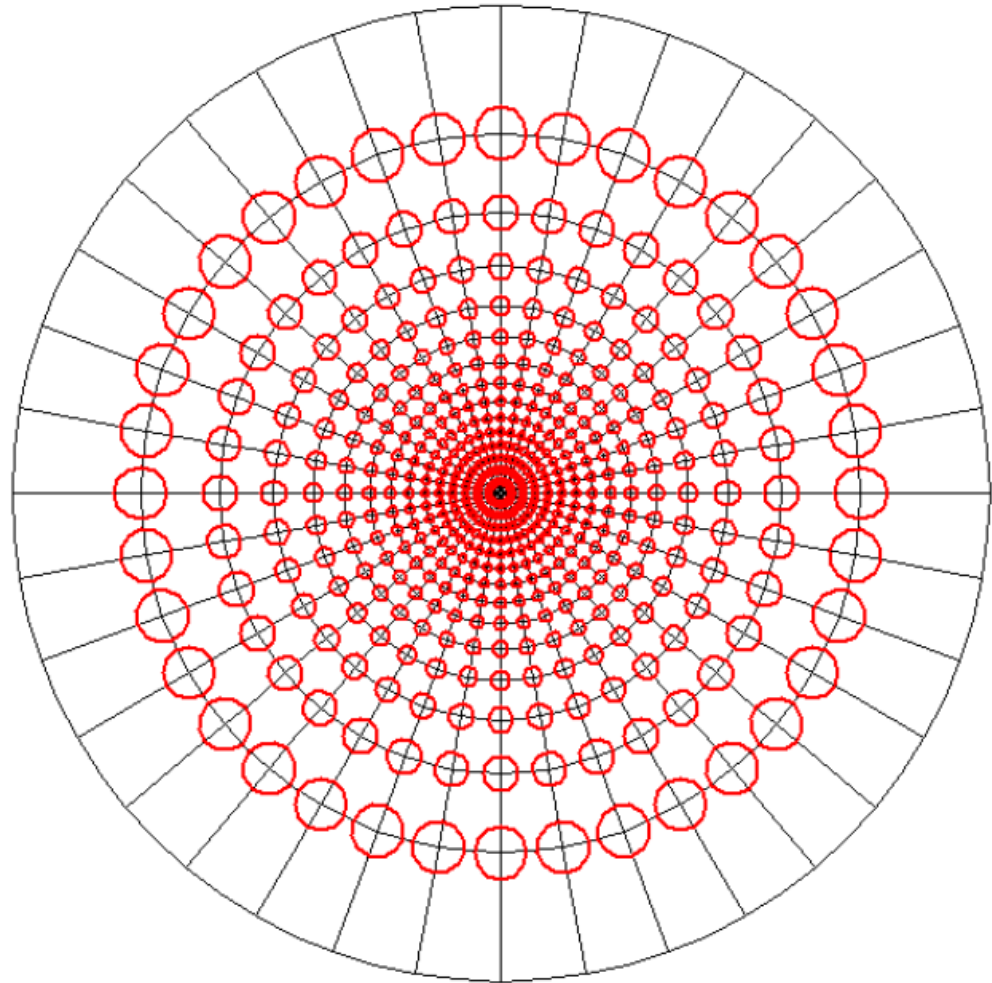
Konformní azimutální zobrazení – šikmá poloha
pól = $U_0=50^\circ$, $V_0=15^\circ$



Co je nezakreslené?

