

Cvičení z elektřiny a magnetismu

Autor: Mgr. Martin Čermák, Ph.D.

Grafika: Mgr. Jana Jurmanová, Ph.D.



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV FYZIKÁLNÍ ELEKTRONIKY



Cvičení z elektřiny a magnetismu

Autor: Mgr. Martin Čermák, Ph.D.

Grafika: Mgr. Jana Jurmanová, Ph.D.



MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV FYZIKÁLNÍ ELEKTRONIKY

Tento text vyšel za podpory Fondu rozvoje Masarykovy univerzity a Ústavu fyzikální elektroniky.

© Martin Čermák, Brno 2014

Obsah

1	Vektorová pole	6
1.1	Úvod do vektorových polí v elektřině a magnetismu	6
1.2	Operátory	7
1.3	Matematické identity	11
1.4	Integrál po křivce	12
2	Elektrostatika	15
2.1	Coulombův zákon	15
2.2	Princip superpozice	17
2.3	Elektrická intenzita obecného zdroje	18
3	Skalární potenciál	26
3.1	Skalární potenciál bodového zdroje	26
3.2	Skalární potenciál nebodového zdroje	30
3.3	Ekvipotenciální plochy	33
4	Gaussův zákon a vodiče v elektrickém poli	36
4.1	Gaussův zákon a jeho aplikace	36
4.2	Vodiče v elektrickém poli	42
5	Kondenzátory	46
5.1	Kapacita	46
5.2	Kapacita soustavy kondenzátorů	47
6	Dielektrika	52
6.1	Dielektrika v homogenním poli	52
6.2	Vektor elektrické indukce	53
6.3	Lineární aproximace	54
6.4	Elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik	59
6.5	Dielektrická pevnost	62
7	Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony	66
7.1	Elektrický proud	66
7.2	Rovnice kontinuity	67
7.3	Ohmův zákon	68
7.4	Kirchhoffovy zákony	69
8	Magnetostatika a základy elektromagnetismu	76
8.1	Lorentzova síla	76
8.2	Magnetický moment	80
8.3	Gaussův zákon pro magnetické pole	80
8.4	Ampérův zákon v diferenciálním tvaru	81
8.5	Ampérův zákon v integrálním tvaru	82
9	Biotův–Savartův zákon.	88
9.1	Biotův–Savartův zákon a vektorový potenciál.	88

10 Faradayův zákon, Maxwellovy rovnice, potenciály	94
10.1 Faradayův zákon	94
10.2 Maxwellovy rovnice a potenciály	97
10.3 Kalibrační invariance	99
10.4 Lorenzova kalibrační podmínka	100
10.5 Maxwellovy rovnice v prostředí	101
10.6 Energie elektromagnetického pole	102
10.6.1 Hustota energie elektromagnetického pole	102
10.6.2 Energie elektrostatického pole	103
11 Cívky	105
11.1 Vlastní indukčnost	105
11.2 Vzájemná indukčnost	109
11.3 Transformátor	112
12 Střídavé obvody	115
12.1 Komplexní čísla	115
12.2 Základní prvky střídavých obvodů	116
12.3 Zapojení RLC prvku ve střídavém obvodu	117
12.4 Řešení diferenciální rovnice pro střídavé obvody	119
13 Stručný přehled vybraných klíčových vzorců	123

Předmluva

Text, který právě začínáte číst, vznikl jako učební materiál k předmětu Cvičení z elektřiny a magnetismu.

K přípravě na cvičení bylo použito těchto zdrojů: třetí díl kurzu Fyzika od autorů D. Halliday, R. Resnick, J. Walker [1] a druhý díl kurzu Feynmanovy přednášky z fyziky od autorů R. Feynman, R. Leighton, M. Sands [2]. Bohužel ani jeden ze dvou zmíněných textů není dostatečně vhodný k samostatné přípravě do předmětu Elektřina a magnetismus pro fyzikální obory na Masarykově univerzitě. Fyzika od autorů D. Halliday, R. Resnick, J. Walker vznikla jako učebnice pro studenty technických a inženýrských oborů a její matematická a obsahová náročnost zůstává nižší, než se očekává od studentů fyzikálního zaměření. Naopak Feynmanovy přednášky z fyziky obsahují mnohem více informací, než se po studentech při zkoušce požaduje. Student pak často jen špatně rozpoznává, co je ke studiu nezbytné, a co nikoli. Proto se ukázalo velmi přínosným vytvořit tento materiál, který se stává kompromisem mezi zmíněnými učebnicemi.

Na konci každé kapitoly těchto skript jsou uvedeny alternativní učební zdroje. Kromě dvou výše uvedených se jedná o učebnice Elektromagnetismus autora A. Tirpáka [3], Elektřina a magnetismus autorů B. Sedláka a I. Štol [4] a první díl kurzu Feynmanovy přednášky z fyziky [5]. Uvedené zdroje však ne vždy přesně odpovídají požadované látce a lze je spíše použít pro doplnění informací.

V celé práci budeme používat základní jednotky SI.

Elektřina a magnetismus představuje po Mechanice a molekulové fyzice druhý kmenový fyzikální předmět, se kterým se studenti setkávají. Byť je to škoda, v mechanice jsme se nutně řadě matematických výrazů a termínů vyhýbali kvůli nízké matematické úrovni studentů. Tento předmět již aktivní znalost některých matematických operací vyžaduje. Konkrétně se předpokládají základní znalosti derivací, integrálů, limit, a také základní operace s trojrozměrnými vektory, ať už jde o sčítání či skalární a vektorové násobení.

Poděkování

Za pomoc při přípravě textu bych především chtěl poděkovat Janě Jurmanové, která svými pestrobarevnými obrázky oživila pochmurný černobílý text a svými připomínkami a korekcemi výrazně zvýšila kvalitu skript. Dále bych chtěl poděkovat studentkám Anně Hrubé a Zdislavě Vávrové, které se postaraly o korekturu jazyka českého a vytvoření databáze alternativních učebních zdrojů, a Magdě Plevákové za nakreslení obrázku na úvodní stránku. V neposlední řadě chci poděkovat všem, co si skripta před vydáním přečetli a vyjádřili k nim své připomínky. Tento dík patří především studentům předmětu Elektřina a magnetismus, jež jsem měl tu čest vyučovat.

Vstupní test

Pro studenty druhého semestru oboru fyzika by mělo být samozřejmostí řešit tento typ příkladů:

1. $y = [\sin(3x + 2)]^5$, $y' = ?$

2. $y(x) = \frac{1}{1-x^2}$, $\int y(x) dx = ?$

3. $f = x^2 + y^2 + z^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = ?$

4. $\vec{a} = (3, 2, 1)$, $\vec{b} = (6, -9, 0)$

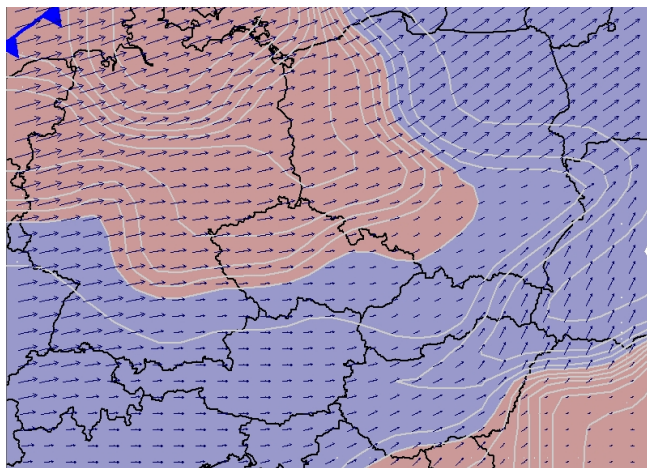
a) $\vec{a} \times \vec{b} = ?$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = ?$

1 Vektorová pole

1.1 Úvod do vektorových polí v elektřině a magnetismu

V této kapitole se budeme zabývat **vektorovým polem**. Vektorové pole si představme tak, že do každého bodu trojrozměrného prostoru vložíme **vektor** (reprezentovaný trojicí čísel). V každém bodě pak tato trojice čísel může být rozdílná. Zpravidla uvažujeme přechod mezi vektory v různých bodech za spojitý, hladký a diferencovatelný. Jako příklad takových polí uvedeme: vektory rychlosti v proudící tekutině (viz obrázek 1), vektory elektrické intenzity \vec{E} a vektory magnetické indukce \vec{B} jimiž se tyto skripta z velké části zabývají.



Obrázek 1: Vektorové pole rychlosti větru.

Právě v případě elektromagnetického pole si představme, že do každého bodu prostoru vložíme dvojici vektorů \vec{E} a \vec{B} (šestici funkcí), která závisí jak na čase t , tak na poloze $\vec{r} \equiv (x, y, z)$, tedy celkem na čtyřech souřadnicích (proměnných).

Tyto funkce lze derivovat podle zmíněných proměnných. Tento typ derivace se nazývá **parciální** a značí se $\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ (v kartézské souřadnicové soustavě). Konkrétní parciální derivace (například podle x) zachází s ostatními proměnnými (t, y, z) tak, jako zachází klasická derivace s konstantami.

Derivace podle času se ve fyzice často značí jako tečka nad derivovanou funkcí $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv \dot{f}$. V literatuře se můžeme setkat s označením parciální derivace také například ve tvaru $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_{,x}$.

Př. 1.1.

Zadání: Uvažujte funkci čtyř proměnných ve tvaru $f(t, x, y, z) = e^{ct} (x^2 + y^2 + z^2)$. Najděte parciální derivaci podle všech proměnných.

Řešení: $\frac{\partial f}{\partial t} = ce^{ct} (x^2 + y^2 + z^2)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{ct}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2ye^{ct}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 2ze^{ct}$. V případě derivace podle souřadnice t jsme pracovali se závorkou obsahující $x^2 + y^2 + z^2$ jako s konstantou K . Derivace funkce Ke^{ct} , kde t je proměnná, lze zapsat ve tvaru cKe^{ct} . Výsledek uvedený výše obdržíme zpětným dosazením výrazu $x^2 + y^2 + z^2$ namísto konstanty K . Zbylé derivace řešíme obdobným způsobem.

Př. 1.2.

Zadání: Uvažujte funkci čtyř proměnných ve tvaru $f(t, x, y, z) = xyz^2$. Najděte parciální derivaci podle všech proměnných.

Řešení: $\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \frac{\partial f}{\partial x} = yz^2, \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2, \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz.$

1.2 Operátory

Pro studium vektorového pole slouží **operátory**. Operátorem nazývejme zobrazení, jež přiřadí skalárnímu či vektorovému poli nové skalární či vektorové pole. Takovým operátorem může být parciální derivace či operátory složené z parciálních derivací.

V teorii elektromagnetismu se často používá vektorový **operátor nabla** $\vec{\nabla}$. Zapisuje se (v kartézských souřadnicích) jako $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$. Tímto operátorem pak můžeme působit jak na vektorové pole $\vec{V}(t, x, y, z)$, tak na skalární funkce $F(t, x, y, z)$. Pro stručnost v dalším textu již závislost na všech souřadnicích uvádět nebudeme. Působení operátoru $\vec{\nabla}$ se provádí podobným způsobem jako operace se standardními vektory či skaláry. Rozlišujeme tři základní operace s operátorem nabla, označujeme je jako divergence (div), gradient (grad) a rotace (rot).

- V případě **divergence** působí operátor $\vec{\nabla}$ na vektorové pole $\vec{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)^1$ tak, že výsledkem je skalární funkce

$$\operatorname{div} \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \equiv \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (1)$$

- **Gradient** funkce F lze vyjádřit jako působení vektorového operátoru na skalární funkci, výsledkem je v tomto případě vektorové pole

$$\operatorname{grad} F \equiv \vec{\nabla} \cdot F \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right). \quad (2)$$

- V případě **rotace** působí operátor $\vec{\nabla}$ na vektorové pole $\vec{V} \equiv (V_x, V_y, V_z)$ tak, že výsledkem je nové vektorové pole

$$\operatorname{rot} \vec{V} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{V} \equiv \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right). \quad (3)$$

V divergenci vektorového pole lze hledat analogii se **skalárním součinem** dvou vektorů \vec{a} a \vec{b} , kde $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. V případě divergence vektor \vec{a} nahradíme operátorem $\vec{\nabla}$ a vektor \vec{b} zaměníme s vektorovým polem \vec{V} , jak je zřejmé z rovnice (1).

