



ČASOVÉ ŘADY



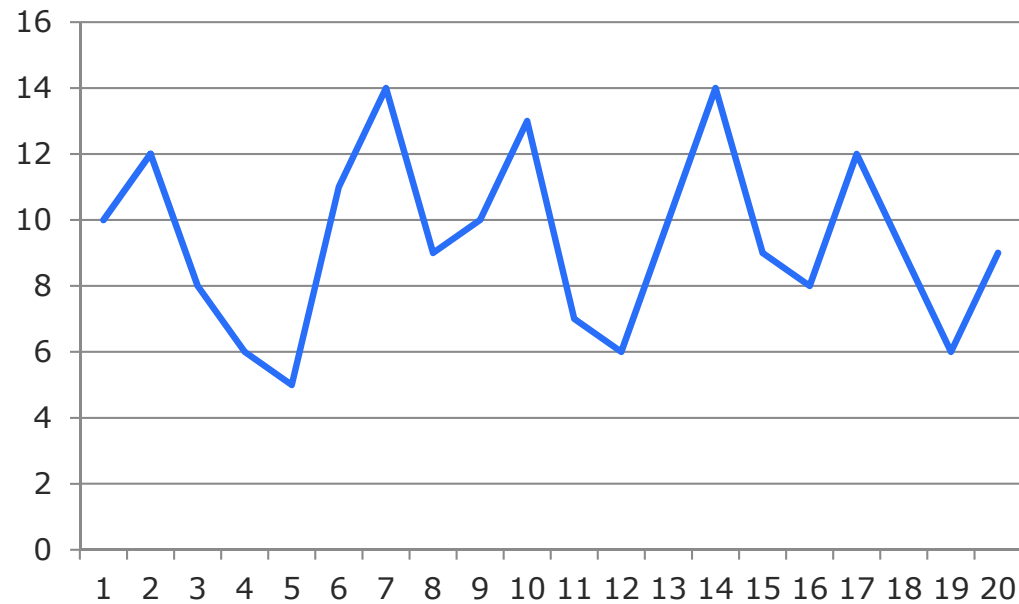
Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

{10 12 8 6 5 11 14 9 10 13 7 6 10 14 9 8 12 9 6 9}

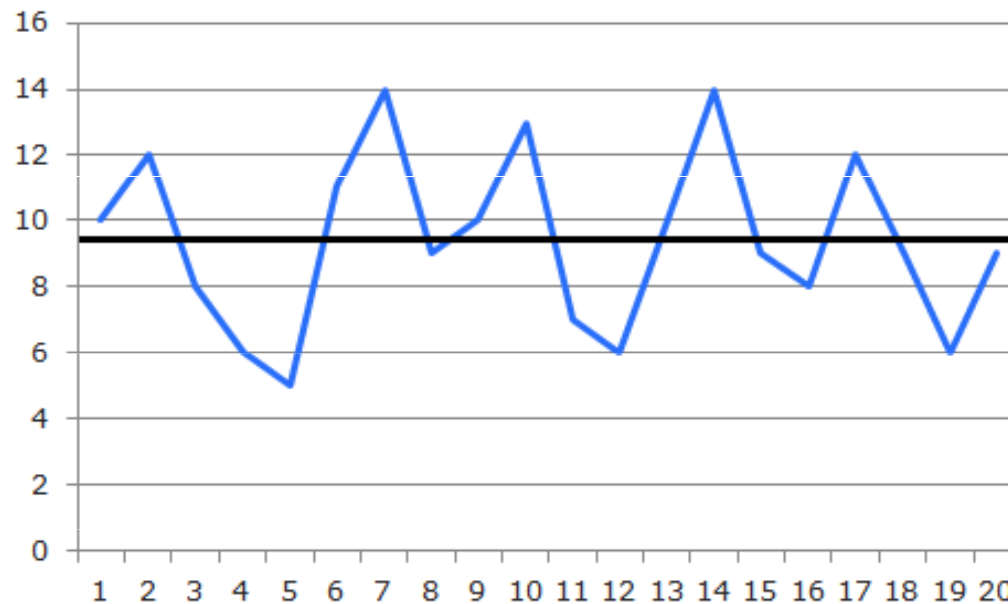


MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

☑ průměr:

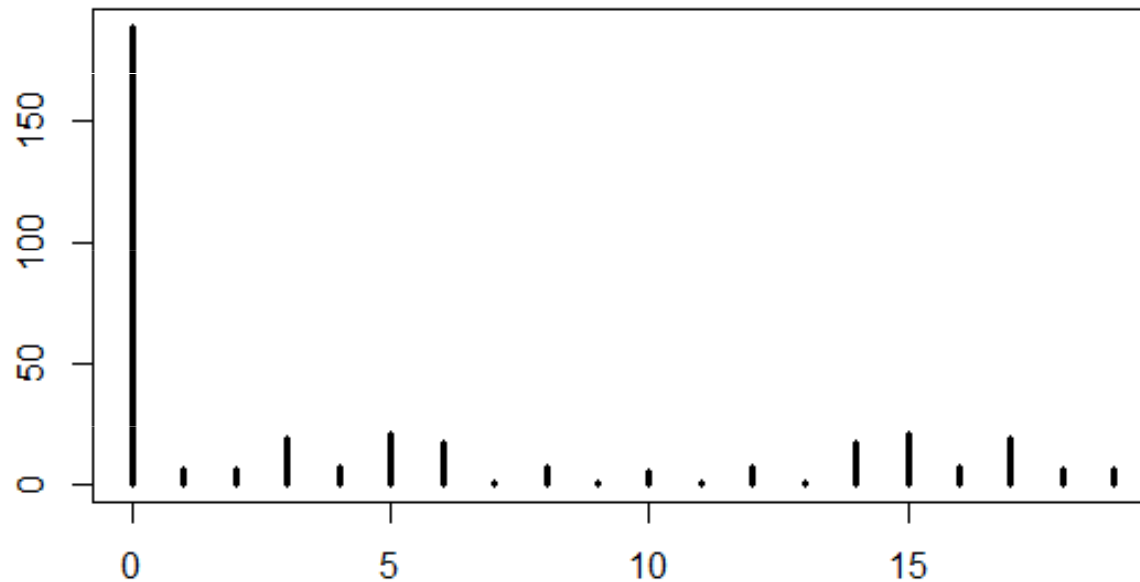
$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \cdot x(k) = \sum_{k=1}^N a_n \cdot x(k)$$



MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

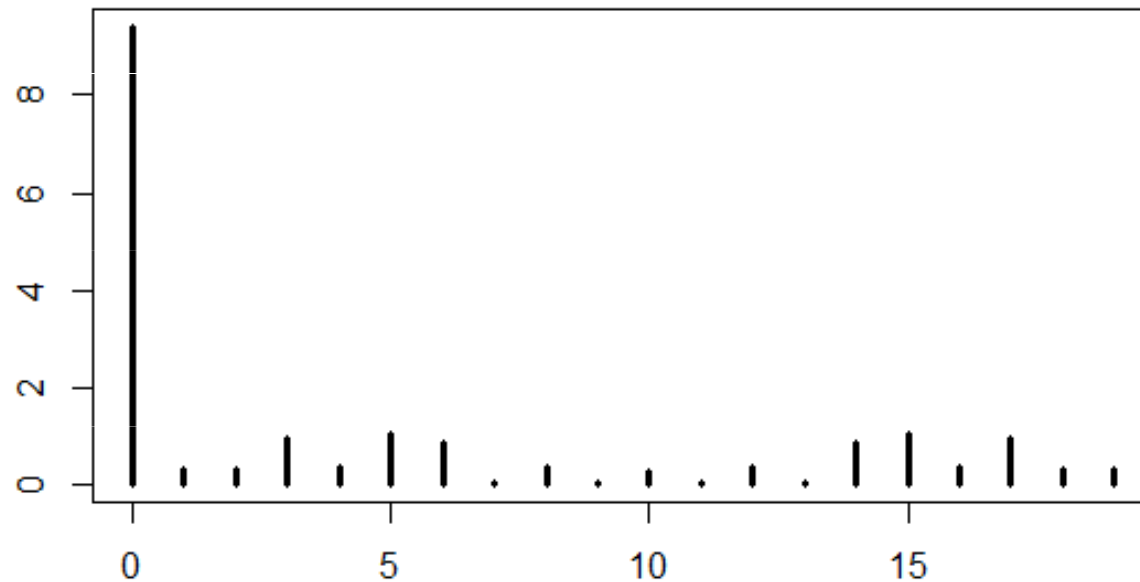
```
x<-c(10,12,8,6,5,11,14,9,10,13,7,6,10,14,9,8,12,9,6,9)
y<-abs(fft(x))
plot(0:(length(x)-1),y,cex=0)
for(i in 0:(length(x)-1)) {
  lines(c(i,i),c(0,y[i+1]),lwd=3,col="black")
}
```



MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

```
x<-c(10,12,8,6,5,11,14,9,10,13,7,6,10,14,9,8,12,9,6,9)
y<-abs(fft(x))/20
plot(0:(length(x)-1),y,cex=0)
for(i in 0:(length(x)-1)) {
  lines(c(i,i),c(0,y[i+1]),lwd=3,col="black")
}
```

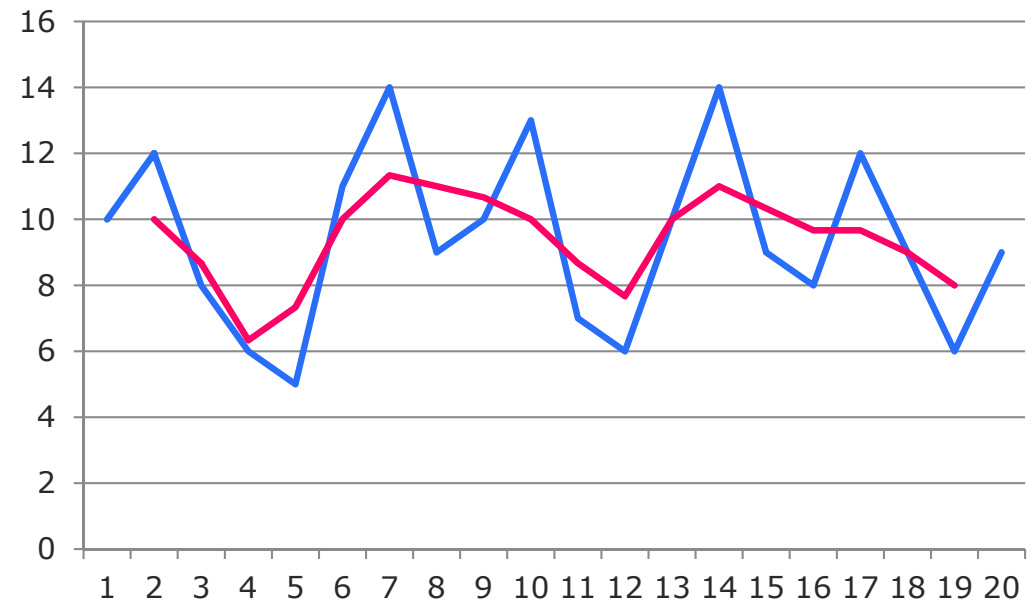


MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

$m = 3$

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	



MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

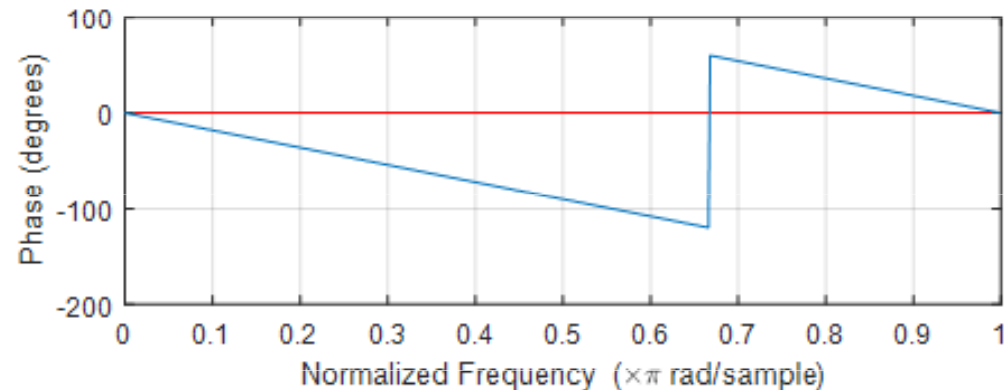
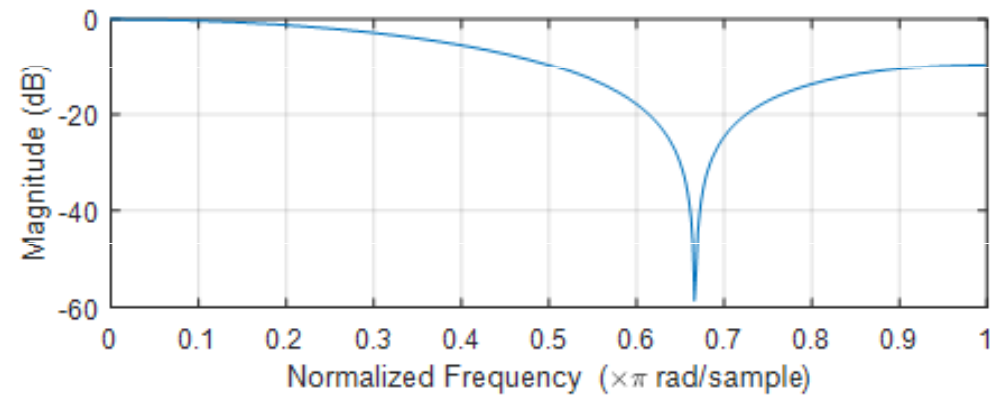
PŘÍKLAD

$m = 3$

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	

$$y(n) = [x(n+1)+x(n)+x(n-1)]/3 \quad H(z) = (z+1+z^{-1})/3$$

$$y(n) = [x(n)+x(n-1)+x(n-2)]/3 \quad H(z) = (1+z^{-1}+z^{-2})/3$$



MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

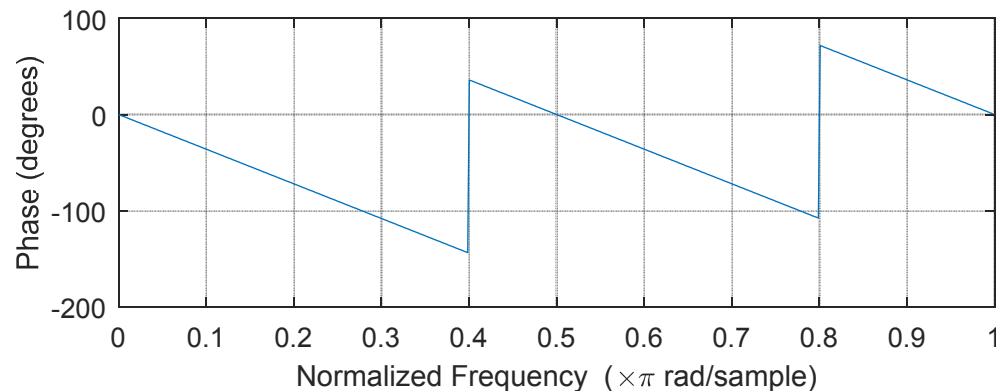
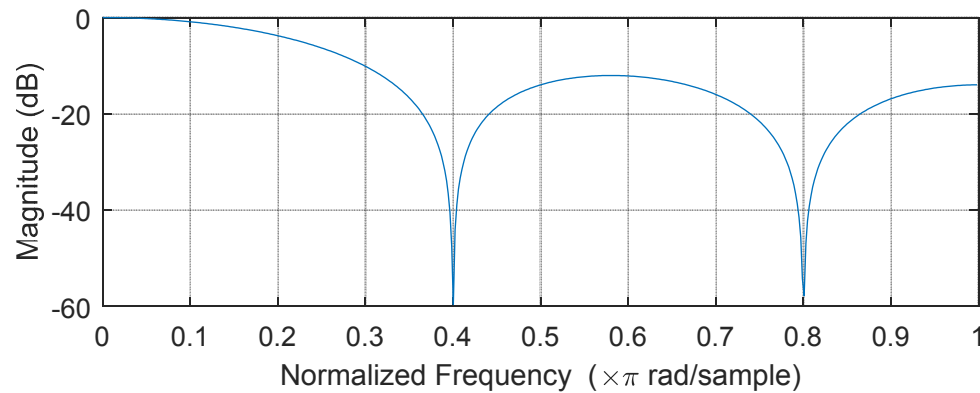
PŘÍKLAD