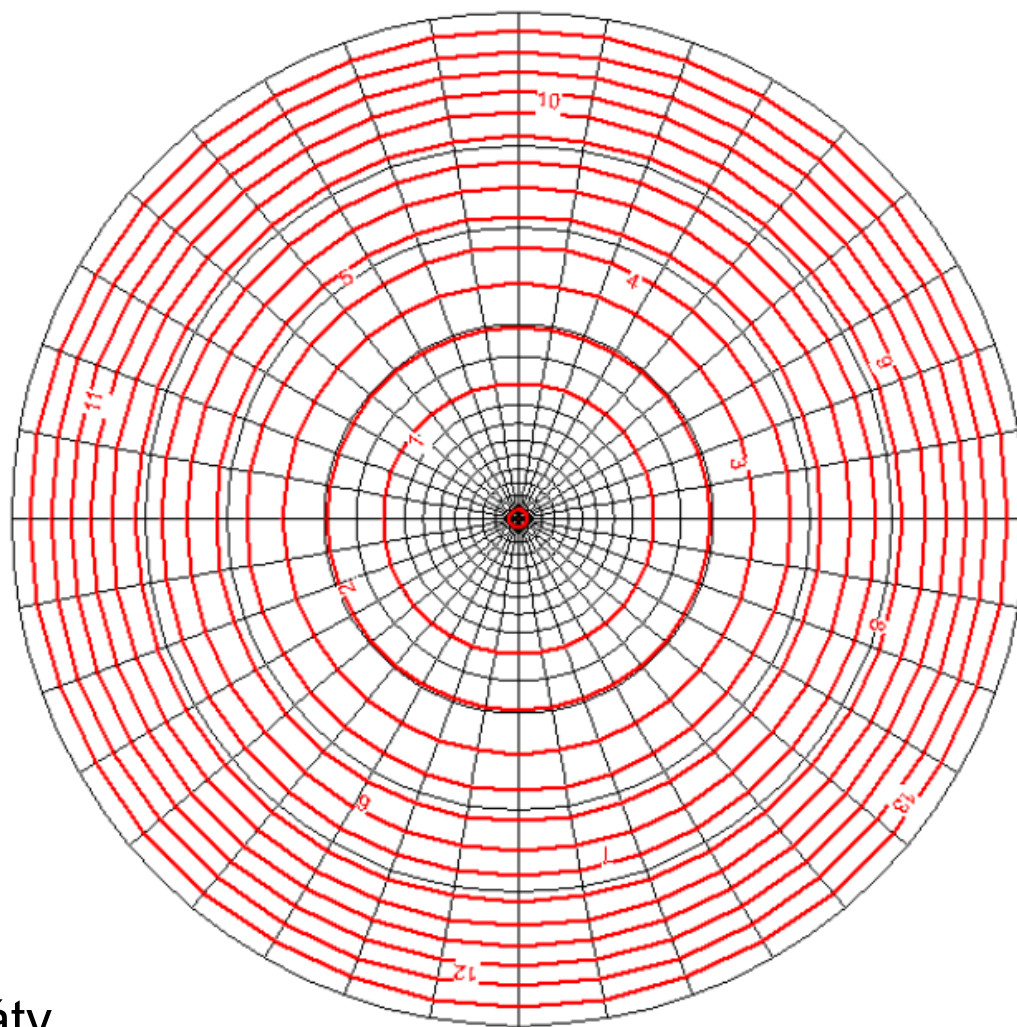
Konformní azimutální zobrazení

Zvětšování obrazu
poledníkového úseku mezi
rovnoběžkami směrem od
středu mapy.



Tissotovy indikatrix

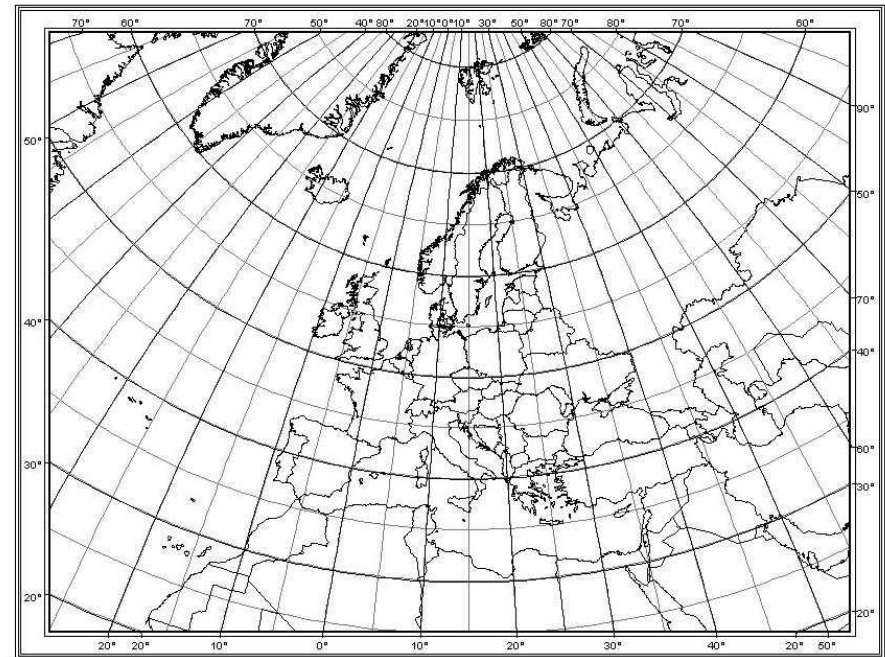
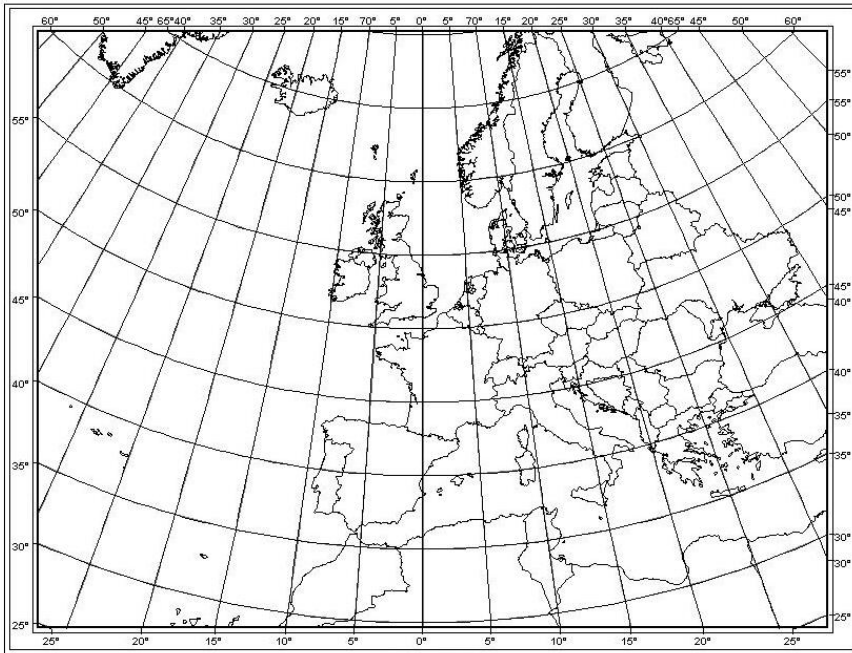
Konformní azimutální zobrazení



ekvideformáty

Konformní azimutální zobrazení

Jak odlišit kuželové v pólové poloze a azimutální v obecné poloze?



Nápověda: Poledníky.