Podobným způsobem lze hledat analogii gradientu funkce se **součinem vektoru** \vec{a} a **skaláru** c , kde $\vec{a} \cdot c = (a_x c, a_y c, a_z c)$. Dle rovnice (2) vektor \vec{a} nahradíme operátorem $\vec{\nabla}$ a skalár c nahradíme funkcí F .

¹Často se namísto spodních indexů x, y, z používá $1, 2, 3$.

V rotaci můžeme vidět podobnost s **vektorovým součinem** dvou vektorů \vec{a} a \vec{b} , kde

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x).$$

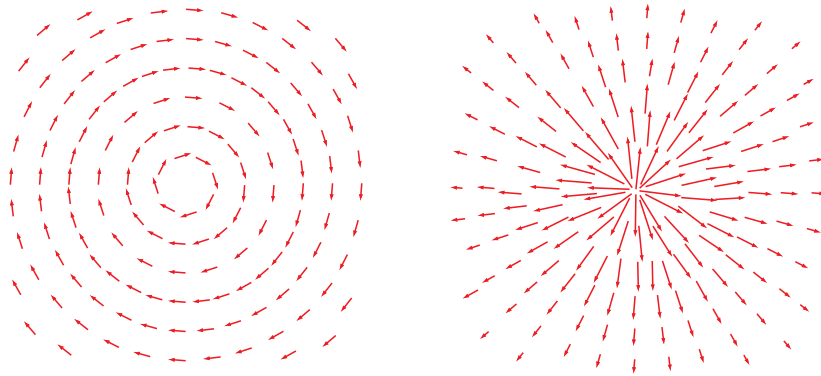
Vektory $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$ značí jednotkové vektory ve směru os x, y, z . V případě rotace vektory \vec{a} a \vec{b} nahradíme operátorem $\vec{\nabla}$ a vektorovým polem \vec{V} (viz rovnice (3)).

Dalším ve fyzice často používaným operátorem je operátor **Laplace** Δ , jenž vznikne skalárním součinem dvou operátorů $\vec{\nabla}$

$$\Delta \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4)$$

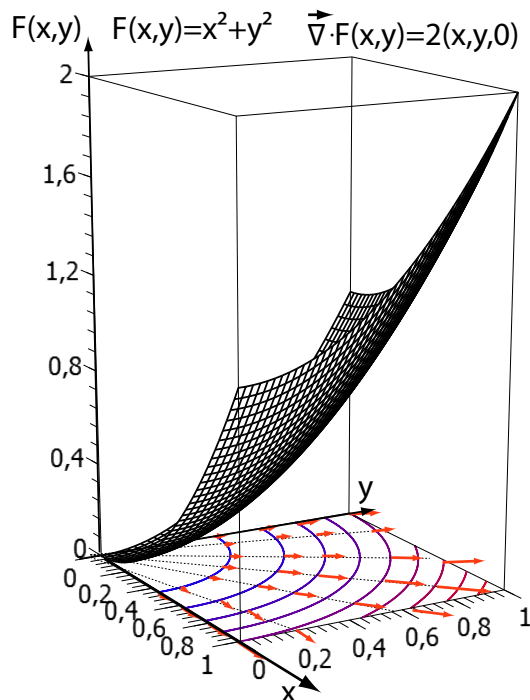
Působením Δ na funkci F (případně vektorové pole \vec{V}) obdržíme novou funkci $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$ (případně vektorové pole $\Delta \vec{V} = \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$). Rovnice $\Delta F = f$ (případně $\Delta F = 0$) je fyzikálně velmi významná, nazývá se **Poissonova rovnice** (případně Laplaceova rovnice) – viz (17).

Jak již bylo řečeno, operátory $\vec{\nabla}$ slouží k popisu vektorových polí či funkcí. V některých případech lze odhadnout výsledek působení těchto operátorů na první pohled, například vektorová pole v obrázku 2. Rotace prvního vektorového pole z obrázku 2 není nulová ($\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq \vec{0}$), divergence naopak nulová vyjde ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$), v případě druhého vektorového pole se rotace nule rovná ($\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$) a divergence ne ($\vec{\nabla} \cdot \vec{V} \neq 0$). Samozřejmě ne vždy se podaří najít pole s nulovou rotací či divergencí.



Obrázek 2: Příklady dvou různých vektorových polí.

U gradientu lze hledat podobnost s klasickou derivací. Derivace nám sdělí, zdali funkce klesá či roste, určíme směrnici tečny. Gradient funguje podobně. Funkce však v tomto případě závisí na více proměnných. Pomocí gradientu nově vytvořené vektorové pole popisuje, jak funkce roste či klesá v daném směru (viz obrázek 3).



Obrázek 3: Gradient funkce.

Př. 1.3.

Zadání: Spočítejte divergenci a rotaci vektorového pole: $\vec{r} = (x, y, z)$.

Řešení: Parciální derivace i -tého členu \vec{r} podle i -té souřadnice se rovná jedné (př. $\frac{\partial r_x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$). Derivace i -tého členu podle j -té souřadnice (kde $i \neq j$) je rovna nule (př. $\frac{\partial r_x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial y} = 0$). Jasně vidíme, že rotace tohoto vektorového pole musí vyjít nulová, protože v případě rotace se nevyskytuje člen, který by po derivování zůstal nenulový (viz rovnice (3)), tedy $\vec{\nabla} \times \vec{r} = \vec{0}$. Divergence tohoto vektorového pole se rovná: $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$.

Př. 1.4.

Zadání: Uvažujte stejné vektorové pole jako v předešlém případě. Uvažujte, že toto pole je výsledkem gradientu funkce $\vec{\nabla} \cdot F = \vec{r}$. Najděte neznámou funkci F .

Řešení: $\frac{\partial F}{\partial x} = x \Rightarrow F = \frac{x^2}{2} + f_1(y, z)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = y \Rightarrow F = \frac{y^2}{2} + f_2(x, z)$, $\frac{\partial F}{\partial z} = z \Rightarrow F = \frac{z^2}{2} + f_3(x, y)$, kde funkce f mají v případě parciálních derivací stejný význam jako integrační konstanty v případě klasických derivací (jejich derivace je nulová). Porovnáním tří výsledků pro F lze zjistit výsledek ve tvaru $F = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} + K \equiv \frac{r^2}{2} + K$, kde K je konstanta a $\vec{r}^2 \equiv r^2$.

Př. 1.5.

Zadání: Spočítejte divergenci a rotaci vektorového pole: $\vec{V} = \frac{\vec{r}}{r^3} = \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right)$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Řešení: $\frac{\partial V_x}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}$, $\frac{\partial V_x}{\partial y} = -\frac{3xy}{r^5}$, $\frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{3xz}{r^5}$, $\frac{\partial V_y}{\partial x} = -\frac{3xy}{r^5}$, $\frac{\partial V_y}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}$, $\frac{\partial V_y}{\partial z} = -\frac{3yz}{r^5}$, $\frac{\partial V_z}{\partial x} = -\frac{3xz}{r^5}$, $\frac{\partial V_z}{\partial y} = -\frac{3yz}{r^5}$, $\frac{\partial V_z}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}$. Dosadíme-li do vztahu (3), obdržíme $\vec{\nabla} \times \vec{V} = -\left(\frac{3yz}{r^5} - \frac{3yz}{r^5}, \frac{3xz}{r^5} - \frac{3xz}{r^5}, \frac{3xy}{r^5} - \frac{3xy}{r^5}\right) = \vec{0}$. Výsledek by byl zjevný, kdybychom si toto vektorové pole nakreslili. Zdá se, že toto vektorové pole bude divergentní. Provedeme-li operaci divergence dle vztahu (1), obdržíme: $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{3}{r^3} - 3\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^5} = 0$. V tomto případě divergence vektorového pole \vec{V} vyšla nulová.

Komentář: Toto řešení si nyní správně interpretujeme. V elektrostatice se divergence vektorového pole používá k vyjádření vztahu mezi vektorem elektrické intenzity a rozložením náboje $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = K\rho$, kde K představuje konstantu úměrnosti a ρ značí hustotu náboje. Pokud známe vektorové pole \vec{E} v každém bodě, pak známe i rozložení elektrického náboje. Vnímavý student výše uvedené pole \vec{V} jistě rozpozná. Až na konstantu se shoduje s **coulombovským** polem v okolí nabitého bodu. Zdroj takového pole je lokalizován do bodu. Výše uvedené řešení je neúplné, nevyjadřuje totiž situaci v bodě nula, kde vektorové pole roste do nekonečna, vzniká tzv. **singularita**. V tomto konkrétním případě lze říci, že hustota náboje vychází všude nulová, kromě počátku souřadnicové soustavy, kde je naopak nekonečná.

K matematickému popisu takové hustoty se používá tzv. **delta funkce** $\delta(x)$, jež se rovná nule pro každé x kromě $x = 0$, kde se rovná nekonečnu. Pro tuto funkci (ve skutečnosti to není funkce, ale distribuce) platí rovnice $\int \delta(x) dx = 1$ pro případ, kdy integrační interval určitého integrálu obsahuje nulu, a $\int \delta(x) dx = 0$ v případě, že nulu neobsahuje. Integrál delta funkce vynásobený jinou funkcí se rovná $\int \delta(x) f(x) dx = f(0)$. I zde platí důležitá podmínka, totiž že interval určitého integrálu obsahuje nulu. Tento vztah lze zobecnit: $\int \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0)$.

Vraťme se nyní ke zmiňované hustotě, která vychází všude nulová kromě jednoho bodu, kde se rovná nekonečnu. Výše uvedená delta funkce je funkcí pouze jedné proměnné. Hustota (objemová hustota) závisí na třech souřadnicích. Hustotu lokalizovanou v bodě tak lze popsat pomocí trojrozměrné delta funkce $\delta(x)\delta(y)\delta(z) = \delta(x, y, z) \equiv \delta(\vec{r})$. Řešení příkladu 1.5 zní $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 4\pi\delta(\vec{r})$. Pro objasnění konstanty 4π potřebujeme další výpočty (viz příklad 2.3).

Př. 1.6.

Zadání: Spočítejte gradient funkce: $F = \frac{1}{r}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Řešení: $\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{1}{r^2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = -\frac{x}{r^3}$, obdobně pro členy $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{y}{r^3}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{z}{r^3}$. Výsledek bude: $\vec{\nabla} \cdot F = -\left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.

Komentář: Výsledek se shoduje (až na znaménko) se zadáním předešlého případu, kde jsme hledali divergenci vektorového pole $\frac{\vec{r}}{r^3}$. Kombinací obou výsledků dostaneme

$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} \equiv \Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r})$. Tento výsledek lze interpretovat i takto: pokud působením operátoru laplace na neznámou funkci obdržíme delta funkci, pak neznámá funkce může být nalezena ve tvaru $\frac{1}{r}$.

1.3 Matematické identity

Někdy může záviset na pořadí, se kterým se operace provádí. Například výrazy $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})$ a $(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{V} \equiv \Delta \vec{V}$ se neshodují. Jinými slovy tyto výrazy nejsou asociativní. Pokud závorkování chybí, uvažujeme, že operátory aplikujeme směrem zprava doleva.

Vnímavý čtenář si jistě všiml z předešlých příkladů, že kromě $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot F$ jsme zjistili i řešení $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot F = \vec{0}$, kde $F = \frac{1}{r}$. Ukážeme, že tato rovnice je splněna pro všechny funkce a nikoli pouze pro $F = \frac{1}{r}$:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot F &= \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right), \\ \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \right) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Poslední rovnost jsme mohli provést z důvodu komutativnosti parciální derivace (nezávisí na pořadí derivování).

Podobnou matematickou identitu obdržíme z

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial V_z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial V_x}{\partial y} = 0.\end{aligned}$$

Rovnice

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot F = \vec{0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{V} = 0. \quad (5)$$

jsou **matematickými identitami** a jsou splněny pro všechna F a \vec{V} .

Př. 1.7.

Zadání: Dokažte rovnost $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \Delta \vec{V}$.

Řešení: Levá strana rovnice je:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{V} &= \vec{\nabla} \times \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}, \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}, \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y}, \frac{\partial V_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} \right).\end{aligned}$$

Pro pravou stranu platí:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right),$$

$$\Delta \vec{V} = \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right).$$

Odečtením obou uvedených členů pravé strany rovnice obdržíme výraz, ve který jsme rozvinuli stranu levou.