$m = 3$ $m = 5$

1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		

$$y(n) = [x(n)+x(n-1)+x(n-2)+x(n-3)+x(n-4)]/5$$

$$H(z) = (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})/5$$



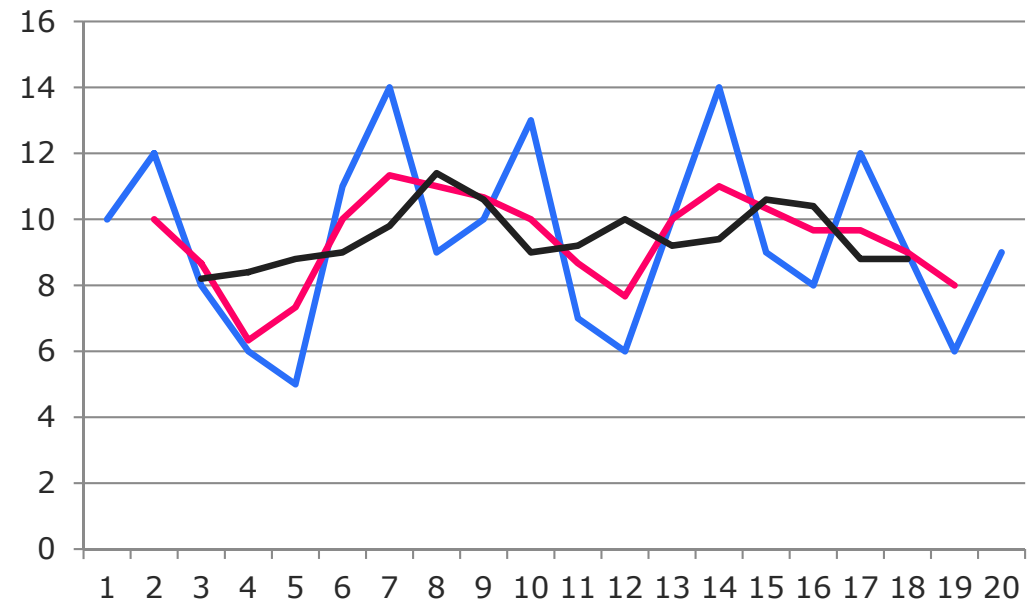
$$\mathbf{a} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

$m = 3$ $m = 5$

1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		



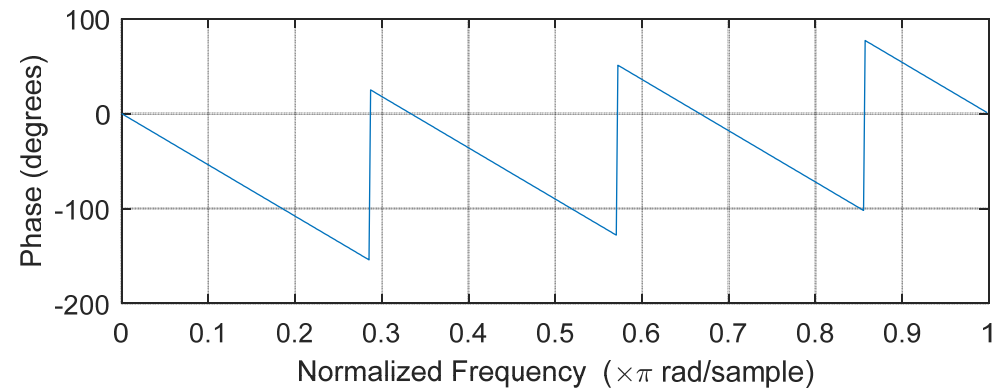
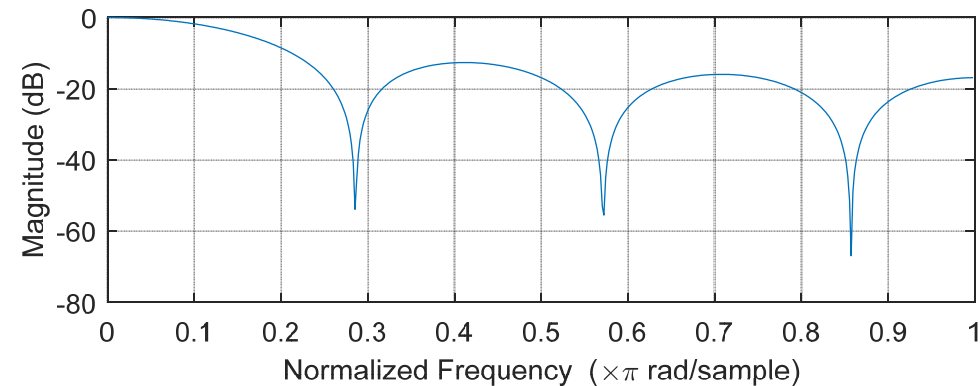
$$\mathbf{a} = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

$m = 3$ $m = 5$ $m = 7$

1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



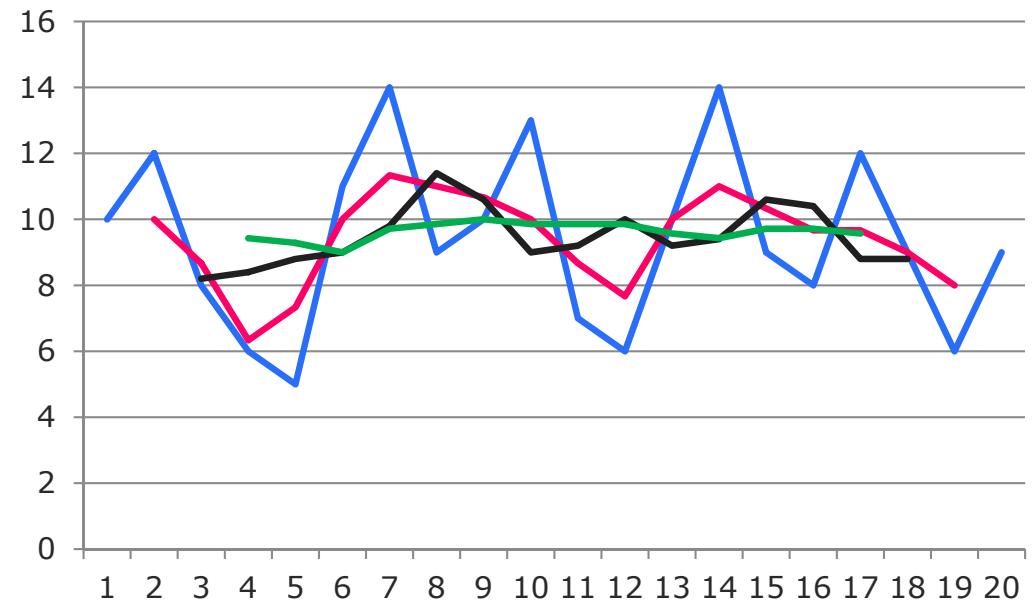
$$\mathbf{a} = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

$m = 3$ $m = 5$ $m = 7$

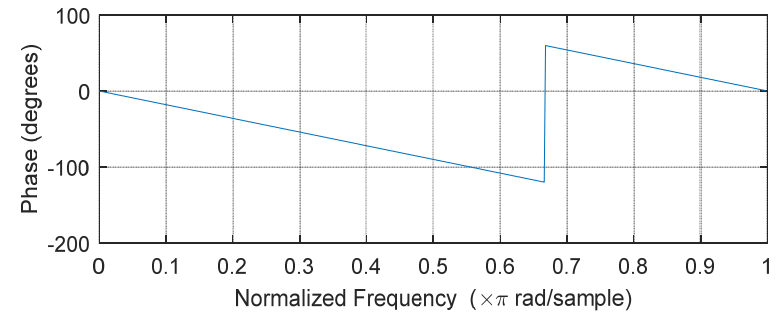
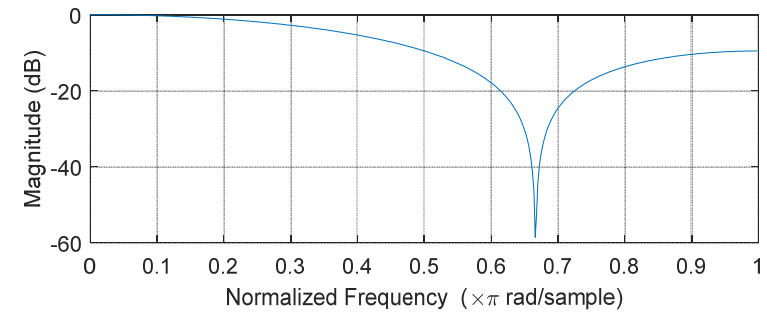
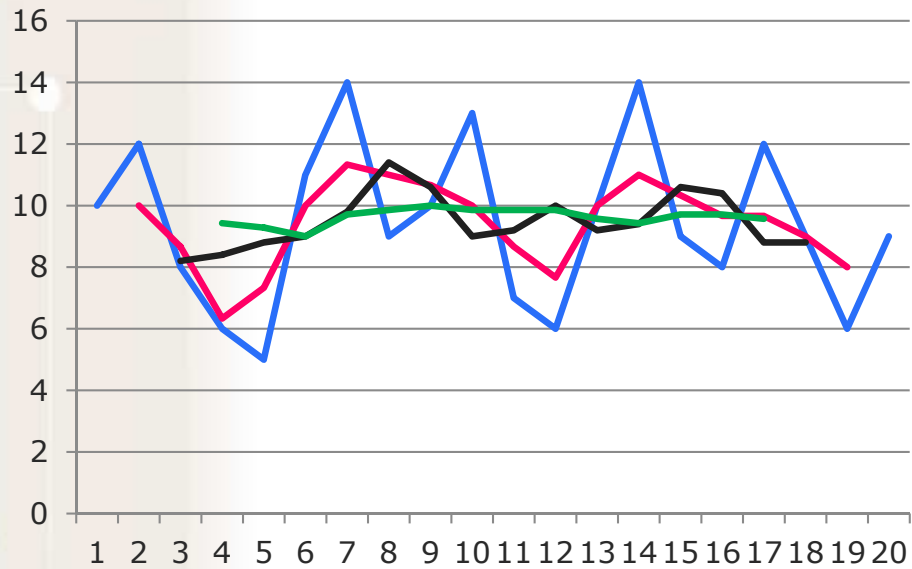
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



$$\mathbf{a} = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7)$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