5

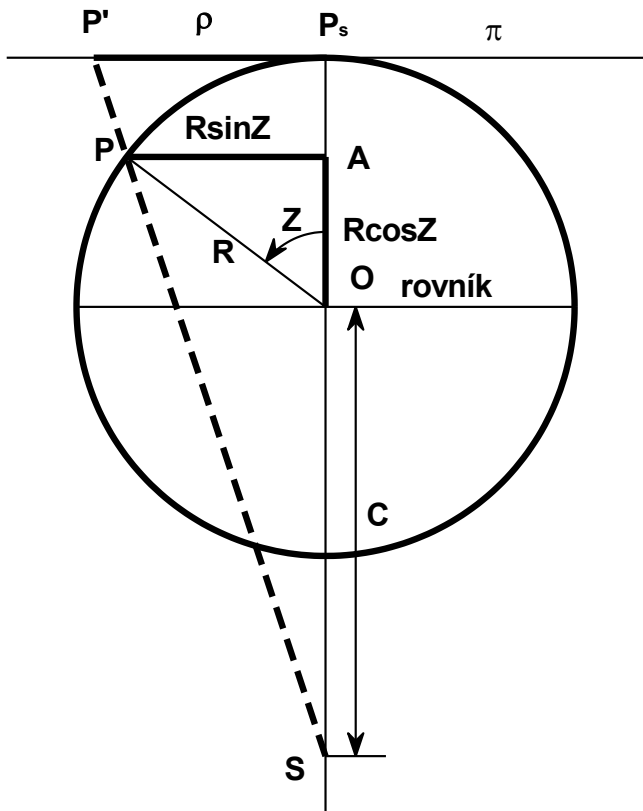
AZIMUTÁLNÍ PROJEKCE

Azimutální projekce – princip

- „Projections“ = kartografická zobrazení
- „Projekce“ = odvoditelné geometrickou cestou

- Projekce – odvozování rovinných souřadnic na základě geometrických principů.
- Projekce povrchu referenční koule na zobrazovací rovinu.
- Existují i válcové a kuželové projekce. Ale používají se méně.

Azimutální projekce – princip



podobné trojúhelníky:

$$\frac{\rho}{R \sin Z} = \frac{C + R}{C + R \cos Z}$$

$$\rho = \frac{(C + R)R \sin Z}{C + R \cos Z} \quad 1. \text{ zobrazovací rovnice}$$

C – odlišuje různé verze projekcí

$$\varepsilon = V \quad 2. \text{ zobrazovací rovnice}$$

Obecné zákony zkreslení jako u jiných azimutálních zobrazení.

$$m_p = \frac{d\rho}{RdZ}$$

$$m_r = \frac{\rho}{R \sin Z}$$

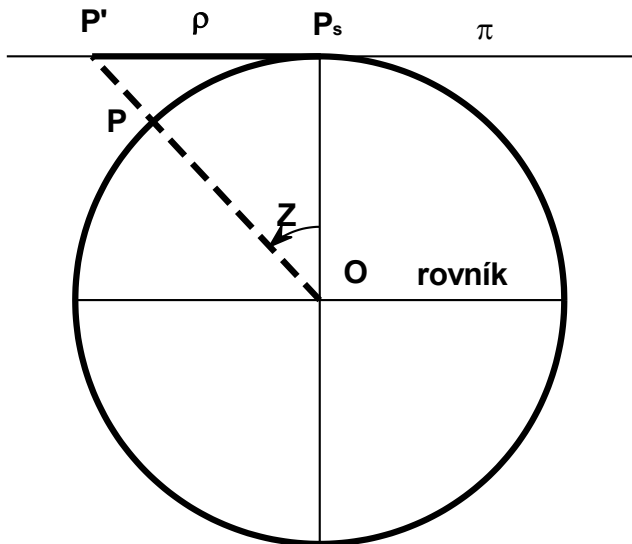
$$m_{pl} = m_r m_p$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{m_r - m_p}{m_r + m_p}$$

Gnómonická projekce

Gnómonická (centrální) projekce vzniká při promítání ze středu koule.

- $C = 0$
- lze zobrazit jen jednu polokouli
- nejde zobrazit rovník
- ortodromy se zobrazují jako přímky
- Thales z Milétu



dosazení C do zobrazovací rovnice:

$$\rho = R \operatorname{tg} Z$$

$$\varepsilon = V$$

dosazení ρ do rovnice zkreslení:

$$m_p = \frac{1}{\cos^2 Z}$$

$$m_r = \frac{1}{\cos Z}$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^3 Z}$$

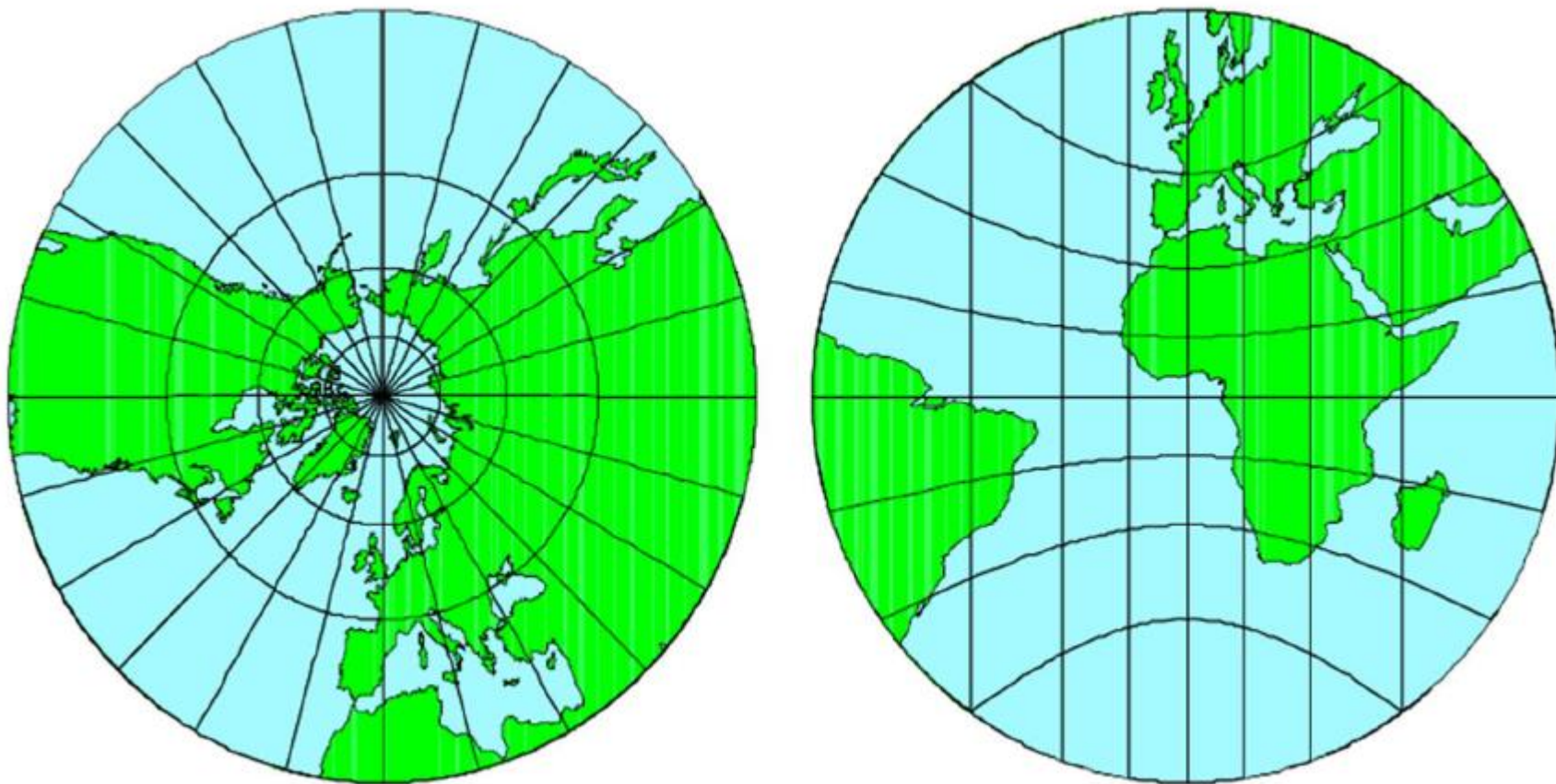
$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \frac{\cos Z - 1}{\cos Z + 1}$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2}$$