1.4 Integrál po křivce

Křivkových integrálů existuje více druhů. V této části kapitoly si ukážeme chování jednoho z nich, **křivkového integrálu druhého druhu**, který budeme v těchto skriptech používat. Po křivce budeme integrovat vektorové pole \vec{V} . Pokud je integrační křivka c otevřená, použijeme označení pro integrál $\int_c \vec{V} \cdot d\vec{r}$, pokud křivku c uzavřeme do smyčky, integrál označíme $\oint_c \vec{V} \cdot d\vec{r}$ (v dalším textu pro stručnost nebudeme vždy zapisovat označení pro cestu křivky c). Vidíme, že výraz $\vec{V} \cdot d\vec{r}$ vyjadřuje skalární součin vektorového pole a elementu polohového vektoru (dx, dy, dz).

Obecně výsledek integrálu závisí na integrační cestě, proto musíme zvolit křivku, podél které integrujeme. Jako souřadnice na křivce slouží parametr τ . Původní souřadnice se stanou funkcemi tohoto parametru ($x(\tau), y(\tau), z(\tau)$). Integrál lze zapsat jako

$$\int \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau \equiv \int \left(V_x \frac{\partial x}{\partial \tau} + V_y \frac{\partial y}{\partial \tau} + V_z \frac{\partial z}{\partial \tau} \right) d\tau.$$

Pole, pro které výsledek integrálu nezávisí na zvolené křivce se nazývá **konzervativní** (kupříkladu gravitační či elektrostatické).

Pohybujeme se z bodu A do bodu B po dvou různých křivkách c_1 a c_2 . Výsledkem integrálu v případě konzervativního pole je číslo - kupříkladu I , které vychází pro oba integrály stejně. Pokud u druhého z integrálů zaměníme hodnoty intervalu, bude průběh integrálu z bodu B do A a integrál vyjde $-I$. Sečtením obou integrálů obdržíme

$$\int_{c_1 A}^B \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau + \int_{c_2 B}^A \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau = \oint_{c_1 \circ c_2} \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau = I - I = 0.$$

Pohybujeme-li se v konzervativním poli po uzavřené křivce je výsledek integrálu vždy nulový.

Lze ukázat, že pole, pro které výsledek integrálu nezávisí na integrační cestě, musí splňovat rovnici $\vec{\nabla} \times \vec{V} = \vec{0}$. Tento důkaz je však komplikovanější a k vyřešení bychom potřebovali složitější matematiku.

Nekonzervativní pole poznáme tak, že nesplňuje výše uvedené rovnosti $\vec{\nabla} \times \vec{V} \neq \vec{0}$ a $\oint_c \vec{V} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

Př. 1.8.

Zadání: Ukažte pro různé tři křivky, že křivkový integrál s počátkem křivky $\vec{r} = (0, 0, 0)$ a koncem křivky $\vec{r} = (1, 1, 0)$ z vektorového pole $\vec{V} = (x, y, 0)$ nezávisí na integrační křivce.

Řešení: Zvolme jednoduše první cestu podél os

$$I = \int_c \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 x dx + \int_0^1 y dy = \frac{1}{2}(1+1) = 1.$$

Pro první cestu ani nebylo potřeba používat parametrizaci. Pro druhou cestu zvolíme parametrizaci lineární křivky

$$x = \tau, y = \tau, z = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \tau} = 1, \frac{\partial y}{\partial \tau} = 1, \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow \vec{V} = (\tau, \tau, 0), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 1, 0).$$

Křivka bude na intervalu $\tau \in (0; 1)$

$$I = \int_c \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_c \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau = \int_0^1 (\tau + \tau) d\tau = \int_0^1 2\tau d\tau = 1.$$

Třetí křivku zvolíme jako parabolu

$$x = \tau, y = \tau^2, z = 0 \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial \tau} = 1, \frac{\partial y}{\partial \tau} = 2\tau, \frac{\partial z}{\partial \tau} = 0, \Rightarrow \vec{V} = (\tau, \tau^2, 0), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 2\tau, 0).$$

Křivka bude opět na intervalu $\tau \in (0; 1)$

$$I = \int_c \vec{V} \cdot d\vec{r} = \int_c \vec{V} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} d\tau = \int_0^1 (\tau + 2\tau^3) d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} + \frac{\tau^4}{2} \right]_0^1 = 1.$$

Př. 1.9.

Zadání: Vypočítejte křivkové integrály přes stejné křivky a stejné počáteční a koncové body jako v minulém případě z vektorového pole $\vec{V} = (y, -x, 0)$.

Řešení: První cestu podél os si rozdělíme na dvě části – a) podél osy x a b) podél osy y . Zde však na rozdíl od předešlého příkladu záleží na tom, podél které osy integrujeme dříve. Zvolme

$$a) x = \tau, y = 0 \Rightarrow x_{,\tau} = 1, y_{,\tau} = 0 \Rightarrow \vec{V} = (0, -\tau, 0), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 0, 0),$$

$$b) x = 1, y = \tau \Rightarrow x_{,\tau} = 0, y_{,\tau} = 1 \Rightarrow \vec{V} = (\tau, -1, 0), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (0, 1, 0).$$

Výsledný integrál bude

$$\int_{a)0}^1 0 d\tau + \int_{b)0}^1 -1 d\tau = -\tau \Big|_0^1 = -1.$$

V případě, že nejdříve zvolíme cestu podél osy y a) a poté osy x b), výsledek se změní na

$$a) x = 0, y = \tau \Rightarrow x_{,\tau} = 0, y_{,\tau} = 1 \Rightarrow \vec{V} = (\tau, 0, 0), \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (0, 1, 0),$$

$$b) \ x = \tau, \ y = 1 \Rightarrow x_{,\tau} = 1, \ y_{,\tau} = 0 \Rightarrow \vec{V} = (1, -\tau, 0), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 0, 0),$$

$$\int_{a)0}^1 0 d\tau + \int_{b)0}^1 1 d\tau = \tau|_0^1 = 1.$$

Pokud si za křivku vybereme přímku

$$x = \tau, \ y = \tau \Rightarrow x_{,\tau} = 1, \ y_{,\tau} = 1 \Rightarrow \vec{V} = (\tau, -\tau, 0), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 1, 0) \Rightarrow \int_0^1 0 d\tau = 0.$$

Pokud se rozhodneme pro parabolu

$$x = \tau, \ y = \tau^2 \Rightarrow x_{,\tau} = 1, \ y_{,\tau} = 2\tau \Rightarrow \vec{V} = (\tau^2, -\tau, 0), \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \tau} = (1, 2\tau, 0),$$

$$\int_0^1 -\tau^2 d\tau = -\frac{\tau^3}{3} \Big|_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

Z tohoto výsledku vidíme, že výsledná hodnota integrálu závisí na zvolené cestě.

Příklady k procvičení 1.1.

Derivujte parciálně podle všech proměnných: $f_1 = c + x + y^2 + z^3$, $f_2 = ct \sin(xyz)$, $f_3 = \frac{\cos(ct)}{r^2}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Příklady k procvičení 1.2.

Najděte divergenci a rotaci vektorové pole $\vec{V} = \omega(-y, x, 0)$.

Příklady k procvičení 1.3.

Dokažte identitu: $\vec{\nabla} \times (\vec{V} \times \vec{r}) - 2\vec{V} = \vec{0}$, kde $\vec{r} = (x, y, z)$ a \vec{V} je konstantní vektor.

Příklady k procvičení 1.4.

Dokažte identity $\vec{\nabla} \times (\vec{V} F) = F \vec{\nabla} \times \vec{V} + (\vec{\nabla} F) \times \vec{V}$, $\vec{\nabla} \cdot (\vec{V} F) = F \vec{\nabla} \cdot \vec{V} + (\vec{\nabla} F) \cdot \vec{V}$, kde \vec{V} představuje obecné trojrozměrné vektorové pole a F obecnou funkci.

Příklady k procvičení 1.5.

Vypočtěte integrál po třech různých libovolných křivkách z bodu $\vec{r} = (0, 0, 0)$ do bodu $\vec{r} = (1, 1, 1)$. Vektorové pole je $\vec{V} = (y, -x, z)$.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: str. 553-575

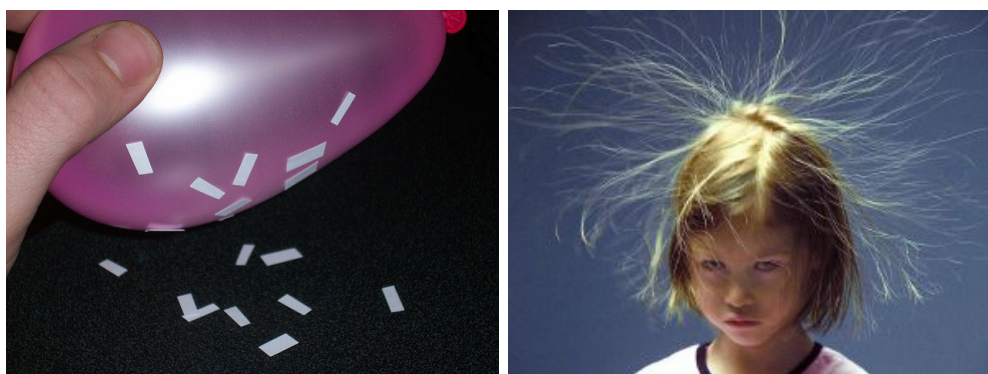
Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: str. 13-61

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: str. 60-61, 76-79, 93-103

2 Elektrostatika

2.1 Coulombův zákon

Elektrostatika studuje jevy spojené s časově neměnným elektrickým nábojem, který vyjadřuje vlastnost částic působit na sebe vzájemnou silou. Máme-li v určité vzdálenosti dvě nabitá tělesa (obsahující nenulový náboj), pak také na tato tělesa působí vzájemná elektrostatická síla. Jako příklad poslouží přitahování nabitých papírků s opačně nabitým balonkem či odpuzování nabitých vlasů (viz obrázek 4).



Obrázek 4: Působení elektrostatického pole.

Experimenty ukázaly, že pro případ dvou bodových nábojů Q velikost této síly závisí na druhé mocnině převrácené hodnoty vzdálenosti středů r těchto nábojů. Síla dále závisí na velikosti jednotlivých nábojů. Pro případ shodných znamének nábojů je síla odpuzivá, pro případ opačných znamének nábojů naopak přitažlivá. Tento zákon se nazývá **Coulombův zákon** a znáte jej ve tvaru:

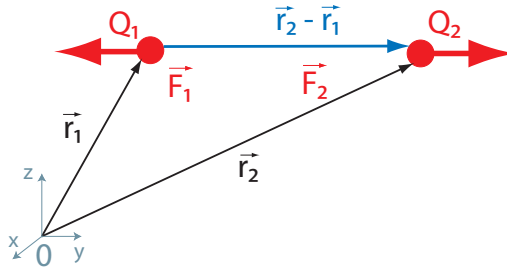
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|Q_1||Q_2|}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2},$$

kde $4\pi\epsilon_0$ je konstanta určující velikost interakce, \vec{r}_1 označuje polohový vektor prvního náboje a \vec{r}_2 polohový vektor druhého náboje. Často se rozdíl těchto vektorů označuje jako $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Vzdálenost nábojů označuje velikost rozdílu těchto vektorů $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$.

