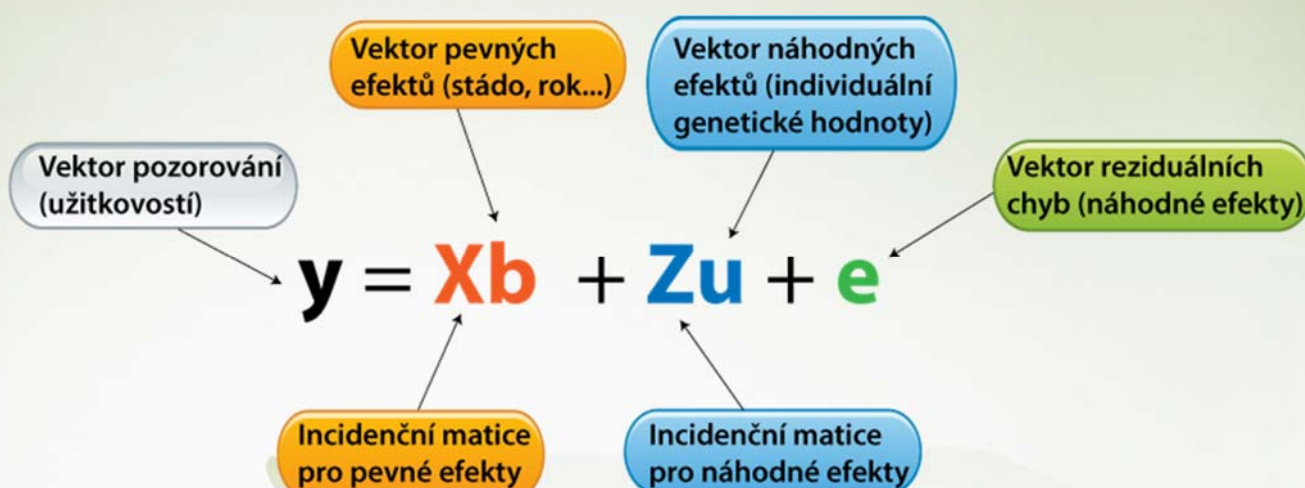


Tomáš Urban

MENDELU

ODHAD PLEMENNÝCH HODNOT - SIRE (OTCOVSKÝ) MODEL

Smíšený model



Soustava normálních rovnic

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{y}, \mathbf{X}, \mathbf{Z}$ – zaznamenané hodnoty

Odhad pevných efektů \mathbf{b}

Odhad náhodných efektů \mathbf{u}, \mathbf{e}

Příklad Sire modelu

- Chceme odhadnout plemenné hodnoty tří otců (sire), každý byl pářen s náhodnými matkami (dam) a každý měl dva potomky, vyvíjející se ve dvou různých prostředích (stájích).

Pozorování	y	Otec	Stáj
y_{111}	9	1	1
y_{121}	12	1	2
y_{211}	11	2	1
y_{212}	6	2	1
y_{311}	7	3	1
y_{321}	14	3	2

Základní model

$$y_{ijk} = b_j + u_i + e_{ijk}$$

Pevný efekt prostředí (stáje)

Plemenná hodnota i-tého otce

- Vektory a matice:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_{111} \\ y_{121} \\ y_{211} \\ y_{212} \\ y_{311} \\ y_{321} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 11 \\ 6 \\ 7 \\ 14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{matrix} & s_1 & s_2 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & &
 \end{matrix} \quad \mathbf{Z} = \begin{matrix} & o_1 & o_2 & o_3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & &
 \end{matrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

```
y <- matrix(c(9,12,11,6,7,14),6,1)
```

Vytvoří sloupcový vektor \mathbf{y} , s uživatelskými dcer, s 6ti řádky a 1 sloupcem

```
X <- matrix(c(1,0,1,1,1,0,  
0,1,0,0,0,1),6,2)
```

Vytvoří designovou matici $\mathbf{X}_{6,2}$ (pro pevný efekt stáje)

```
Z <- matrix(c(1,1,0,0,0,0,  
0,0,1,1,0,0,  
0,0,0,0,1,1),6,3)
```

Vytvoří designovou matici $\mathbf{Z}_{6,3}$ (pro náhodný efekt otce)

Průměry a variance pro $\mathbf{y} = \mathbf{Xb} + \mathbf{Zu} + \mathbf{e}$

- **Průměry:**

- $E(\mathbf{u}) = E(\mathbf{e}) = 0$
- $E(\mathbf{y}) = \mathbf{Xb}$

- **Variance:**

- \mathbf{R} je VCV matice pro rezidua (prostředí); předpoklad že $\mathbf{R} = \sigma_e^2 \mathbf{I}$
- \mathbf{G} je VCV matice pro plemenné hodnoty
- VCV matice pro \mathbf{y} je: $\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}' + \mathbf{R}$
- VCV – variančně kovarianční matice (na diagonále jsou variance)