Všimli jste si na vzorcích zkreslení něčeho?

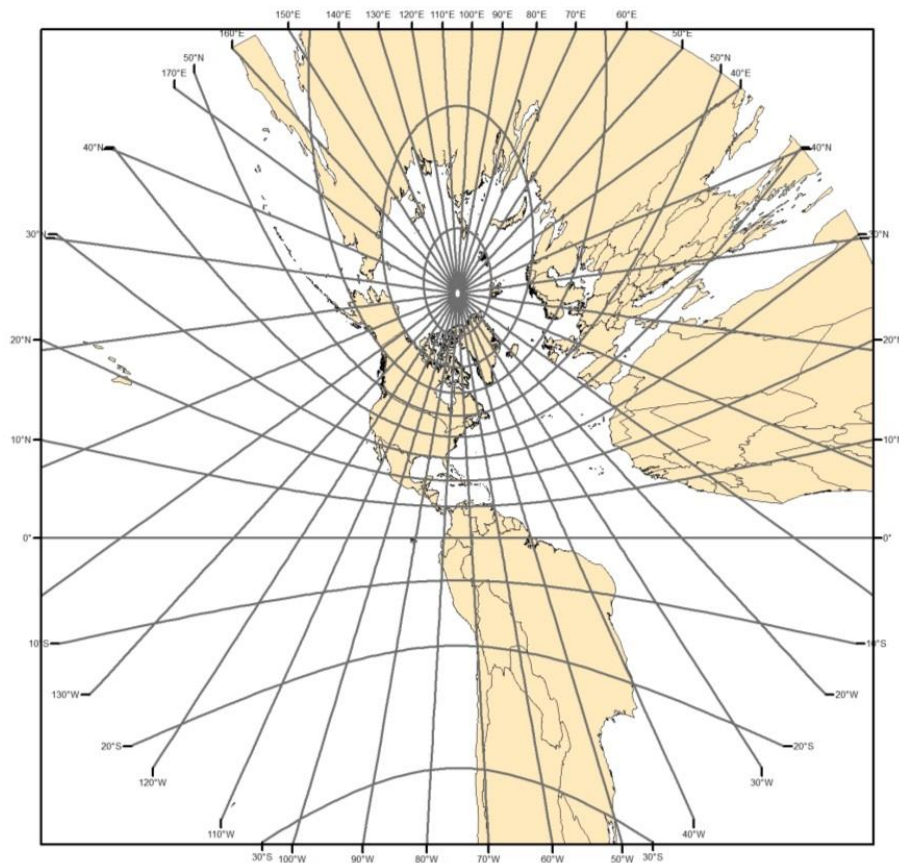
Není délkojevné, úhlojevné ani plochojevné.