Síla je vektorová veličina, výraz lze upravit do vektorového tvaru. Vektory síly působící na částice s nábojem Q_1 a Q_2 můžeme napsat jako

$$\vec{F}_1 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}, \quad \vec{F}_2 = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \Rightarrow \vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (6)$$

Uvažujme nyní testovací částici s malým nábojem $Q_1 = q$ a polohovým vektorem $\vec{r}_1 = \vec{r}$. Stejným způsobem upravíme $Q_2 = Q$ a $\vec{r}_2 = \vec{r}'$. Pojmeme malý náboj myslíme takový náboj, jenž je zanedbatelný vůči ostatním nábojům, které leží v jeho okolí. Na tento náboj působí síla daná vztahem (6). Můžeme uvažovat nekonečné množství nekonečně malých nábojů (s celkovým nábojem vůči okolnímu zanedbatelným) ve všech bodech prostoru. Každému bodu tak přiřadíme vektor síly a dostaneme vektorové pole. Vzhledem k tomu, že náboje testovacích částic jsou malé, i vektory síly působící na testovací částice budou malé. Jestliže vektor síly vydělíme nábojem testovacích částic, získáme novou veličinu, **vektor elektrické intenzity**



Obrázek 5: Zakreslení vektorů \vec{r}_1 , \vec{r}_2 , $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$, který popisuje vektorové elektrické pole v blízkosti nabitého tělesa. Znamější zápis tohoto vztahu vypadá takto:

$$\vec{F} = q\vec{E}.$$

Pro případ bodového náboje lze odvodit

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_1}{Q_1} = -\frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \equiv -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

tedy

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (7)$$

Připomeňme, že \vec{r}' značí polohový vektor zdroje o náboji Q a \vec{r} polohový vektor místa, kde chceme znát vektor elektrické intenzity. Často se zdrojový náboj vloží do počátku souřadnicové soustavy – pak $\vec{r}' = (0, 0, 0)$:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}.$$

Výpočtem velikosti těchto vektorů získáme dobře známé vztahy ze střední školy

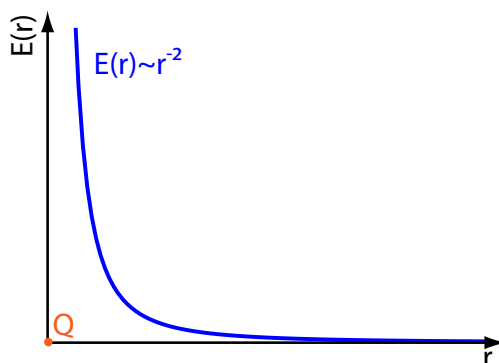
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Př. 2.1.

Zadání: Uvažujte dva stejné bodové náboje o shodné hmotnosti a shodném náboji. Náboje jsou od sebe vzdáleny r . Jaký musí být poměr mezi nábojem a hmotností, aby se elektrostatická síla vykompenzovala s gravitační? Nepředpokládáme, že by v okolí nábojů byly ještě další zdroje elektrostatického či gravitačního pole.

Řešení: Pro výpočet použijeme velikost vektoru síly v Coulombově zákonu (6) a Newtonově gravitačním zákonu $F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$, kde $m_1 = m_2 = m$ a $Q_1 = Q_2 = Q$. Uvažujeme-li, že velikosti sil se rovnají, pak lze napsat

$$G \frac{m^2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} \Rightarrow \frac{Q}{m} = \sqrt{4\pi\epsilon_0 G}.$$



Obrázek 6: Velikost vektoru elektrické intenzity v blízkosti bodového náboje.

Komentář: Tento podíl je velmi malé číslo. Elektrostatická interakce se projevuje dominantněji než interakce gravitační. Sílu gravitační můžeme pozorovat pouze díky tomu, že ve velkých měřítkách se součet kladných a záporných nábojů blíží nule, a tak i výsledná elektrostatická síla je blízká nule. I když Coulombův zákon a Newtonův gravitační zákon jsou si velice podobné, svou podstatou se naprosto liší.

2.2 Princip superpozice

V elektromagnetismu platí jeden velmi důležitý princip. Nazývá se **princip superpozice** a vychází z toho, že diferenciální rovnice popisující vztah mezi zdrojem pole a polem samotným jsou lineární. Tento princip lze vyjádřit jednoduše tak, že pokud jeden zdroj vytváří vektorové pole \vec{A}_1 a druhý \vec{A}_2 , pak výsledné pole okolo obou zdrojů je dáno součtem obou polí $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Princip superpozice ve fyzice není samozřejmý (vezměme si například sčítání rychlostí relativisticky se pohybujících těles). Pro vektor elektrické intenzity princip superpozice platí. Pro případ mnoha nábojů Q_i s polohovými vektory \vec{r}_i' lze **celkovou elektrickou intenzitu** v bodě \vec{r} zjistit ve tvaru

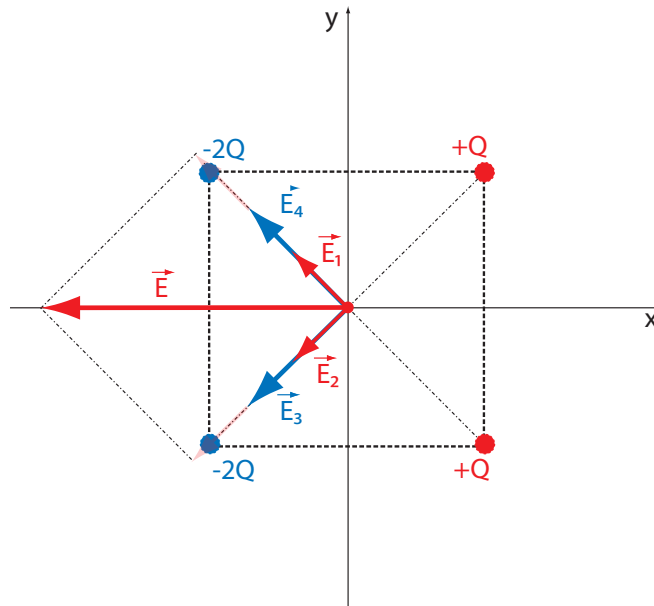
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i (\vec{r} - \vec{r}_i')}{|\vec{r} - \vec{r}_i'|^3}. \quad (8)$$

Př. 2.2.

Zadání: Uvažujme čtverec o délce stran $2a$, v jehož rozích jsou uloženy náboje. Uvažujme, že střed čtverce leží v počátku souřadnicové soustavy, jež je popsána osami x a y . Náboje v rozích se rovnají: $Q_1 = Q$ v bodě $(x, y) = (a, -a)$, $Q_2 = Q$ v bodě $(x, y) = (a, a)$, $Q_3 = -2Q$ v bodě $(x, y) = (-a, -a)$, $Q_4 = -2Q$ v bodě $(x, y) = (-a, a)$ (viz obrázek 7). Najděte vektor elektrické intenzity uprostřed čtverce. Určete jeho velikost.

Řešení: Studujeme-li elektrickou intenzitu v počátku souřadnicové soustavy, lze uvažovat $\vec{r} = \vec{0}$. Podle vztahu (8) můžeme napsat

$$\vec{E}_1 = -\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1'}{|\vec{r}_1'|^3} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(a, -a)}{(a^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{(1, -1)}{2^{3/2}}.$$



Obrázek 7: Intenzita v blízkosti čtyř nábojů.

Stejným způsobem zjistíme i elektrické intenzity od zbylých zdrojů

$$\vec{E}_2 = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{(1, 1)}{2^{3/2}}, \vec{E}_3 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{(-1, -1)}{2^{3/2}}, \vec{E}_4 = \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{(-1, 1)}{2^{3/2}}.$$

Princip superpozice říká, že výsledná intenzita je dána součtem jednotlivých elektrických intenzit

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{2^{3/2}} [(-2, -2) + (-2, 2) - (1, -1) - (1, 1)] = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{(-3, 0)}{\sqrt{2}}.$$

Velikost vektoru elektrické intenzity je rovna

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Komentář: Vektor elektrické intenzity v počátku souřadnicové soustavy míří do záporného směru osy x . Tento závěr lze odhadnout na první pohled, uvážíte-li, že kladné náboje leží na poloze kladného x a záporné náboje na poloze záporného x . Naopak podél osy y je zdroj rozložen symetricky a složky se tudíž odečtou.

2.3 Elektrická intenzita obecného zdroje

Uvažujme-li systém malých spojitě rozložených nábojů dQ , z nichž každý generuje malé elektrické pole $d\vec{E}$, pak lze intenzitu od jednoho z malých nábojů zapsat ve tvaru

$$d\vec{E} = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Stejně jako v předešlém případě \vec{r}' označuje polohový vektor náboje dQ a \vec{r} značí polohový vektor místa, kde chceme znát vektor elektrické intenzity. Díky principu superpozice lze najít celkovou výslednou elektrickou intenzitu jako součet jednotlivých intenzit. V případě nekonečného množství na sebe nalepených nekonečně malých částí lze od součtu ve vztahu (8) přejít k integrálu

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (9)$$

Uvažujme nyní tři typy rozložení náboje:

- **objemové:** náboj se rozkládá v celém objemu, platí $dQ = \rho(\vec{r}') dV'$.
- **plošné:** náboj pokrývá plochu, platí $dQ = \sigma(\vec{r}') dS'$.
- **lineární:** náboj je rozložen na křivce, platí $dQ = \tau(\vec{r}') dl'$.

Je důležité si uvědomit, že hustoty (objemová ρ , plošná σ , lineární τ) závisí na souřadnicích x', y', z' . Dané elementy dV', dS', dl' tyto souřadnice obsahují. Po zintegrování je elektrická intenzita funkcí pouze souřadnic x, y, z , polohy bodu, kde intenzitu studujeme.

Př. 2.3.

Zadání: Vypočítejte vektor elektrické intenzity ve vzdálenosti r od bodového náboje.

Řešení: Je-li zdroj pole bodový, lze hustotu zapsat jako delta-funkci. Uvažujeme-li bodový náboj ležící v počátku souřadnicové soustavy, pak lze hustotu uvažovat ve tvaru $\rho = \delta(\vec{r}') Q = \delta(x') \delta(y') \delta(z') Q$. Jak jsme uvedli, pro integrál z funkce vynásobený delta-funkcí platí $\int f(x) \delta(x) dx = f(0)$. Celková elektrická intenzita je

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \delta(x') \delta(y') \delta(z') dx' dy' dz'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}.$$

V případě posunutí bodového náboje z počátku souřadnicové soustavy do obecného bodu obdržíme opět vztah (7).

Komentář: Působíme-li divergencí na získaný vektor elektrické intenzity, obdržíme opět delta-funkci vynásobenou konstantou (viz komentář příkladu 1.5)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \delta(\vec{r}) = \frac{Q}{\epsilon_0} \delta(\vec{r}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Odtud vidíme význam konstanty 4π v divergenci $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ v příkladu 1.5.

Divergencí lze obdobným způsobem působit i na rovnici (9)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \vec{\nabla} \cdot \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int 4\pi \delta(\vec{r} - \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}.$$

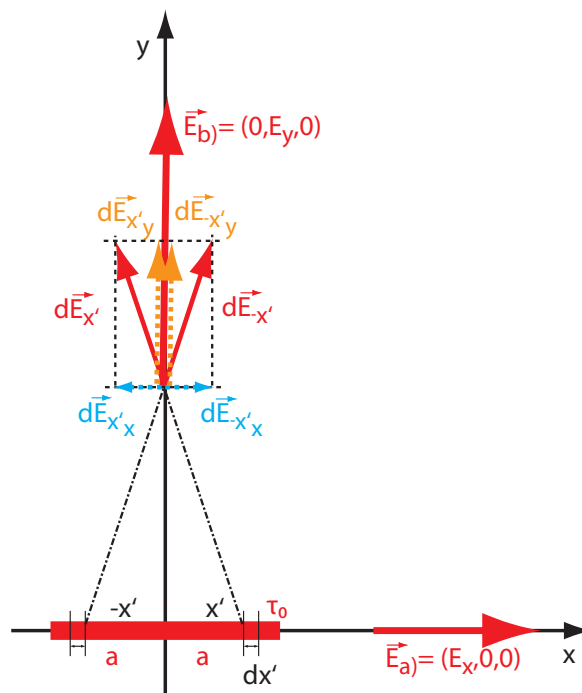
Pomocí rovnice (9) můžeme vypočítat elektrickou intenzitu ze zdroje popsaného hustotou náboje ρ . Rovnice

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (10)$$

popisuje cestu opačnou, zde známe intenzitu a zjišťujeme hustou. Rovnice (9) a (10) jsou si ekvivalentní. Rovnice (10) je první z Maxwellových rovnic a můžeme ji použít pro jakýkoli elektrostatický zdroj popsaný hustotou ρ . Tuto rovnici nazýváme **Gaussův zákon** v diferenciálním tvaru.

Př. 2.4.

Zadání: Uvažujme homogenně nabitou úsečku o délce $2a$ ležící na ose x . Střed úsečky leží v počátku souřadnicové soustavy. Vypočtěte elektrickou intenzitu mimo úsečku a) na ose x b) na ose y (viz obrázek 8).