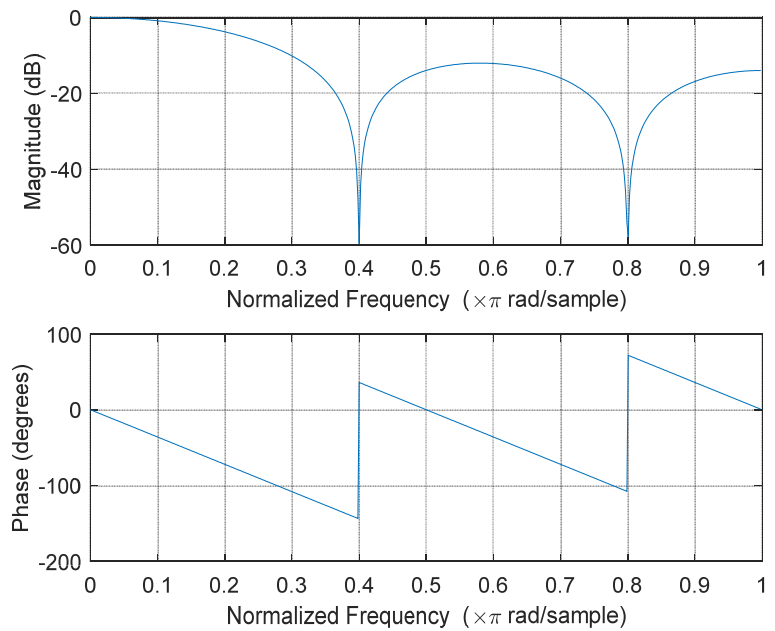
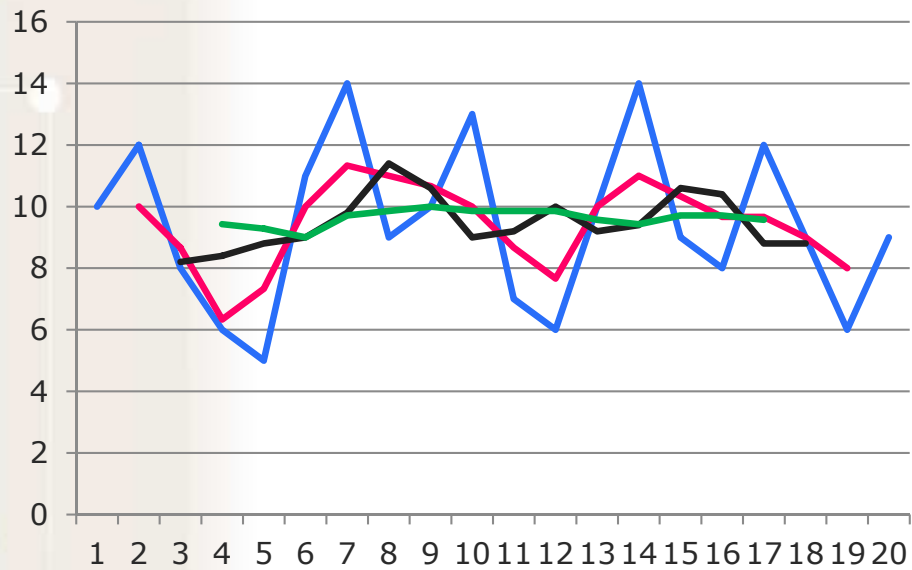
PŘÍKLAD



$$m = 3$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

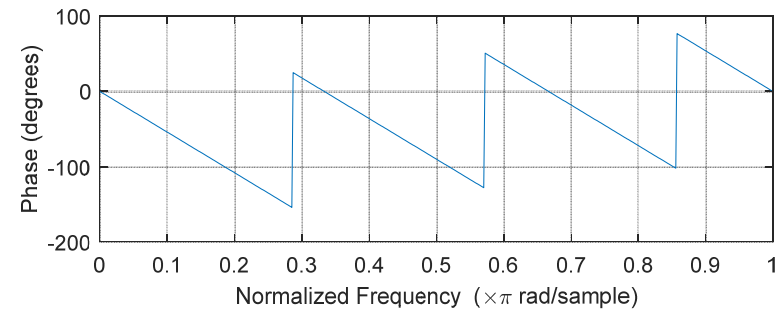
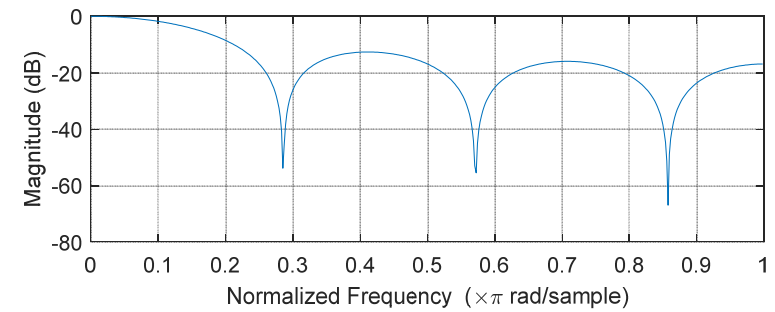
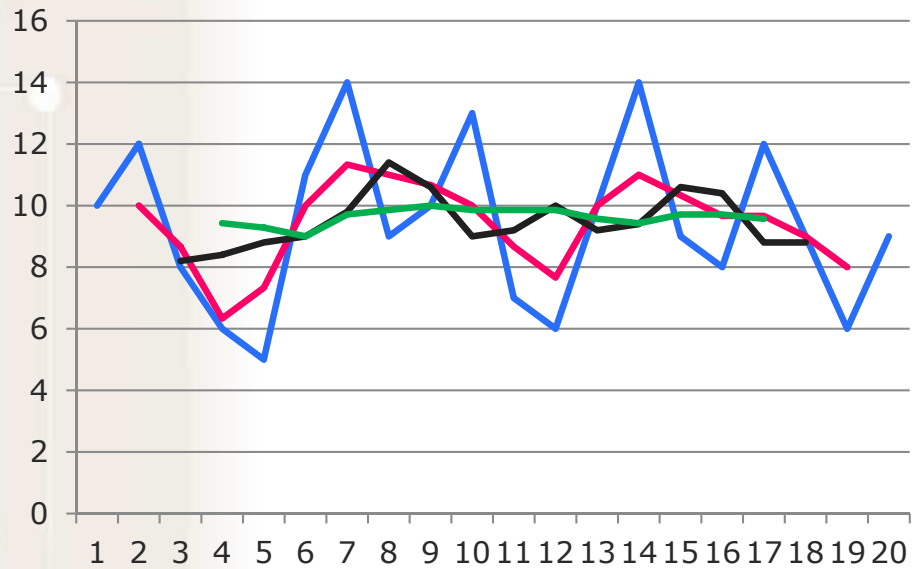
PŘÍKLAD