Gnómonická projekce



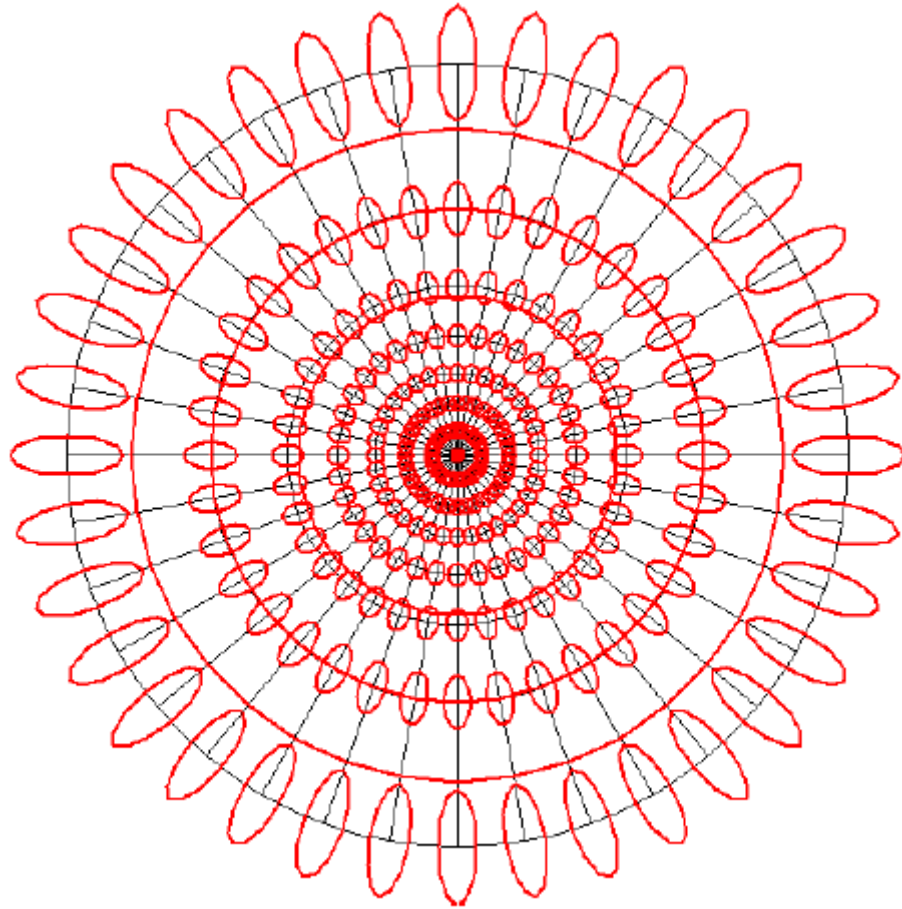
- Ve skutečnosti jde zobrazit i rovník – při správně nastavené polokouli.
- pólová poloha – rovnoběžky soustředné kružnice, poledníky polopřímky
- rovníková poloha – poledníky jsou rovnoběžné úsečky, rovnoběžky jsou hyperboly se středem na rovníku.

Gnómonická projekce



obecná poloha – poledníky úsečky, rovnoběžky hyperboly, elipsy, paraboly

Gnómonická projekce

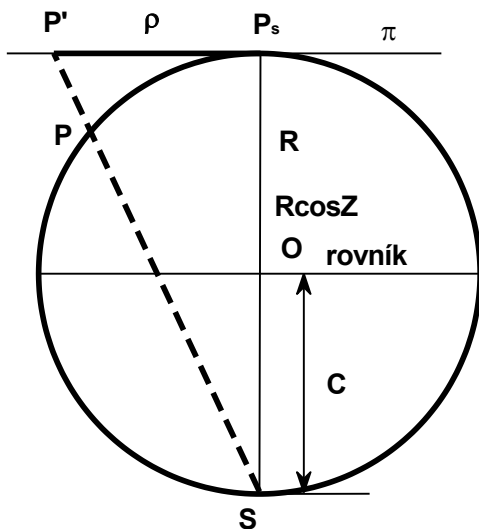


Tissotovy indikatrix $\langle 20^\circ, 90^\circ \rangle$

Stereografická projekce

Stereografická projekce vzniká při promítání z protějšího pólu koule.

- $C = R$
- projekce je konformním azimutálním zobrazením – viz dříve
- vzdálenosti obrazů rovnoběžek se zvětšují směrem od středu mapy
- Hipparchos z Nikaie



dosazení C do zobrazovací rovnice:

$$\rho = \frac{2R \sin Z}{1 + \cos Z} = 2R \operatorname{tg} \frac{Z}{2}$$

$$\varepsilon = V$$

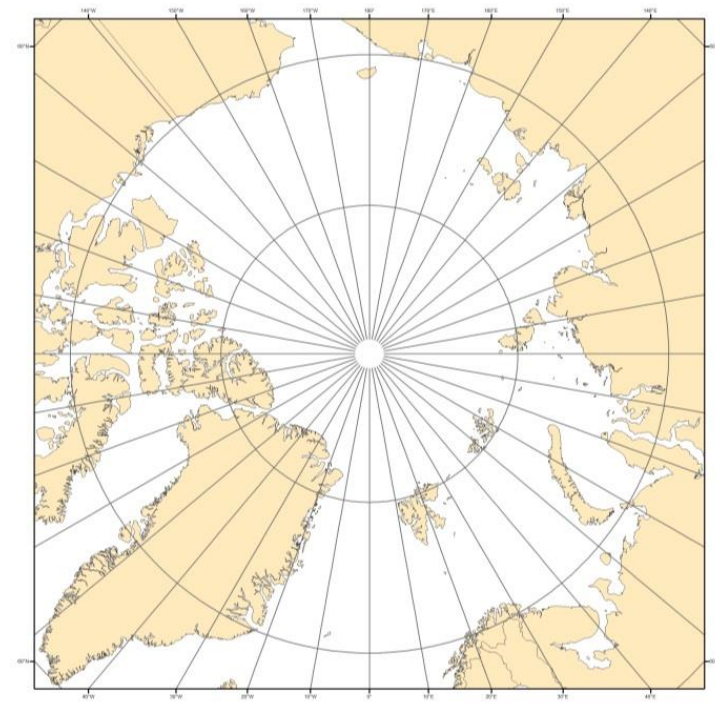
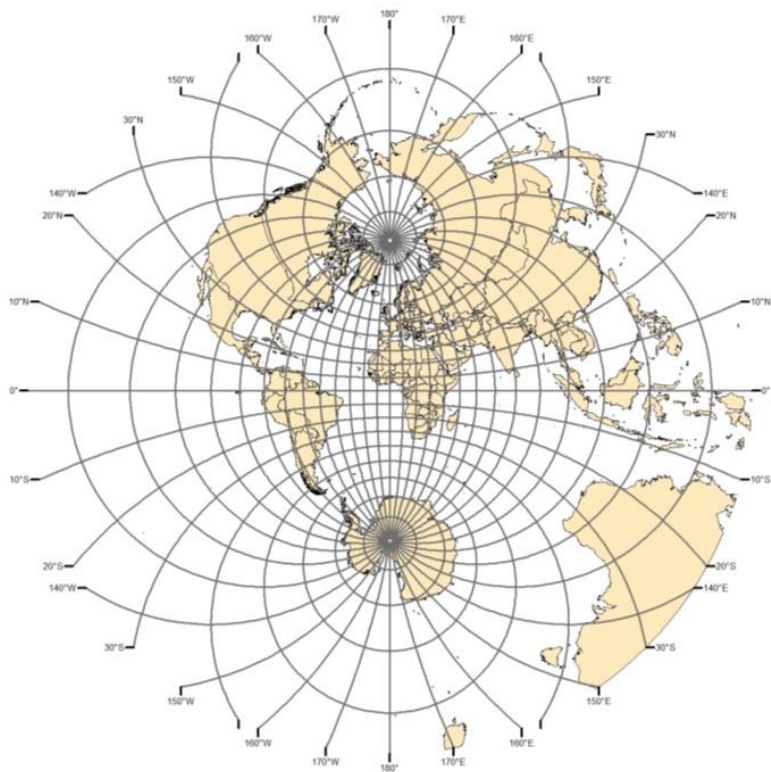
dosazení ρ do rovnice zkreslení:

$$m_p = m_r = \frac{2}{1 + \cos Z} = \frac{1}{\cos^2 \frac{Z}{2}}$$

$$m_{pl} = \frac{1}{\cos^4 \frac{Z}{2}}$$

$$\Delta\omega = 0$$

Stereografická projekce



Odkud se promítalo?

Ortografická projekce

Ortografická projekce vzniká při promítání z nekonečna.

- $C = \text{nekonečno}$
- „pohled z vesmíru“
- projekce je ekvidistantním zobrazením v rovnoběžkách

odvodí se z obrázku (nekonečno do vzorce nedosadíme):

$$\rho = R \sin Z$$

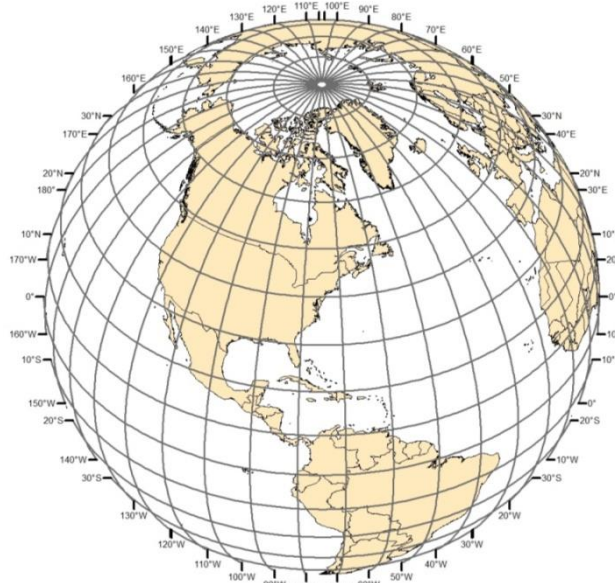
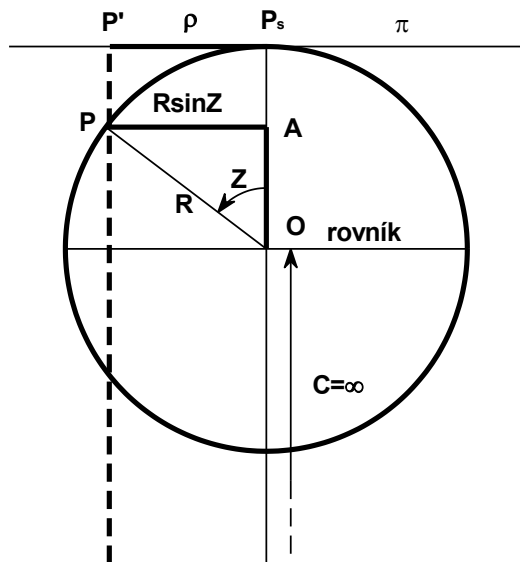
$$\varepsilon = V$$

dosazení ρ do rovnice zkreslení:

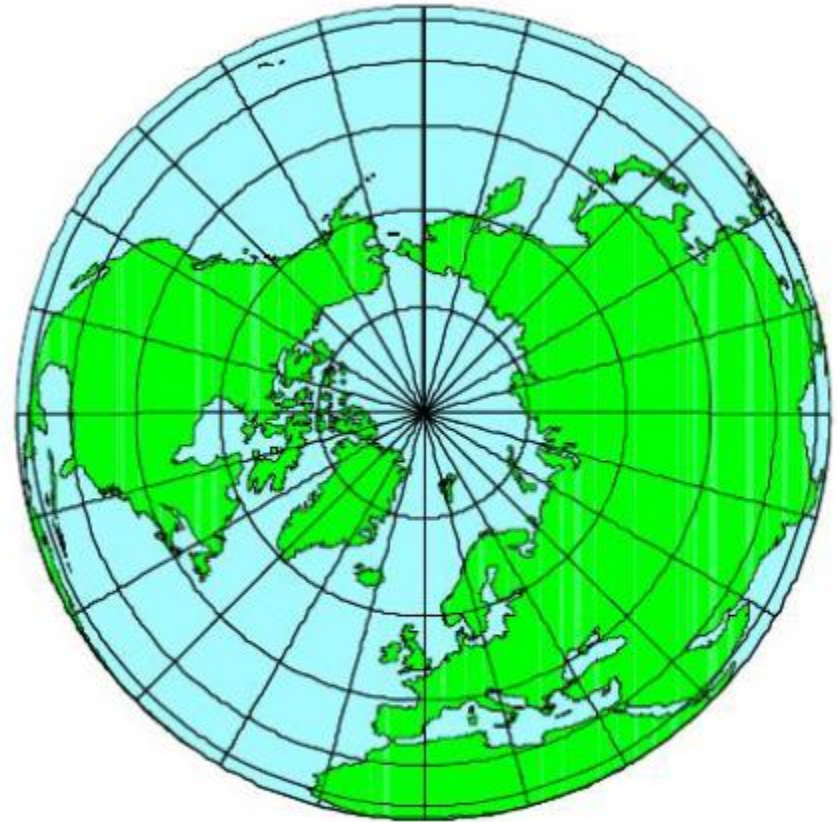
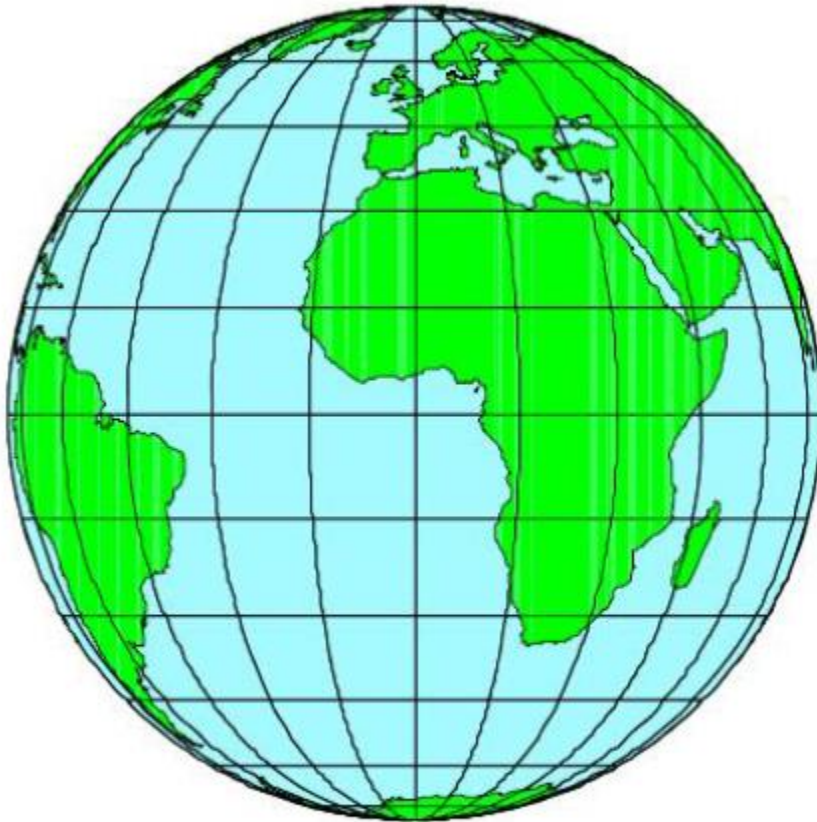
$$m_p = m_{pl} = \cos Z$$

$$m_r = 1$$

$$\sin \frac{\Delta\omega}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{Z}{2}$$