Obrázek 8: Intenzita v blízkosti nabitě tyče.

Řešení: Element náboje rozložený na ose x zapíšeme ve tvaru $dQ = \tau dx'$, kde $\tau = \tau_0$ pro $x' \in (-a; a)$ a $\tau = 0$ pro $x' \in (-\infty; -a) \cup (a; \infty)$. Integrál pro výpočet elektrické intenzity pak lze zapsat jako součet tří integrálů s různými mezemi, z nichž jediný nenulový bude ten s mezemi $x' \in (-a; a)$.

Polohový vektor zdroje nacházejícího se na ose x označíme $\vec{r}' = (x', 0, 0)$.

a) V případě, že studujeme elektrickou intenzitu na ose x , lze napsat polohový vektor místa, kde studujeme intenzitu ve tvaru $\vec{r} = (x, 0, 0)$. Je zřejmé, že je-li zdroj rozložený na ose x , pak intenzita studovaná na ose x bude opět mířit ve směru osy x a zjevně $E_y = 0$ a $E_z = 0$. Uvažujme, že bod, kde studujeme elektrickou intenzitu, leží na kladné části osy x , tedy $x > x'$. Nenulová složka elektrické intenzity vyjde:

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{x - x'}{(x - x')^3} \tau_0 dx' = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{dx'}{(x - x')^2} = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x - x')} \Big|_{-a}^a =$$

$$= \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)} \right] = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{x^2 - a^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^2 - a^2}.$$

Pro $x \gg a$ výraz přejde do Coulombova vztahu, kdy velikost vektoru elektrické intenzity závisí na převrácené hodnotě druhé mocniny vzdálenosti x . Pro $x = a + \varepsilon$, kde ε je malé vůči a (x se blíží k a), je příspěvek od $\frac{1}{(x-a)} = \frac{1}{\varepsilon}$ mnohem větší jako $\frac{1}{(x+a)} = \frac{1}{(\varepsilon + 2a)}$, proto se elektrická intenzita v tomto bodě přibližně rovná $E_x \doteq \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(x-a)} = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\varepsilon}$.

b) Pro případ studia intenzity na ose y lze polohový vektor zapsat jako $\vec{r} = (0, y, 0)$ (zdroj bude opět $(x', 0, 0)$). Vzhledem k tomu, že z pohledu ze směru osy y je příklad levo-pravě symetrický, pro složky elektrické intenzity na ose y platí $E_x = 0$ a $E_z = 0$. Nenulovou složku elektrické intenzity druhého zadání vypočteme takto:

$$\begin{aligned} E_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-a}^a \frac{y}{(x'^2 + y^2)^{3/2}} \tau_0 dx' = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{y\sqrt{x'^2 + y^2}} \Big|_{-a}^a = \\ &= \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} - \frac{-a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} \right] = \frac{\tau_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{y\sqrt{a^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Pro velké vzdálenosti od nabitě úsečky $y \gg a$ přejde výraz opět do Coulombova výrazu. Snadno si představíme, že v obou případech - jak a), tak b), se bude jevit úsečka ve velkých vzdálenostech jako bod. Pro $y \ll a$ bude intenzita rovna $E_y = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 ya}$. Stejný výsledek obdržíme, jestliže studujeme elektrickou intenzitu v blízkosti nekonečně dlouhé nabitě přímky. V tomto případě nezávisí intenzita na převrácené druhé mocnině vzdálenosti, ale na mocnině první.

Na základě experimentů bylo objeveno, že Coulombův zákon platí jak pro sférické zdroje, tak pro bodové zdroje. Tento fakt není bez hlubší úvahy samozřejmý. Můžeme jej však jednoduše dokázat.

Př. 2.5.

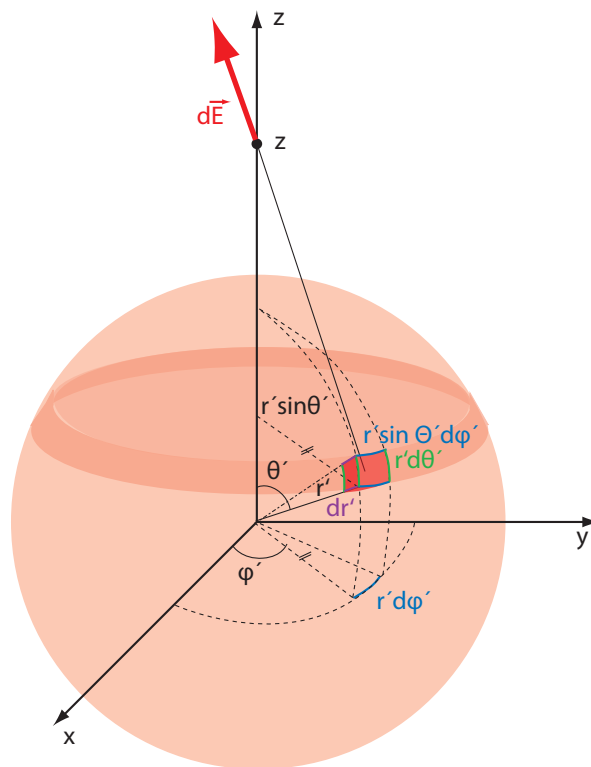
Zadání: Vypočítejte vektor elektrické intenzity ve vzdálenosti r od středu homogenně nabitě koule (viz obrázek 9). Uvažujte $|\vec{r}'| > R$.

Řešení: Tento příklad lze vyřešit prostým dosazením do rovnice (9). Výpočty v obecném případě však budou relativně komplikované. Pro zjednodušení uvažujme, že střed koule leží v počátku souřadnicové soustavy a bod, ve kterém chceme intenzitu studovat, leží na ose z . (V případě, kdy se chceme zabývat jiným bodem než na ose z , celou soustavu můžeme natočit díky kulové symetrii.) Pro každou část koule s nenulovým x a y existuje stejná část koule ležící v poloze se zápornými hodnotami x a y . Díky tomu jsou složky E_x a E_y pro pozorovatele na ose z nulové (protilehlé příspěvky se díky principu superpozice vyruší). Jedinou nenulovou složkou zůstane E_z . Dosazením obdržíme

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-x', -y', z - z') \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'|^2 = x'^2 + y'^2 + (z - z')^2 = r'^2 - 2zz' + z^2.$$

z -ová složka vektoru elektrické intenzity bude rovna

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(z - z') dQ}{(r'^2 - 2zz' + z^2)^{3/2}}.$$



Obrázek 9: Intenzita v blízkosti nabité koule.

Uvažujeme-li homogenně nabitou kouli, lze element dQ zapsat jako $dQ = \rho dV'$, kde ρ je funkcí x' , y' , a z' . Pro danou symetrii je výhodné používat sférické souřadnice. Hustota ρ tak závisí pouze na radiální souřadnici r' . V případě homogenně nabité koule pro $r' < R$ zůstává hustota konstantní $\rho = \rho_0$, pro $r' > R$ je hustota nulová, $\rho = 0$. Určitý integrál z nulové funkce se zase rovná nule. Integrál přes celou oblast lze rozdělit na dvě části v závislosti na tvaru hustoty $\int = \int_{r' > R} + \int_{r' < R} = \int_{r' < R}$.

V případě kartézských souřadnic (bez zahrnutí oboru s nulovou hustotou) uvažujeme integrační interval určitého integrálu ve tvaru $x' \in (-\infty; \infty)$, $y' \in (-\infty; \infty)$, $z' \in (-\infty; \infty)$. Přejdem na sférické souřadnice a omezením integrálu na $r' < R$ intervaly integrálu přejdou do tvaru $r' \in (0; R)$, $\phi' \in (0; 2\pi)$, $\theta' \in (0; \pi)$.

Při přechodu od kartézských souřadnic ke sférickým potřebujeme transformovat element $dV' = dx'dy'dz'$. K této transformaci se používá tzv. **Jakobián**. Například přechodem od souřadnic x, y, z na souřadnice a, b, c Jakobián nabývá tvaru absolutní hodnoty determinantu matice:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Integrál je v nových souřadnicích možno zapsat

$$\int f(\vec{r}') dV = \int f(a, b, c) |J| da db dc.$$

Přechod z kartézských souřadnic do sférických lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} x' &= r' \cos(\phi') \sin(\theta'), \\ y' &= r' \sin(\phi') \sin(\theta'), \\ z' &= r' \cos(\theta'), \end{aligned}$$

kde Jakobián nabude tvaru $|J| = r'^2 \sin(\theta')$.

z -ovou složku elektrické intenzity lze s těmito úpravami zapsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} E_z &= \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{(z - r' \cos(\theta')) r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'}{(r'^2 - 2zr' \cos(\theta') + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^R \frac{(z - r' \cos(\theta')) r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta'}{(r'^2 - 2zr' \cos(\theta') + z^2)^{3/2}} = \\ &|r'^2 - 2zr' \cos(\theta') + z^2 = \alpha, \quad 2zr' \sin(\theta') d\theta' = d\alpha| \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{(r'-z)^2}^{(r'+z)^2} \int_0^R \frac{(z^2 - r'^2 + \alpha) r' dr' d\alpha}{4z^2\alpha^{3/2}} = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \left[\frac{-2(z^2 - r'^2)}{4z^2\alpha^{1/2}} + \frac{2\alpha^{1/2}}{4z^2} \right] r' dr' \Bigg|_{\alpha=(r'-z)^2}^{\alpha=(r'+z)^2} = \\ &= -\frac{\rho_0}{4z^2\epsilon_0} \int_0^R \left[\frac{(z^2 - r'^2)}{\alpha^{1/2}} - (\alpha^{1/2}) \right] r' dr' \Bigg|_{\alpha=(r'-z)^2}^{\alpha=(r'+z)^2} = \end{aligned}$$

V tuto chvíli je rozumné se pozastavit a zamyslet nad dosazením do mezí α . Dosadíme-li meze, získáme odmocninu z mocniny $\sqrt{(r' \pm z)^2} = |r' \pm z|$. Musíme rozlišovat, zdali objekt v absolutní hodnotě je kladný, či záporný. Veličiny r' i z jsou dle zadání vždy kladné, tedy i jejich součet $r' + z$ vyjde jako kladné číslo. V případě rozdílu je třeba uvažovat, jestli vyšetřujeme intenzitu uvnitř, či vně koule. Vně platí, že $z > r'$, protože r' dosahuje maximálně hodnoty poloměru koule $R < z$. Zabýváme-li se intenzitou uvnitř koule, integrál rozdělíme na dvě části $z > r'$ a $z < r'$ (viz komentář). Pro studium intenzity vně koule platí:

$$\begin{aligned} &= -\frac{\rho_0}{4z^2\epsilon_0} \int_0^R \left[\frac{(z^2 - r'^2)}{r' + z} - (r' + z) - \frac{(z^2 - r'^2)}{z - r'} + (z - r') \right] r' dr' = \\ &= -\frac{\rho_0}{4z^2\epsilon_0} \int_0^R [-4r'] r' dr' = \frac{\rho_0}{4z^2\epsilon_0} \frac{4}{3} R^3 = \frac{Q}{4\pi z^2 \epsilon_0}, \end{aligned}$$

kde náboj Q koule můžeme vyjádřit $Q = \rho_0 V = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3$.

Komentář: Z výsledku vidíme, že pro sférické zdroje elektrického pole platí Coulombův zákon stejně jako pro zdroje bodové. Výsledek lze při posunutí počátku a posunutí bodu, ve kterém měříme intenzitu \vec{E} , zapsat ve tvaru (7). Výpočtem se dá dokázat, že kdybychom se zabývali intenzitou uvnitř koule $R > z$, příspěvky nacházející se nad z by ve výsledku byly nulové. Do elektrostatického pole by pak přispíval pouze zdroj nacházející se pod z .

Ve výše uvedeném příkladu bylo potřeba vypočítat přechod v elementu objemového integrálu $dV \equiv dx dy dz$ z kartézských souřadnic k novým souřadnicím a, b, c popsanych pomocí závislosti $\vec{r}(a, b, c)$. Tohoto přechodu se docílilo použitím Jakobiánu: $dx dy dz = |J| da db dc$.

Podobné přechody je potřeba použít i v případě přechodů k novým souřadnicím v případě dl a dS . Níže uvedené vztahy odvozovat nebudeme.