- Předpokládáme, že rezidua nejsou korelována a $\mathbf{R} = \sigma_e^2 \mathbf{I}$ (6×6)
 - $\sigma_e^2 = 6 \quad \rightarrow \quad \mathbf{R} = 6\mathbf{I}$
- VCV matice \mathbf{G} : předpoklad, že otcové jsou nepříbuzní a \mathbf{G} je diagonální matice (3×3) s prvky $\sigma_o^2 =$ variance otců, kde platí, že $\sigma_o^2 = \sigma_A^2 / 4$
 - $\sigma_A^2 = 8 \quad \rightarrow \quad \mathbf{G} = 8/4 * \mathbf{I}$

Odhady pevných efektů a předpovědi náhodných efektů

- Ve smíšeném modelu jsou pozorovány \mathbf{y} , \mathbf{X} a \mathbf{Z}
- \mathbf{b} , \mathbf{u} , \mathbf{R} a \mathbf{G} jsou obecně neznámé
- Provádí se dva současné odhady:

BLUE pro pevné efekty \mathbf{b} :

$$\hat{\mathbf{b}} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y}$$

BLUP pro náhodné efekty \mathbf{u} :

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{GZ}'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\mathbf{b}})$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}' + \mathbf{R}$$

$$\bullet \mathbf{V} = \mathbf{ZGZ}' + \mathbf{R}$$

$$\mathbf{V} = \frac{8}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{30} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

v programu R

Definování matic a vektorů

`I3 <- diag(3)`

Vytvoří jednotkovou matici 3x3 (~ 3 otci)

`G <- 8/4*I3`

Vytvoří genetickou variančně kovarianční matici $\mathbf{G}_{3,3}$

`R <- 6* diag(6)`

Vytvoří prostředovou variančně kovarianční matici $\mathbf{R}_{6,6}$

`V <- (Z%*%G%*%t(Z)) + R`

Vytvoří fenotypovou variančně kovarianční matici $\mathbf{V}_{6,6}$

`invV <- solve(V)`

Vytvoří inverzi matice \mathbf{V}

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 8,22222 \\ 13,05556 \end{pmatrix}$$

v programu R

`b <- solve(t(X)%*%solve(V)%*%X) %*% (t(X)%*%solve(V)%*%y)`

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{GZ}'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{Xb}) = \begin{pmatrix} -0,055556 \\ 0,111111 \\ -0,055556 \end{pmatrix}$$

v programu R

`u <- (G%*%t(Z)%*%solve(V)) %*% (y-(X%*%b))`

Druhý způsob výpočtu

Odvozená **soustava normálních rovnic** smíšeného modelu (Henderson):

- $\mathbf{u} \sim (0, \mathbf{G}), \mathbf{e} (0, \mathbf{R}), \text{cov}(\mathbf{u}, \mathbf{e}) = 0$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} & \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \\ \mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\text{[LS]}} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \boxed{\text{[PS]}}$$

[LS]

$$\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{X} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{Z} + \mathbf{G}^{-1} = \frac{5}{6} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[PS]

$$\mathbf{X}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 33 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Z}'\mathbf{R}^{-1}\mathbf{y} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 21 \\ 17 \\ 21 \end{bmatrix}$$

v programu R

Výpočet submatic matice levé strany (LS)

```
XRX <- t(X)%*%solve(R)%*%X
```

```
XRZ <- t(X)%*%solve(R)%*%Z
```

```
ZRX <- t(Z)%*%solve(R)%*%X
```

```
ZRZG <- t(Z)%*%solve(R)%*%Z + solve(G)
```

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix}$$

Výpočet submatic matice pravé strany (PS)

```
XRy <- t(X)%*%solve(R)%*%y
```

```
ZRy <- t(Z)%*%solve(R)%*%y
```

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 33 \\ 26 \\ 21 \\ 17 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8,2222 \\ 13,0556 \\ -0,0556 \\ 0,1111 \\ -0,0556 \end{bmatrix}$$

v programu R

Spojování submatic LS

```
LS1 <- cbind(XRX, XRZ)
```

```
LS2 <- cbind(ZRX, ZRZG)
```

Vytvoří velkou matici levé strany (**LS**)

```
LS <- rbind(LS1, LS2)
```

Spojování submatic PS

Vytvoří velkou matici pravé strany (**PS**)

```
PS <- rbind(XRy, ZRy)
```

$$\begin{bmatrix} X'R^{-1}X & X'R^{-1}Z \\ Z'R^{-1}X & Z'R^{-1}Z + G^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'R^{-1}y \\ Z'R^{-1}y \end{bmatrix}$$

$$[LS] \begin{bmatrix} b \\ u \end{bmatrix} = [PS]$$

$$\begin{bmatrix} b \\ u \end{bmatrix} = [LS]^{-1}[PS]$$

Vektor řešení **bu** v Rku

```
bu <- solve(LS)%*%PS
```