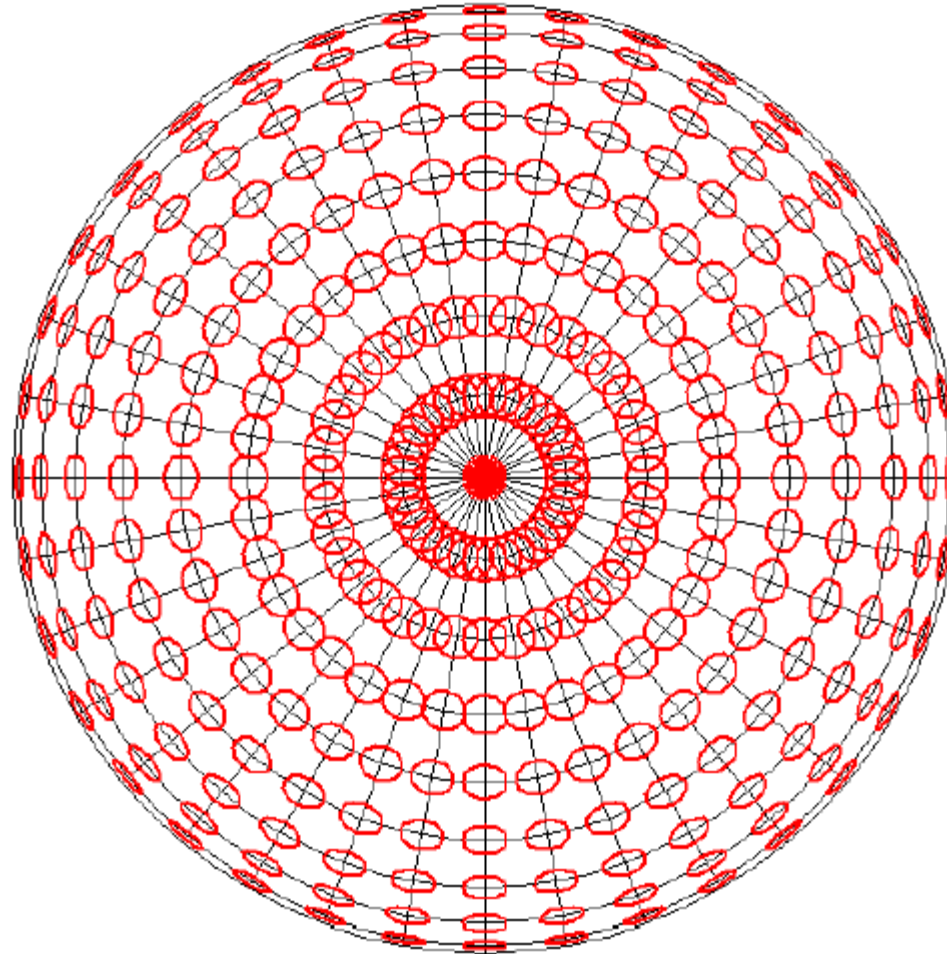


Ortografická projekce



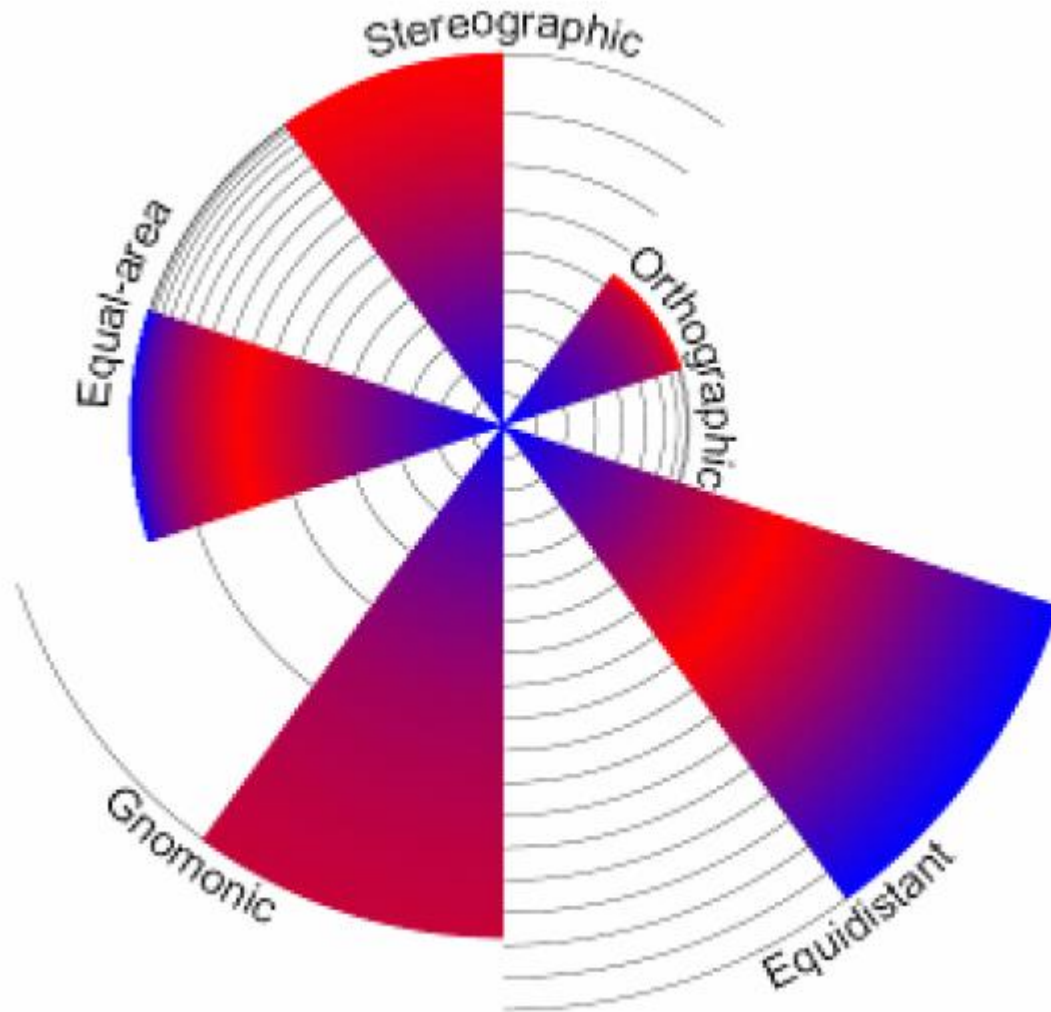
- Rovníková poloha: rovnoběžky úsečky, poledníky elipsy.
- Pólová poloha: rovnoběžky kružnice, poledníky polopřímky.
- Obecná poloha: poledníky i rovnoběžky elipsy.

Ortografická projekce



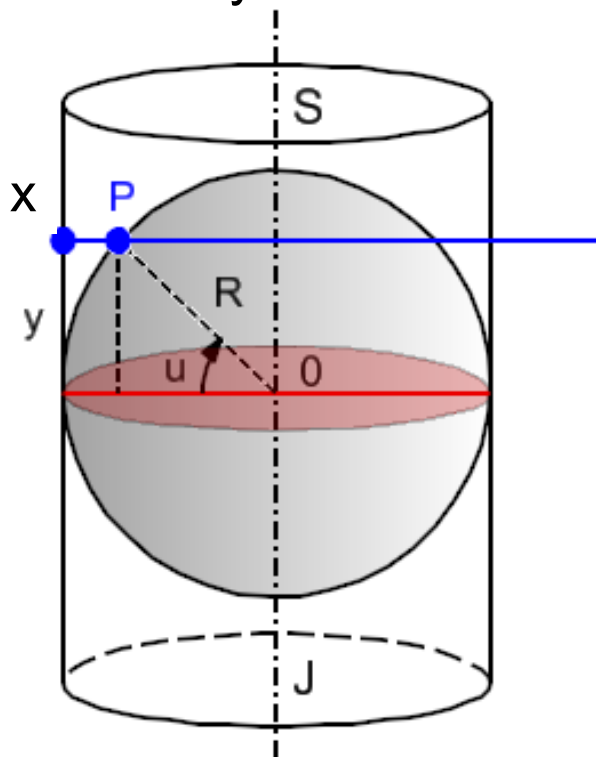
Tissotovy indikatrix

Srovnání různých azimutálních zobrazení



Ortografická projekce na váleček

- Pozor! Ne všechny projekce jsou azimutální.
- Zobrazení Lambertovo válcové plochojevné. Viz válcová zobrazení.
- Ortografická válcová projekce. Střed promítání v nekonečnu.
- Ekvivalentní
- Nezkreslený rovník



$$\begin{aligned}x &= R \sin u \\y &= Rv\end{aligned}$$