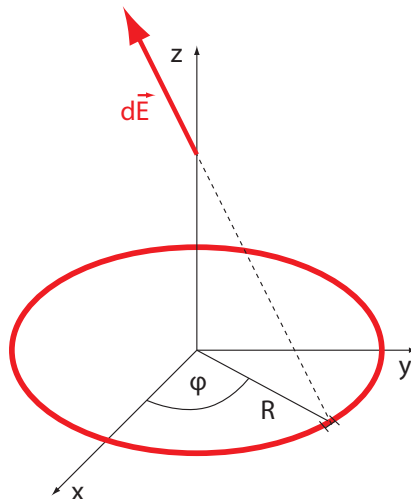
Křivku v prostoru lze parametrizovat pomocí jednoho parametru. V případě délkového elementu dl je přechod od souřadnic $\vec{r}(a)$ k parametru a proveden pomocí

$$d\vec{r} = (dx, dy, dz) \Rightarrow dl = |d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a}\right)^2} da.$$

Pro popis plochy jsou již potřeba parametry dva $\vec{r}(a, b)$. V případě plošného elementu je přechod dán

$$d\vec{S} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial b} da db \Rightarrow dS = |d\vec{S}| = \left\{ \left[\left(\frac{\partial x}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial a} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial a} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial b} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial b} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial b} \right)^2 \right] - \left[\frac{\partial x}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial y}{\partial a} \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial z}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial b} \right]^2 \right\}^{1/2} da db.$$

Je-li plocha S uzavřená, pořadí souřadnic a a b se volí tak, aby vektor $d\vec{S}$ směřoval ven z uzavřené plochy.



Obrázek 10: Elektrická intenzita v blízkosti nabitého prstence.

Příklady k procvičení 2.1.

Vypočtěte, jaký je poměr mezi elektrostatickou a gravitační silou působící v atomu vodíku mezi protonem a elektronem.

Příklady k procvičení 2.2.

Vypočtěte elektrickou intenzitu na ose nabitého tenkého prstence o náboji Q a délkové hustotě náboje τ a poloměru R (viz obrázek 10).

Příklady k procvičení 2.3.

Uvažujte homogenně nabitý (plošná hustota náboje je σ) tenký kruh o poloměru R ležící v rovině $z = 0$. Střed kruhu se nachází v bodě $\vec{r} = (0, 0, 0)$. Určete vektor elektrické intenzity na ose kruhu ve vzdálenosti z od středu kruhu.

Příklady k procvičení 2.4.

Uvažujte tlustou sférickou slupku o vnitřním a vnějším poloměru R_1 a R_2 . Slupka je homogenně nabitá s hustotou náboje ρ . Vypočtěte vektor elektrické intenzity v libovolném bodě uvnitř slupky $r < R_1$.

Příklady k procvičení 2.5.

Uvažujte nabitý čtverec o délkové hustotě τ a délce hran $2a$. Jaká je elektrická intenzita na ose čtverce? Uvažujte, že střed čtverce leží v bodě $\vec{r} = (0, 0, 0)$ a rovina, ve které čtverec leží, je dána $z = 0$.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 17-27, 31-34, 43-46*
Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 63-67*
Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 21-43*
Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 22, 23*

3 Skalární potenciál

3.1 Skalární potenciál bodového zdroje

V příkladu 1.6 jsme uvedli, že výraz $\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$ se rovná minus gradient $\frac{1}{|\vec{r}|}$. Jestliže první výraz je úměrný vektoru elektrické intenzity bodového zdroje, pak druhý výraz může být úměrný jiné fyzikální veličině popisující bodový zdroj. Pokud tuto novou veličinu označíme φ , lze zapsat závislost mezi φ a \vec{E} pomocí následujícího vztahu (φ je funkce souřadnic)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi. \quad (11)$$

Z této rovnice vyjádříme novou fyzikální veličinu - **skalární potenciál**:

$$\varphi = -\int_{\vec{A}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (12)$$

kde \vec{A} značí počáteční bod (bod, kde je potenciál roven nule) a bod \vec{r} určuje koncový bod (zde chceme zjistit hodnotu potenciálu). Díky identitám víme, že platí $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$. Elektrostatická intenzita je pole konzervativní, výsledek integrálu (potenciál) nezávisí na integrační cestě (viz kapitola 1.4). Jednoduchým výpočtem odvodíme potenciál v bodě \vec{r} od bodového náboje Q umístěného v bodě \vec{r}' ve tvaru

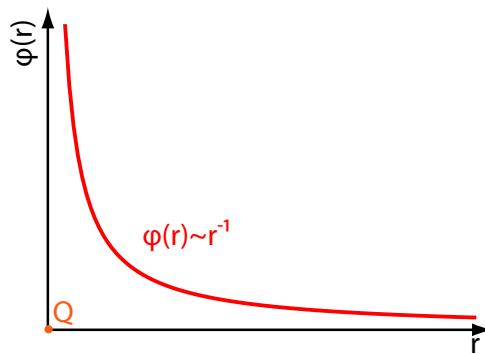
$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + K, \quad (13)$$

kde K značí konstantu odpovídající hodnotě integrálu v bodě \vec{A} . Gradient této konstanty se rovná nule. Díky zmíněné konstantě je nápadná podobnost mezi výše uvedeným integrálem a neurčitým integrálem.

Lze jednoduše dokázat, že gradientem potenciálu (13) získáme elektrickou intenzitu bodového náboje popsanou rovnicí (7). Potenciál, stejně jako potenciální energie, není definován jednoznačně. Tuto nejednoznačnost řeší zvolení konstanty K , čímž se definuje hladina nulového potenciálu. Často se například volí nulový potenciál v nekonečnu, pak $K = 0$. Obrázek 11 znázorňuje závislost potenciálu na radiální souřadnici při volbě $K = 0$ a $\vec{r}' = (0, 0, 0)$.

Potenciál lze chápat jako potenciální elektrostatickou energii vztahenou na jednotkový náboj $\varphi = \frac{E_p}{q}$ (neplést energii s velikostí elektrické intenzity).

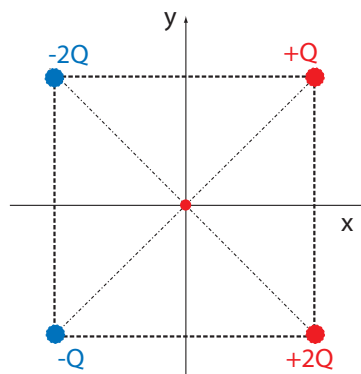
Uvažujme nyní analogii mezi elektrostatikou a mechanikou. V druhé kapitole jsme si uvedli, že vztah mezi intenzitou a silou má tvar: $\vec{F} = q\vec{E}$. Můžeme i sílu vyjádřit jako gradient nějaké skalární veličiny? Ano, touto veličinou je potenciální energie E_P : $\vec{F} = -\vec{\nabla} \cdot E_P$. Stejným způsobem lze uvažovat další veličinu analogickou k práci W : napětí $U = \frac{W}{q}$, které můžeme vyjádřit také jako rozdíl dvou potenciálů $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Pokud opustíme elektrostatiku můžeme přidat ještě jeden vztah. Množství práce za čas udává výkon $P = \frac{\partial W}{\partial t}$. Uvažujeme-li v čase konstantní napětí (například na vodiči s odporem) a proud pohybujících se nabitých částic, který udává množství prošlého náboje za čas $I = \frac{\partial q}{\partial t}$, pak výkon získáme ze vztahu $P = UI$. Rovnice spojující elektrické veličiny s mechanickými popisuje tabulka 1.



Obrázek 11: Skalární potenciál v blízkosti bodového náboje.

Př. 3.1.

Zadání: Uvažujte čtyři náboje $Q_1 = Q$, $Q_2 = 2Q$, $Q_3 = -Q$, $Q_4 = -2Q$ rozložené na čtverci tak, že v protilehlých rozích leží náboje se stejnou velikostí, ale s opačným znaménkem. Určete potenciál ve středu čtverce. Uvažujte, že potenciál v nekonečnu je roven nule (viz obrázek 12).



Obrázek 12: Potenciál v blízkosti bodových nábojů.

Řešení: Uvažujeme-li potenciál v nekonečnu roven nule, pak dle rovnice (13) pro konstantu K platí $K = 0$. Vzdálenost jednotlivých nábojů od centra čtverce lze vypočítat pomocí Pythagorovy věty $r = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Stejně jako pro náboje a elektrickou intenzitu, lze **i pro potenciál využít princip superpozice**. Celkový potenciál bude součtem potenciálů od jednotlivých zdrojů $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4$, kde

$$\varphi_1 = \frac{Q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a}, \varphi_2 = \frac{2Q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a}, \varphi_3 = \frac{-Q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a}, \varphi_4 = \frac{-2Q\sqrt{2}}{4\pi\epsilon_0 a} \Rightarrow \varphi = 0.$$

Zjevně v tomto případě potenciál nezávisí na uspořádání nábojů v rozích čtverce, na rozdíl od případu výpočtu elektrické intenzity, která je vektorem.

Mechanická veličina		Přepočet	Elektrická veličina	
Síla mezi bod. náboji	$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{ \vec{r} ^3}$	$\vec{F} = q\vec{E}$	$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{ \vec{r} ^3}$	El. int. bod. náboje
Potenciální energie	$E_P = -\int_{\vec{A}}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r}$ $\vec{F} = -\vec{\nabla} E_P$	$E_P = q\varphi$	$\varphi = -\int_{\vec{A}}^{\vec{r}} \vec{E} d\vec{r}$ $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$	El. potenciál
E_P bod. nábojů	$E_P = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ \vec{r} } + C$		$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{ \vec{r} } + C$	φ bod. náboje
Práce	$W = E_{P1} - E_{P2}$ $W = \int_{\vec{A}_1}^{\vec{A}_2} \vec{F} d\vec{r}$	$W = qU$	$U = \varphi_1 - \varphi_2$ $U = \int_{\vec{A}_1}^{\vec{A}_2} \vec{E} d\vec{r}$	Napětí
Výkon	$P = \frac{\partial W}{\partial t}$	$P = UI$	$I = \frac{\partial q}{\partial t}$	Proud

Tabulka 1: Srovnání mechanických a elektrostatických veličin

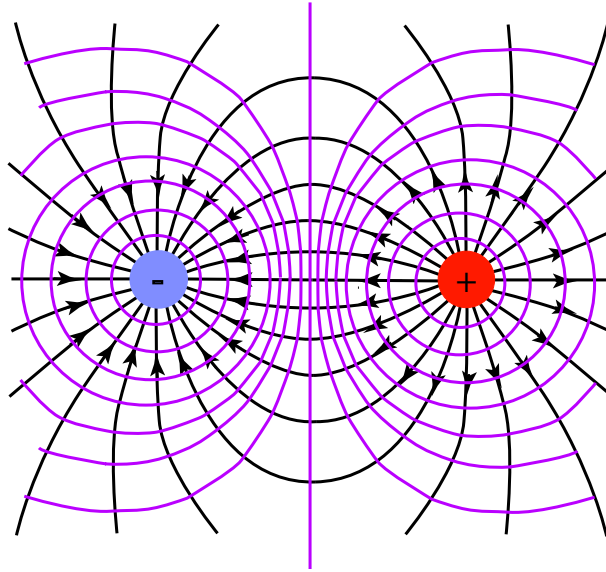
Př. 3.2.

Zadání: Uvažujte na ose x dva opačné bodové náboje $Q_1 = Q$ a $Q_2 = -Q$. Kladný se nachází v bodě $x = a$ a záporný v bodě $x = -a$. Zjistěte elektrickou intenzitu a potenciál na ose x a v rovině yz . Potenciál v nekonečnu se rovná nule. Uvažujte dále, že $|\vec{r}'| \gg a$. Potenciál v nekonečnu uvažujte jako nulový, tedy $K = 0$.

Řešení: Rozložení nábojů, jež bylo uvedeno v zadání, se nazývá elektrický dipól. Dle zadání lze zapsat polohové vektory jednotlivých nábojů jako $\vec{r}'_1 = (a, 0, 0)$ a $\vec{r}'_2 = (-a, 0, 0)$. Potenciál se rovná

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\rangle.$$

Plochy konstantního potenciálu (**ekvipotenciální plochy**) zobrazuje obrázek 13. Uvažujme vzdáleného pozorovatele měřícího elektrostatické pole. Pro dostatečně vzdáleného pozorovatele platí $|\vec{r}'| \gg a$. Pro tuto aproximaci lze první člen potenciálu dipólu rozvést pomocí Taylorovy



Obrázek 13: Řez ekvipotenciálními plochami elektrického dipólu v rovině $z = 0$ (nebo také v $y = 0$).