$$m = 5$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

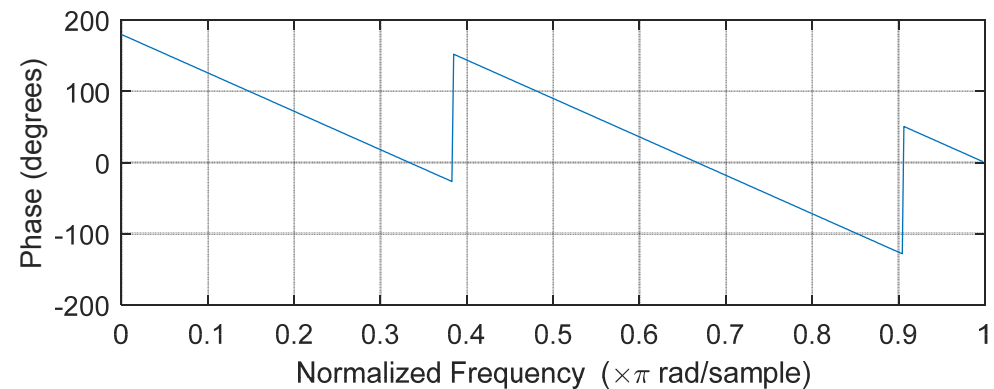
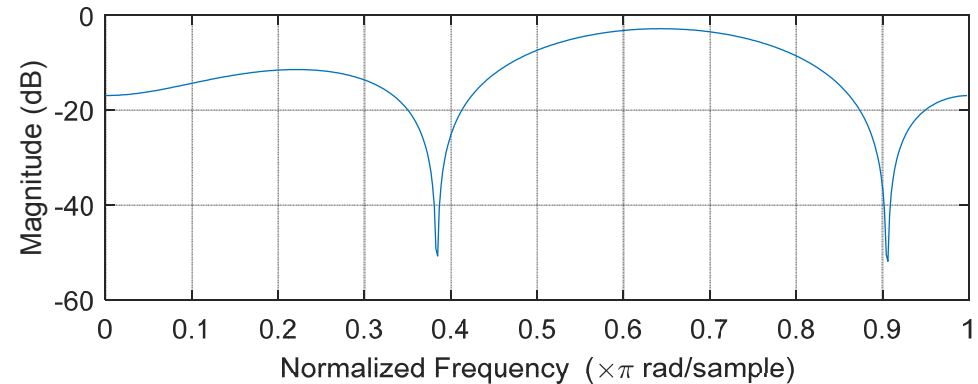


$$m = 7$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

		$m = 3$	$m = 7$	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			

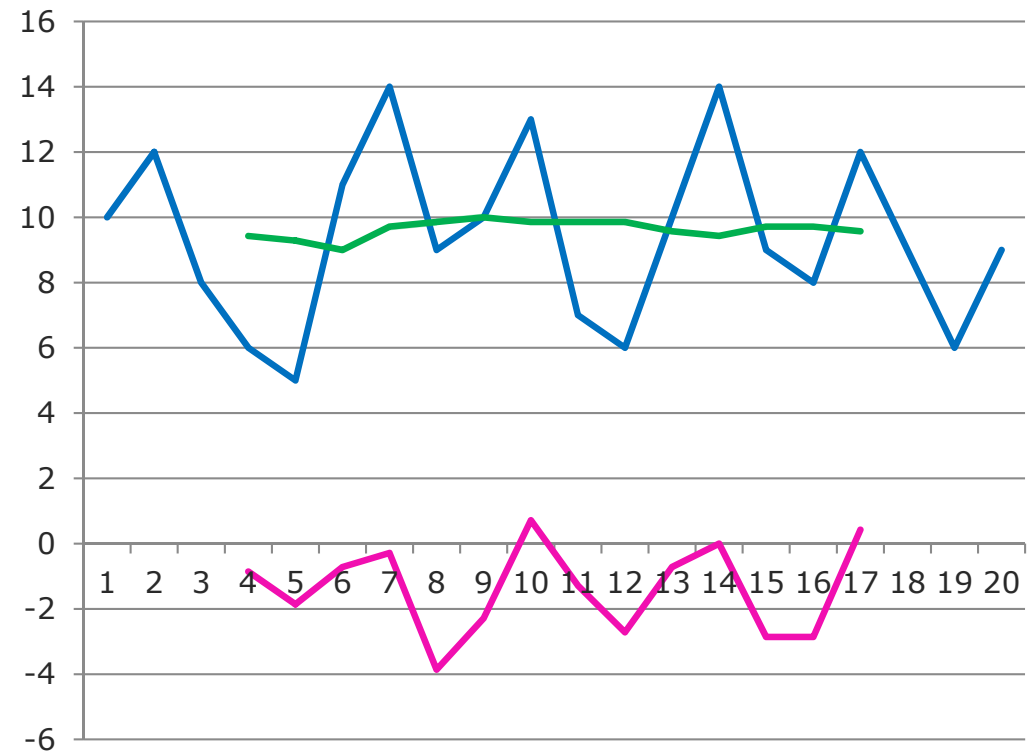


$$\mathbf{a} = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7, -1/7, 1/7)$$

MA FILTR S ROVNOMĚRNÝMI VAHAMI

PŘÍKLAD

		$m = 3$	$m = 7$	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			



$$\mathbf{a} = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7, -1/7, 1/7)$$

AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) - y(nT_{vz} - T_{vz}) = x(nT_{vz})$$

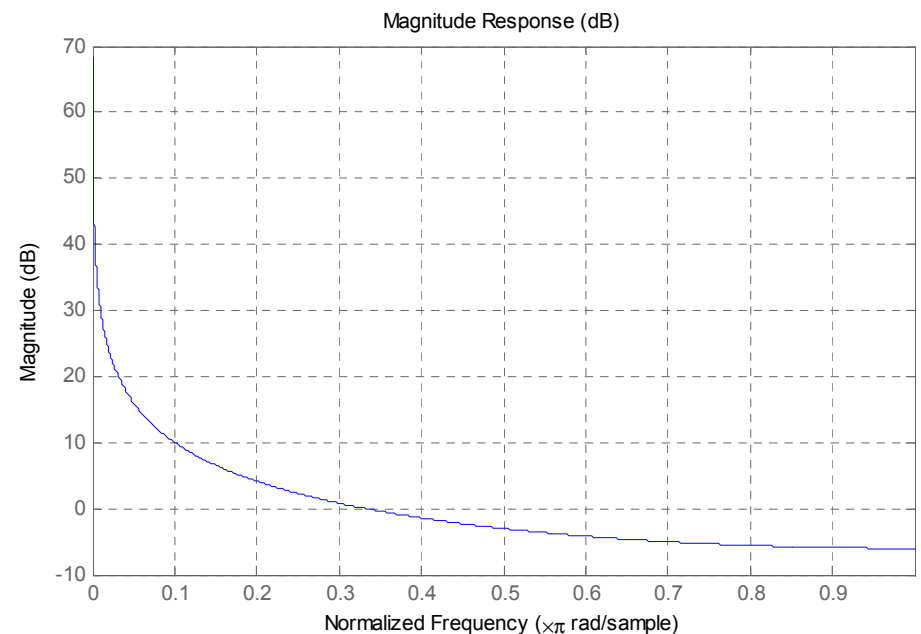
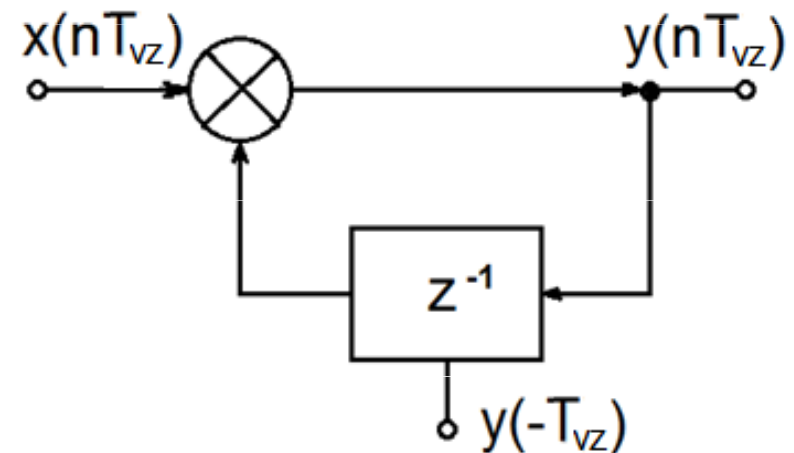
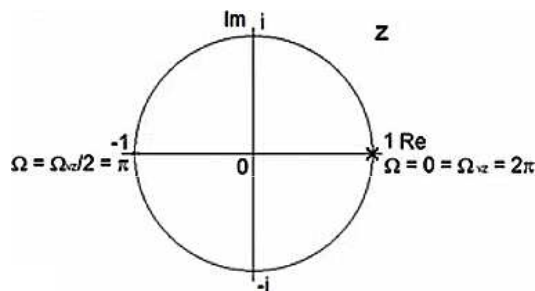
$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + y(nT_{vz} - T_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) - Y(z) \cdot z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + y(nT_{vz} - T_{vz}) = x(nT_{vz})$$