řady, kde uvažujeme malé a/x

$$\frac{1}{\left[x^2 \left(1 - \frac{a}{x}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \doteq \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} + \frac{xa}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Stejný rozvoj provedeme i u druhého členu

$$\frac{1}{\left[x^2 \left(1 + \frac{a}{x}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}} \doteq \frac{1}{[x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{xa}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

První členy obou rozvoju jsou si rovny. V celkovém potenciálu dipólu se tyto členy navzájem odečtou. Naproti tomu druhé členy mají znaménko opačné. Celkový potenciál dipólu pozorovaný z velké vzdálenosti je roven

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ax}{[x^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Definujme **dipólový moment** jako rozdíl polohových vektorů dvou nábojů o stejné velikosti a opačného znaménka vynásobený velikostí náboje $\vec{d} = Q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$ (v našem případě platí $\vec{d} = Q(2a, 0, 0) = (d, 0, 0)$). Potenciál elektrického dipólu lze pomocí dipólového momentu přepsat do tvaru

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}. \quad (14)$$

Lze jednoduše dokázat, že tento vztah platí i pro dipól s obecným směrem \vec{d} .

Platí-li $y = 0, z = 0$ a $x \gg a$, pak

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{(x-a)} - \frac{1}{(x+a)} \right\rangle = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2a}{x^2 - a^2} \doteq \frac{d}{4\pi\epsilon_0 x^2}.$$

Platí-li $x = 0$, pak

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{1}{[a^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} - \frac{1}{[a^2 + y^2 + z^2]^{1/2}} \right\rangle = 0.$$

V rovině mezi náboji je potenciál nulový.

V případě výpočtu elektrické intenzity lze použít dvojí postup. Buď můžeme vyjádřit elektrickou intenzitu přímo

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left\langle \frac{(x-a, y, z)}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{(x+a, y, z)}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\rangle$$

a následně provést aproximaci pro velké vzdálenosti, nebo lze zjistit elektrickou intenzitu z gradientu potenciálu vzdáleného dipólu

$$\vec{E} \doteq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{\vec{r} (\vec{d} \cdot \vec{r})}{|\vec{r}|^5} - \frac{\vec{d}}{|\vec{r}|^3} \right). \quad (15)$$

Vektor elektrické intenzity v blízkosti dipólu je zakreslen na obrázku 14 a). Na obrázku 14 b) jsou zakresleny **siločáry** elektrického pole, což jsou orientované křivky, ke kterým jsou vektory elektrické intenzity tečné.

Uvažujeme-li elektrické pole na ose x (kde platí $y = z = 0$) lze uvažovat nenulovou pouze x -ovou složku elektrické intenzity, která je rovna

$$E_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3 \frac{x(d, 0, 0) \cdot (x, y, z)}{x^5} - \frac{d}{x^3} \right) = \frac{2d}{4\pi\epsilon_0 x^3}.$$

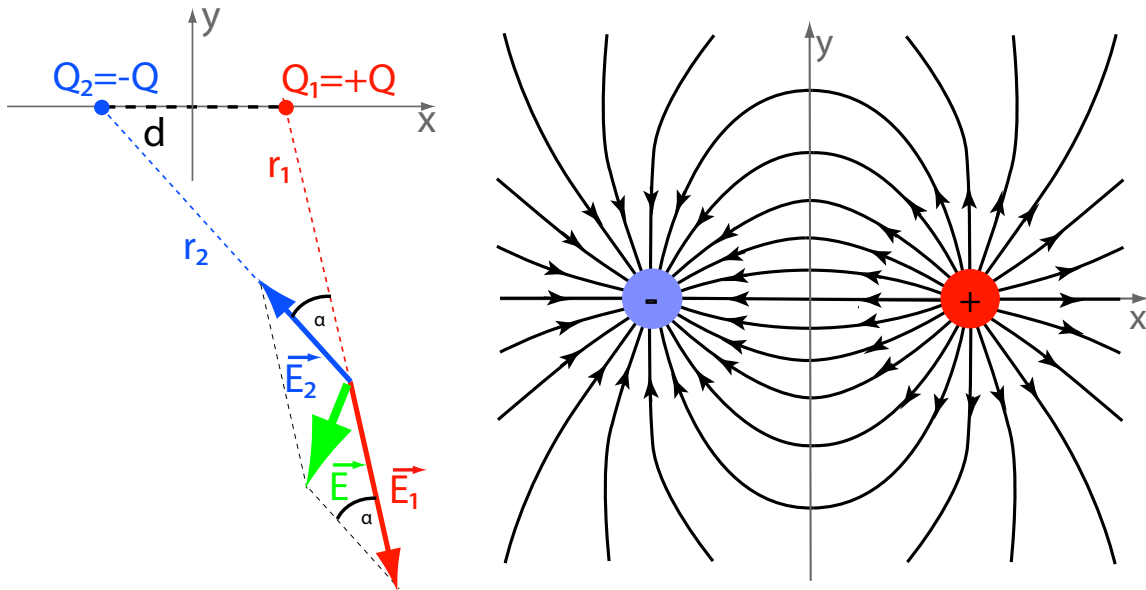
Pro elektrickou intenzitu v rovině $x = 0$ platí

$$\vec{E} = -\frac{(d, 0, 0)}{4\pi\epsilon_0 [y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Komentář: Z výpočtů vidíme, že pro velké vzdálenosti od dipólu klesá intenzita s třetí mocninou vzdálenosti. Elektrická intenzita v rovině $x = 0$ je kolmá na tuto rovinu. Proto, když se pohybujeme podél této roviny, nekonnáme práci a napětí (pohybujeme-li se v této rovině) se rovná nule. Potenciál je stejný ve všech bodech této roviny a to i v nekonečnu, kde je potenciál dle zadání nulový.

3.2 Skalární potenciál nebodového zdroje

Operátory nabla jsou lineárními operátory. Lze-li použít princip superpozice na vektor elektrické intenzity \vec{E} , pak smíme tento princip aplikovat i na veličiny s touto veličinou spojené pomocí lineárních operátorů, tedy jak na hustotu náboje ρ , tak na potenciál φ .



Obrázek 14: a) Intenzita v blízkosti elektrického dipólu. b) Siločáry elektrického dipólu v rovině $z = 0$ (nebo také v $y = 0$).

Uvažujme spojitě nabitou látku. Tuto látku sleduje pozorovatel v bodě \vec{r} . Každý kousek této látky o náboji dQ má polohový vektor \vec{r}' . Použitím rovnice (13) vyjádříme element potenciálu ve tvaru

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Díky principu superpozice lze říci, že každý z elementů přispívá do celkového potenciálu skrze součet jednotlivých elementů. Součet nekonečného množství nekonečně malých elementů provedeme za pomoci integrace. Integrací pak obdržíme finální tvar pro potenciál

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + K. \quad (16)$$

Všimněme si, že v rovnici (16) není potenciál určen jednoznačně. K potenciálu lze přičíst libovolnou konstantu K z důvodu, že i potenciál bodového zdroje není určen jednoznačně $\vec{\nabla} K = \vec{0}$.

Stejně jako v případě intenzity uvažujme tyto typy rozložení náboje:

- **Objemové:** náboj se rozkládá v celém objemu, platí $dQ = \rho(\vec{r}') dV'$.
- **Plošné:** náboj rozložený na ploše, platí $dQ = \sigma(\vec{r}') dS'$.
- **Lineární:** náboj je rozložen na křivce, platí $dQ = \tau(\vec{r}') dl'$.

Zkombinujeme-li definici potenciálu (11) a Gaussův zákon (10), obdržíme **Poissonovu rovnici** pro elektrostatické pole (označme $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \equiv \Delta$)

$$\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (17)$$

Rovnici (16) získáme řešením této diferenciální rovnice pro objemové rozložení náboje. Přechodem od řešení Poissonovy rovnice pro bodový zdroj (viz komentář příkladu 1.6) jsme našli přesné řešení takto složité diferenciální rovnice. Rovnice (16) vyjadřuje potenciál z rovnice (17), a naopak rovnice (17) je vyjádřením hustoty náboje z rovnice (16).

Př. 3.3.

Zadání: Vypočtete potenciál v poloze \vec{r} od středu homogenně nabitě koule o poloměru R . Uvažujte $|\vec{r}| > R$.

Řešení: Pro jednoduchost si počátek souřadnicové soustavy zvolíme ve středu koule. Stejně jako v případě elektrické intenzity, v blízkosti nabitě koule si natočíme souřadnicový systém tak, aby polohový vektor byl ve tvaru $\vec{r} = (0, 0, z)$, to lze provést díky sférické symetrii zadání. Uvažujeme-li objemové rozložení náboje, lze element náboje napsat ve tvaru $dQ = \rho(\vec{r}') dV'$. Stejně jako v případě výpočtu elektrické intenzity zavedeme sférické souřadnice u čárkovaných souřadnic $dV' = r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'$. Uvažujeme-li homogenně nabitou kouli, je rozložení náboje $\rho = \rho_0$ pro $r' < R$ a $\rho = 0$ pro $r' > R$. Interval integrálu rozdělíme na dvě části, z nichž integrál obsahující interval $r' \in (R; \infty)$ se rovná nule (to plyne z nulovosti hustoty v daném intervalu). Určitý integrál z nuly je opět nula. Potenciál vyjádříme vztahem

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{\rho_0 r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta' d\phi'}{(r'^2 - 2zr' \cos(\theta') + z^2)^{1/2}} + K = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^R \frac{r'^2 \sin(\theta') dr' d\theta'}{(r'^2 - 2zr' \cos(\theta') + z^2)^{1/2}} + K = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r'}{z} (r'^2 - 2zr' \cos(\theta') + z^2)^{1/2} dr' \Bigg|_0^\pi + K = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r'}{z} \left[(r'^2 + 2zr' + z^2)^{1/2} - (r'^2 - 2zr' + z^2)^{1/2} \right] dr' + K, \end{aligned}$$

zde opět uvažujeme $z > R \Rightarrow z - r' > 0 \Rightarrow |r' - z| = z - r'$. Vrátime-li se zpět k výpočtům, dostaneme:

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{r'}{z} [r' + z - (z - r')] dr' + K = \\ &= \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2r'^2}{z} dr' + K = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2r'^3}{3z} \Bigg|_0^R + K = \frac{2\pi\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2R^3}{3z} + K = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z} + K, \end{aligned}$$

kde jsme použili pro výpočet náboje homogenní koule vztah $Q = \rho_0 V = \rho_0 \frac{4}{3} \pi R^3$.

Komentář: Natočíme-li výsledek opět do obecného úhlu θ a ϕ , obdržíme jej ve tvaru $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}|} + K$, jenž je na studovaném intervalu identický s potenciálem bodového náboje nacházejícím se v počátku souřadnicové soustavy.

Př. 3.4.

Zadání: Určete potenciál v blízkosti nabitě nekonečně tenké kružnice o poloměru R , jejíž střed leží v počátku souřadnicového systému. Potenciál vyšetřujte na ose z , která je osou symetrie kružnice. Potenciál v nekonečnu uvažujte jako nulový. Délková hustota kružnice je τ_0 .

Řešení: Díky symetrii problému zavedeme válcové souřadnice. Kružnice se nachází na souřadnicích $\vec{r}' = (R \cos \phi', R \sin \phi', 0)$. Připomeňme, že pro studovaný bod na ose z platí $\vec{r} = (0, 0, z)$. Pro element náboje platí $dQ = \tau_0 dl = \tau_0 R d\phi$. Element délky dl kružnice běží od 0 do obvodu kružnice $2\pi R$. Úhlový element $d\phi$ běží od 0 do 2π , proto přepočít $dl = R d\phi$. Konstanta K bude, stejně jako v předešlých případech, nulová. Potenciál spočteme

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_0 R d\phi}{(x'^2 + y'^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\tau_0 R d\phi}{(R^2 + z^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{2\pi R \tau_0}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Pro $z \gg R$ přejde výraz opět do Coulombovského potenciálu $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 z}$.