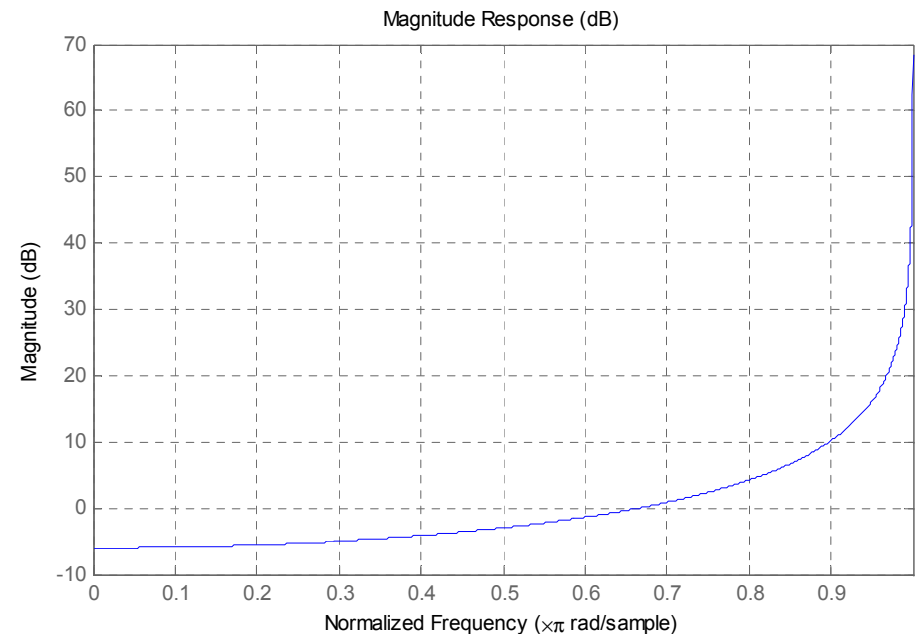
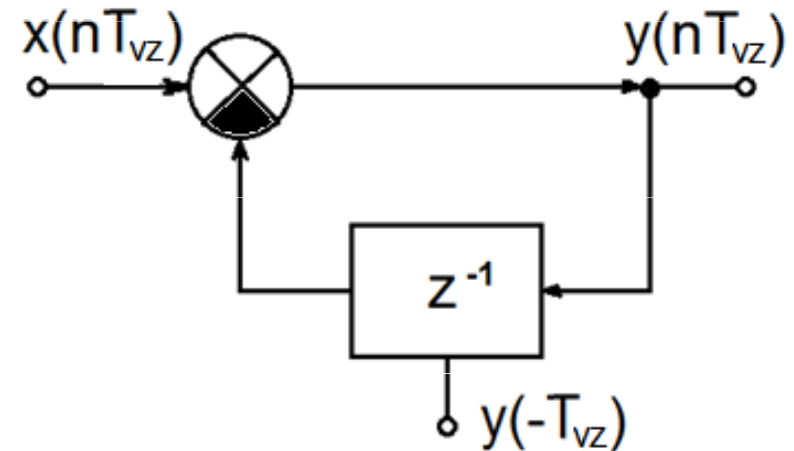
$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - y(nT_{vz} - T_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)(1 + z^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{z}{z + 1}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + y(nT_{vz} - T_{vz}) = x(nT_{vz})$$

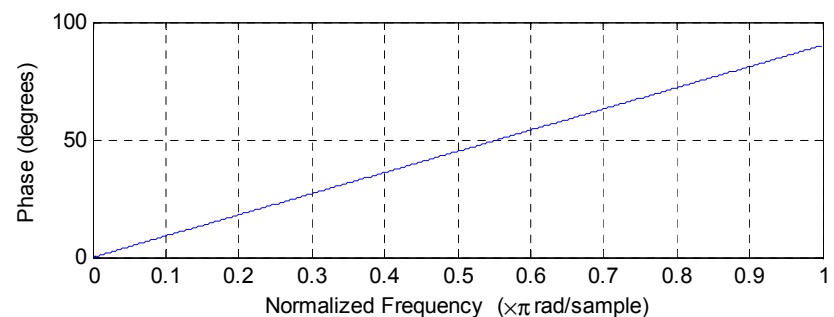
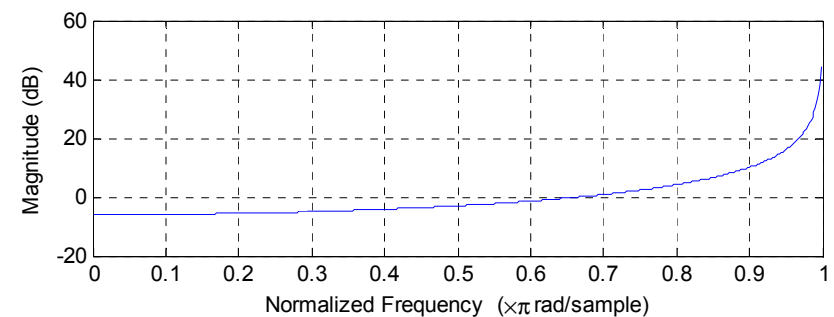
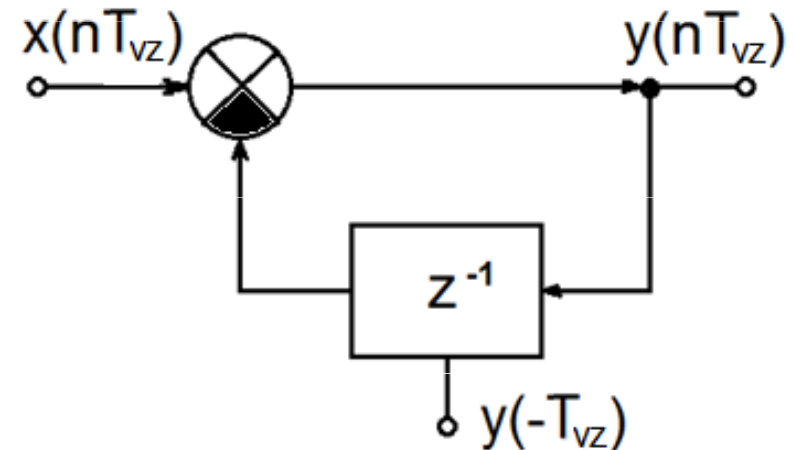
$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - y(nT_{vz} - T_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1} = X(z)$$

$$Y(z)(1 + z^{-1}) = X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 + z^{-1}} = \frac{z}{z + 1}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + y(nT_{vz} - T_{vz}) = 2x(nT_{vz})$$

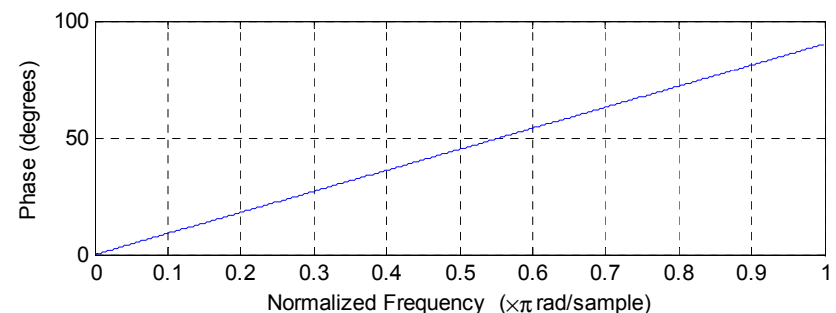
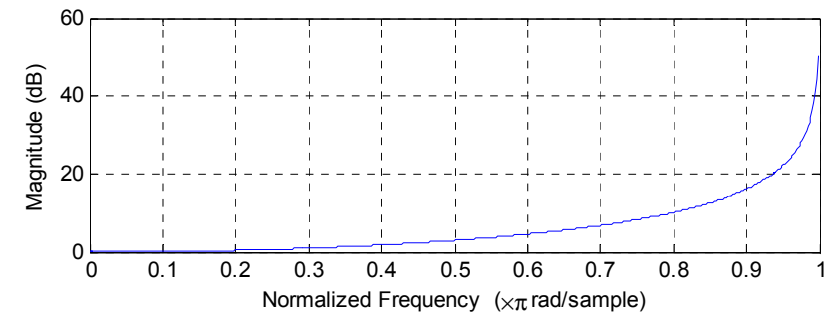
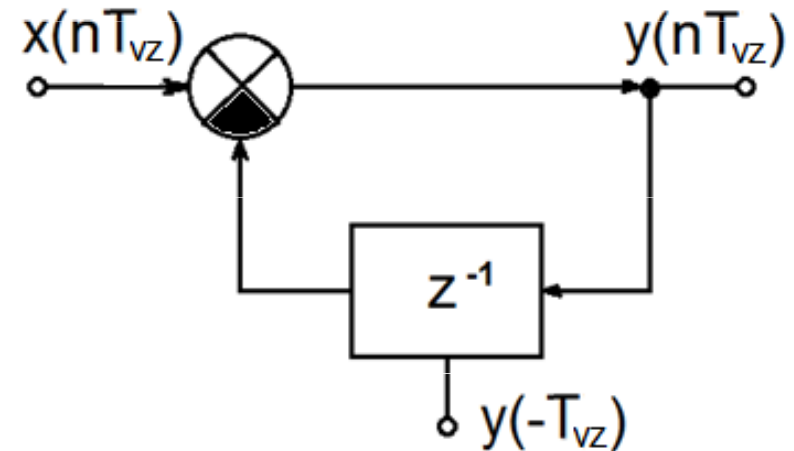
$$y(nT_{vz}) = 2x(nT_{vz}) - y(nT_{vz} - T_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + Y(z) \cdot z^{-1} = 2X(z)$$

$$Y(z)(1 + z^{-1}) = 2X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 + z^{-1}} = \frac{2z}{z + 1}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 1. ŘÁDU

☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + 0,9 \cdot y(nT_{vz} - T_{vz}) = 1,9 \cdot x(nT_{vz})$$

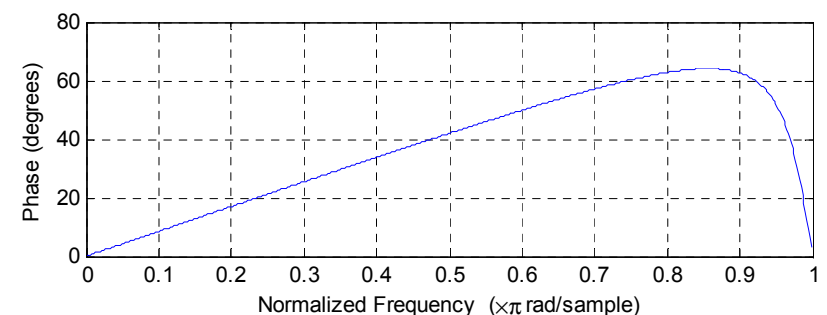
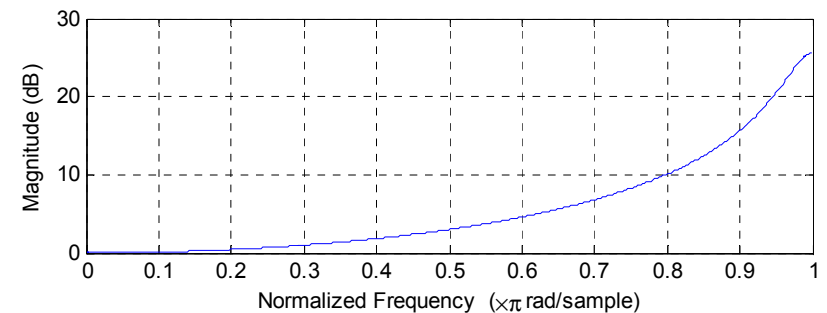
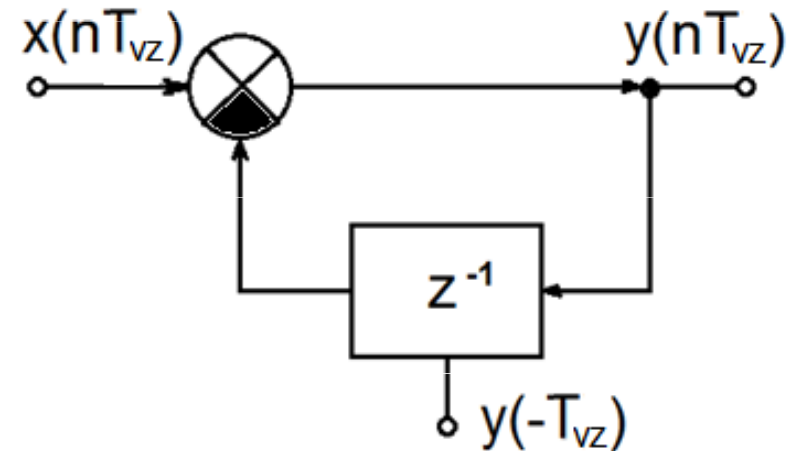
$$y(nT_{vz}) = 1,9 \cdot x(nT_{vz}) - 0,9 \cdot y(nT_{vz} - T_{vz})$$

☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + 0,9 \cdot Y(z) \cdot z^{-1} = 1,9 \cdot X(z)$$

$$Y(z)(1 + 0,9 \cdot z^{-1}) = 1,9 \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1,9}{1 + 0,9 \cdot z^{-1}} = \frac{1,9 \cdot z}{z + 0,9}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 2. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + y(nT_{vz} - 2T_{vz}) = 2 \cdot x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz}) = 2 \cdot x(nT_{vz}) - y(nT_{vz} - 2T_{vz})$$

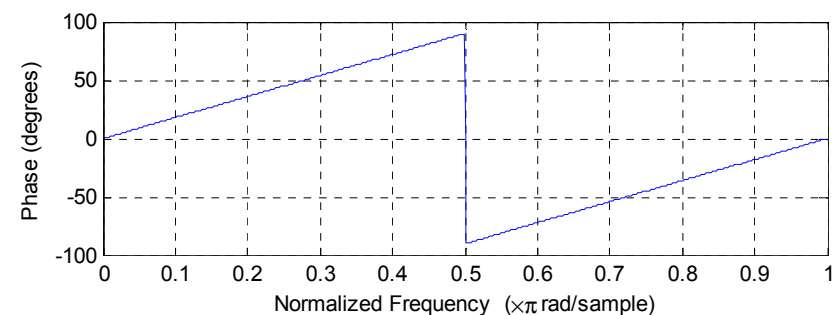
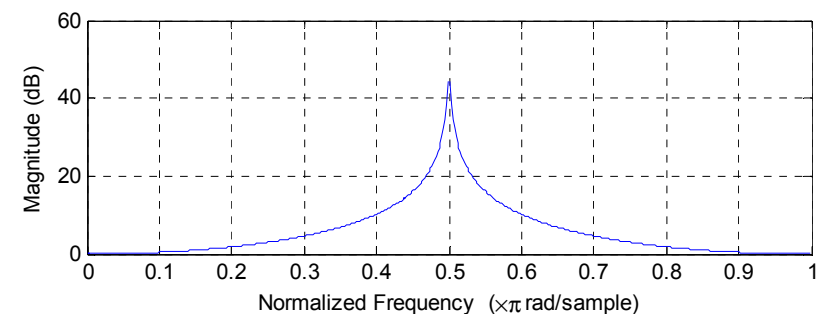
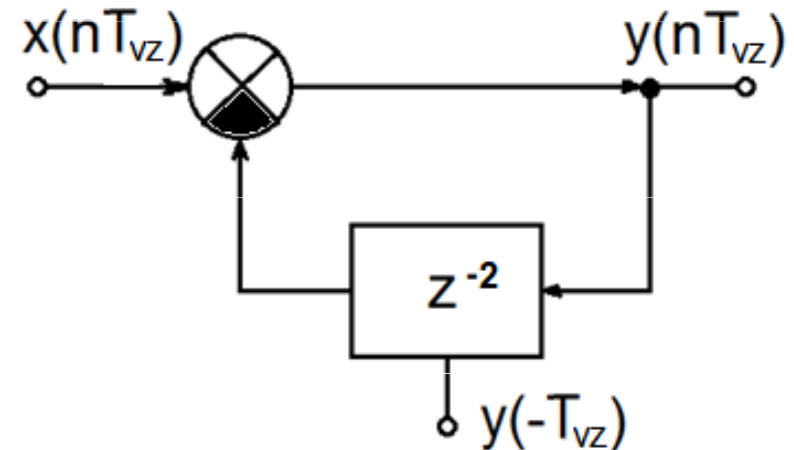
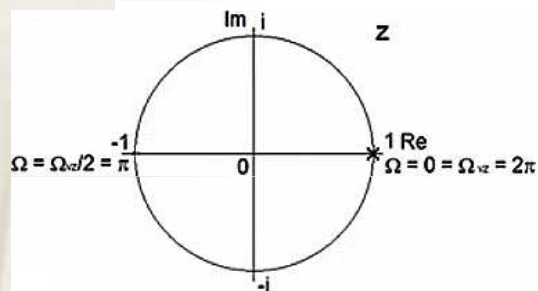
- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + Y(z) \cdot z^{-2} = 2 \cdot X(z)$$

$$Y(z)(1 + z^{-2}) = 2 \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2}{1 + z^{-2}} = \frac{2z^2}{z^2 + 1} =$$

$$= \frac{2z^2}{(z + i)(z - i)}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 2. ŘÁDU

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + 0,81y(nT_{vz} - 2T_{vz}) = 1,81x(nT_{vz})$$

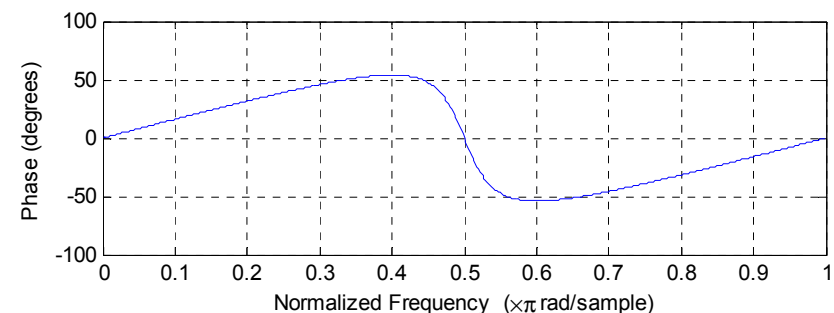
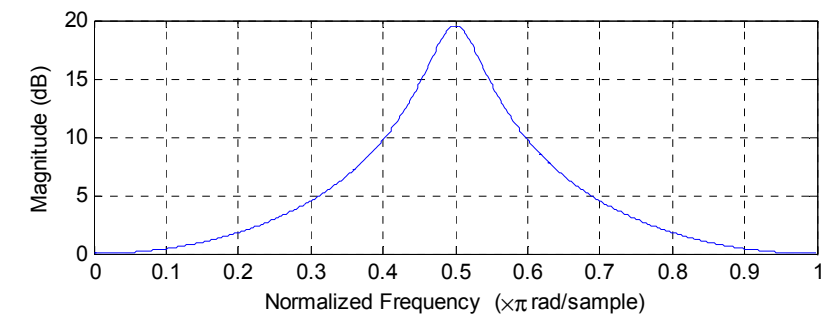
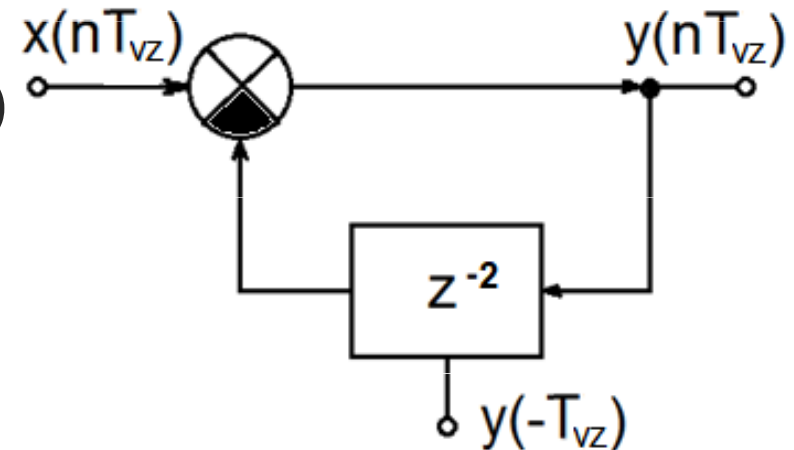
$$y(nT_{vz}) = 1,81x(nT_{vz}) - 0,81y(nT_{vz} - 2T_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + 0,81.Y(z).z^{-2} = 1,81.X(z)$$

$$Y(z)(1 + 0,81.z^{-2}) = 1,81.X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1,81}{1 + 0,81.z^{-2}} =$$
$$= \frac{1,81.z^2}{z^2 + 0,81} = \frac{1,81.z^2}{(z + 0,9i)(z - 0,9i)}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN 2. ŘÁDU

☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) + 1,23y(nT_{vz} - 2T_{vz}) = 2,23x(nT_{vz})$$

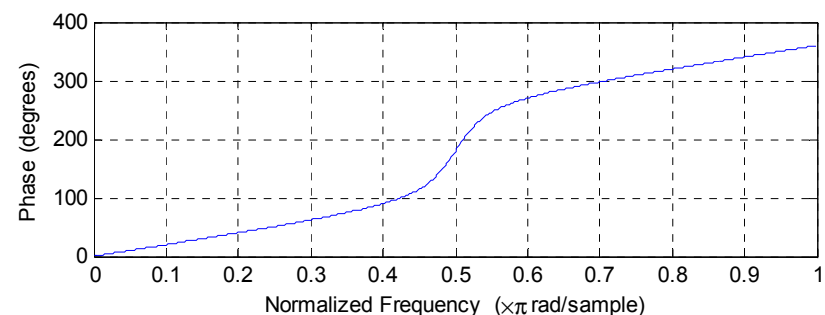
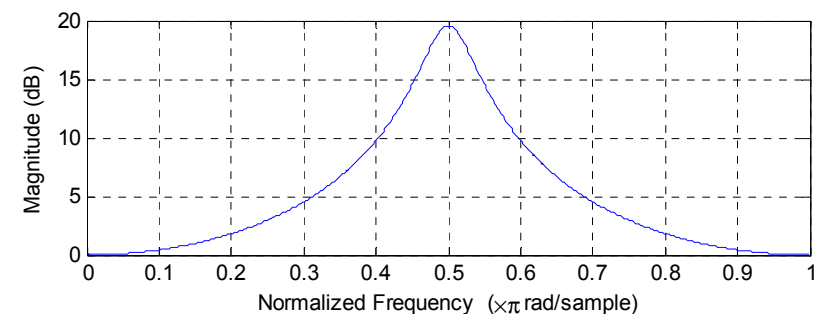
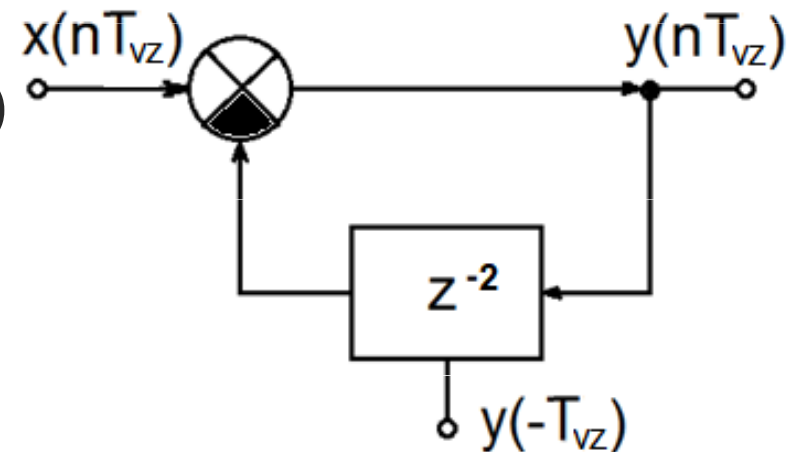
$$y(nT_{vz}) = 2,23x(nT_{vz}) - 1,23y(nT_{vz} - 2T_{vz})$$

☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) + 1,23.Y(z).z^{-2} = 2,23.X(z)$$

$$Y(z)(1 + 1,23.z^{-2}) = 2,23.X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{2,23}{1 + 1,23.z^{-2}} =$$
$$= \frac{2,23.z^2}{z^2 + 1,23} = \frac{2,23.z^2}{(z + 1,11.i)(z - 1,11.i)}$$



AUTOREGRESIVNÍ ČLEN

- ☑ diferenční rovnice

$$y(nT_{vz}) - a_1 y(nT_{vz} - T_{vz}) - \dots - a_m y(nT_{vz} - mT_{vz}) = b_0 x(nT_{vz})$$

$$y(nT_{vz}) = b_0 x(nT_{vz}) + a_1 y(nT_{vz} - T_{vz}) + \dots + a_m y(nT_{vz} - mT_{vz})$$

- ☑ obrazová přenosová funkce

$$Y(z) - a_1 Y(z) \cdot z^{-1} - \dots - a_m Y(z) \cdot z^{-m} = b_0 X(z)$$

$$Y(z) - \sum_{i=1}^m a_i Y(z) \cdot z^{-i} = b_0 \cdot X(z)$$

$$Y(z) \left(1 - \sum_{i=1}^m a_i \cdot z^{-i} \right) = b_0 \cdot X(z)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0}{\left(1 - \sum_{i=1}^m a_i \cdot z^{-i} \right)} = \frac{b_0 z^m}{z^m - \sum_{i=1}^m a_i \cdot z^{m-i}}$$

SOUHRN

- ☑ MA struktury jsou vhodnější v případech, kdy je třeba filtrovat/modelovat data s relativně širším propustným pásmem;
- ☑ AR struktury jsou vhodnější v případech, kdy je třeba filtrovat/modelovat data s relativně užším propustným pásmem;
- ☑ základní formy popisu lineárních systémů (frekvenční charakteristiky, rozložení nulových bodů a pólů, impulzní charakteristika,) jsou vhodné pro získání základní představy o jejich frekvenčních vlastnostech;

SOUHRN

- ☑ mají-li lineární filtry symetrickou/ /antisymetrickou impulzní charakteristiku, mají lineární fázovou charakteristiku, tj. nezavádějí fázové zkreslení;
- ☑ (anti)symetrická impulzní charakteristika lze lépe zajistit pro MA systémy, proto jsou tyto systémy pro filtraci (odstranění nežádoucích složek) časové řady preferovanější;