3.3 Ekvipotenciální plochy

Uvažujme plochy, na kterých je potenciál konstantní ($\varphi(\vec{r}) = konst$), takové plochy se nazývají **ekvipotenciální**. Vektor elektrické intenzity je orientován vždy kolmo k těmto plochám.

Př. 3.5.

Zadání: Určete ekvipotenciální plochy v blízkosti bodového náboje umístěného v počátku souřadnicové soustavy.

Řešení: Pro zdroj vyskytující se v počátku souřadnicové soustavy platí $\vec{r}' = (0, 0, 0)$. Ekvipotenciální plocha je dána rovnicí

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = K \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 K}\right)^2 = R^2.$$

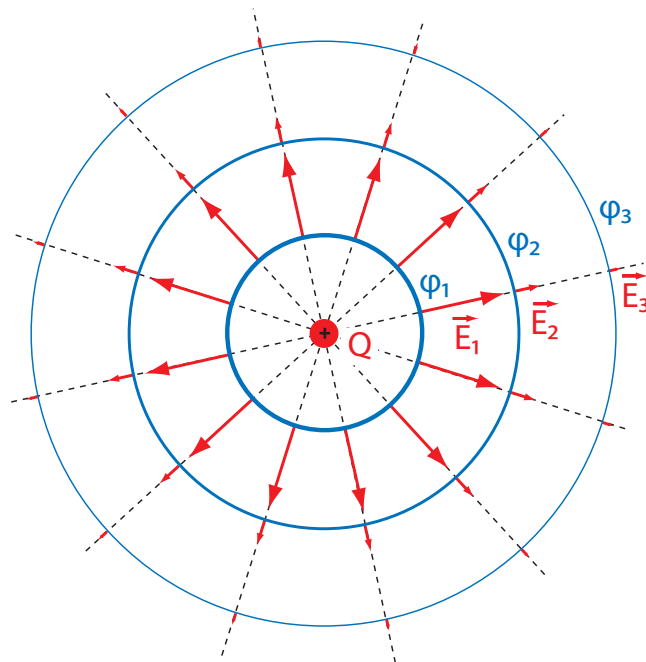
Evidentně výše uvedené rovnice popisují plochy soustředných kulových ploch (o poloměru R) se středem v počátku souřadnic (viz obrázek 15).

Příklady k procvičení 3.1.

Uvažujte homogenně nabitou úsečku o délce $2a$ umístěnou na ose x . Střed úsečky leží v počátku souřadnicové soustavy. Vypočtete potenciál mimo úsečku a) na ose y b) na ose x . Použijte oba uvedené způsoby popsané rovnicemi (12) a (16).

Příklady k procvičení 3.2.

Uvažujte homogenně nabitý (plošná hustota náboje je σ) tenký kruh o poloměru R ležící v rovině $z = 0$. Střed kruhu se nachází v bodě $\vec{r}' = (0, 0, 0)$. Určete potenciál na ose kruhu ve vzdálenosti z od středu kruhu. Potenciál v nekonečné vzdálenosti od kruhu uvažujte jako nulový.



Obrázek 15: Ekvipotenciální plochy v blízkosti bodového zdroje.

Příklady k procvičení 3.3.

Uvažujte tlustou sférickou slupku o vnitřním a vnějším poloměru R_1 a R_2 . Slupka je homogenně nabitá s hustotou náboje ρ . Vypočtete potenciál v libovolném bodě r . Potenciál v nekonečné vzdálenosti od středu slupky uvažujte jako nulový. Nakreslete do grafu závislost velikosti elektrické intenzity a potenciálu na radiální vzdálenosti.

Příklady k procvičení 3.4.

Uvažujte dva bodové náboje o různé velikosti náboje a znaménku. V nekonečné vzdálenosti od nábojů uvažujte nulový potenciál. Dokažte, že ekvipotenciální plocha (ta co není v nekonečné vzdálenosti) pro potenciál $\varphi = 0$ je kulová plocha.

Příklady k procvičení 3.5.

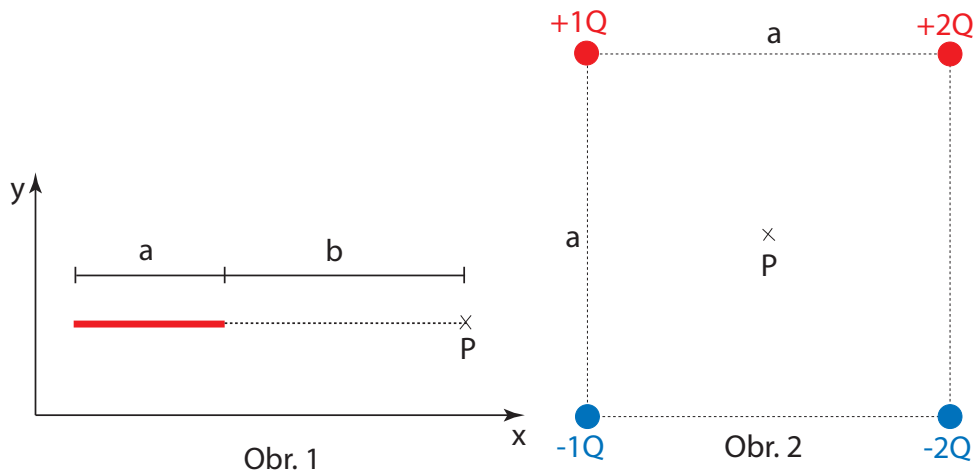
Uvažujte potenciál ve tvaru $\varphi = ke^{-cr^2}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Určete vektor elektrické intenzity a hustotu náboje.

Doporučená literatura

Elektrina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 27-31, 38-46, 65-68, 96-98*
 Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 67-72, 78-80, 98-107*
 Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 62-85*
 Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 25*

Čtvrtsemestrální písemná práce č. 1.

1. Jakou hmotnost by musel mít proton, aby přitažlivá gravitační síla mezi dvěma protony v klidu měla stejnou velikost jako síla jejich elektrického odpuzování? Gravitační konstanta: $\kappa = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{kg}^{-1}$, permitivita vakua $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, náboj protonu $Q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.
2. Vypočtete: $\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{r})$, kde \vec{A} značí konstantní vektor a $\vec{r} = (x, y, z)$.
3. Určete vektor elektrické intenzity v bodě P . Uvažujte délkovou hustotu náboje τ tenké tyče o délce a . Vzdálenost bodu P od konce tyče je b (viz obrázek 1).
4. Určete potenciál v bodě P (viz obr. 2). Náboje se nachází v rozích čtverce. Délka stran je rovna a . Bod P leží uprostřed čtverce. Potenciál v nekonečnu se rovná nule.



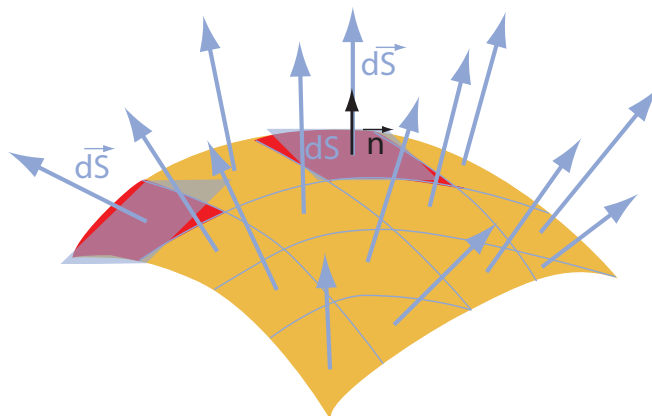
4 Gaussův zákon a vodiče v elektrickém poli

4.1 Gaussův zákon a jeho aplikace

Uvažujme Gaussův zákon (10). Pokud levou i pravou stranu rovnice zintegrujeme přes objem dV , obdržíme

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \int \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

kde Q je náboj obsažený v objemu V , přes který integrujeme. Existuje matematická věta, jejíž důkaz provádět nebudeme, která dokazuje rovnost integrálů $\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S}$. Tato věta se nazývá **Gaussova věta** a lze ji použít k úpravě výše uvedeného integrálu. Plocha S ohraničuje objem V . Jinými slovy: S je uzavřená plocha „natažená“ na objem V . Element $d\vec{S} = \vec{n} dS$ značí malý orientovaný kus této plochy (na obrázku 16 červený výřezek ze žluté plochy), kde orientaci určuje jednotkový vektor \vec{n} kolmý k ploše S a mířící směrem ven z plochy.



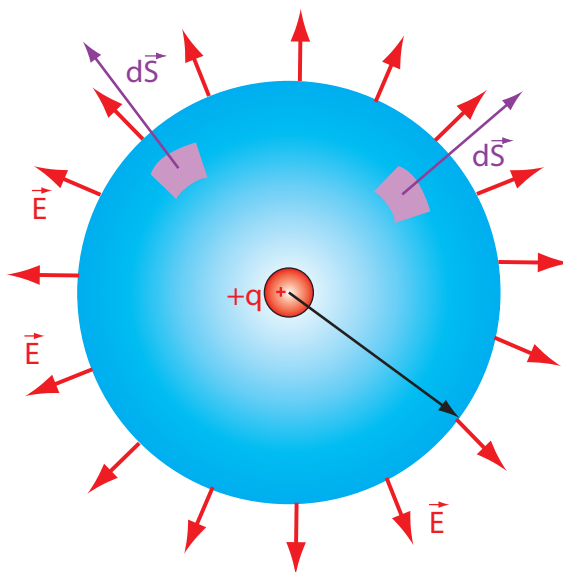
Obrázek 16: Normálové vektory k ploše S .

Gaussova věta upraví Gaussův zákon do integrálního tvaru

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (18)$$

Skalární součin vektoru elektrické intenzity a vektoru plošného elementu můžeme napsat ve tvaru $\vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS \cos \varphi$, kde φ značí úhel, který tyto dva vektory navzájem svírají, E a dS jsou velikosti těchto vektorů.

Uvažujme následující situaci: myšlenou plochu S jsme vybrali tak, aby do ní vektor \vec{E} pronikal, nebo unikal ve všech bodech kolmo. Takže platí: $\vec{E} \parallel d\vec{S} \parallel \vec{n}$, $\cos(0) = 1 \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{S} = EdS$. Uvažujeme-li navíc, že náboj je rozložen tak, že velikost elektrické intenzity je všude na ploše stejná, lze velikost intenzity vytknout před integrál: $\oint EdS = E \oint dS = ES$. Takto zvolené plochy a zdroje reprezentuje například kulová slupka a sféricky rozložený náboj s totožnou polohou středu. Vektory elektrické intenzity míří ven (či dovnitř) ze sférického zdroje kolmo na myšlenou kulovou plochu. Navíc díky kulové symetrii jsou vektory elektrické intenzity na povrchu myšlené plochy všude stejně velké (viz. obrázek 17).



Obrázek 17: Gaussova plocha.

Výsledná rovnice je přímý důsledek **Gaussova zákona** a lze ji jednoduše zapsat ve tvaru

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}. \quad (19)$$

Důležitá poznámka: Gaussův zákon lze použít pro výpočet velikosti elektrické intenzity v blízkosti **symetricky** rozložených zdrojů. Mezi takové patří zdroje, jež nabývají **sférické**, **válcové** nebo **rovinné** symetrie či jejich kombinací. Pro složitější příklady rozložení zdroje se používá metoda výpočtu uvedená v předchozím textu.

Př. 4.1.

Zadání: Uvažujte nabitou plnou kouli o poloměru R s konstantní hustotou náboje ρ . Jaká je elektrická intenzita ve vzdálenosti r od středu koule? Intenzitu vyšetřete jak vně koule $r > R$, tak uvnitř koule $R > r$.

Řešení: Myšlená Gaussova plocha musí nabývat stejné symetrie jako rozložení náboje. Je-li rozložení zdroje sférické, nutně musí být Gaussova plocha také sférická. Pro plochu sférické slupky o poloměru r platí $S = 4\pi r^2$. Vně koule se výsledná velikost elektrické intenzity (dle výrazu (19)) rovná $E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_0}$. Tento výsledek je ve shodě s výsledkem v příkladu 2.5.

Pro $R > r$ Gaussova plocha leží uvnitř koule. Náboj ležící uvnitř této myšlené plochy však již nedosahuje $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, ale pouze $Q_{\text{Gauss}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$. Výsledná velikost elektrické intenzity se pak podle výrazu (19) rovná

$$E = \frac{Q_{\text{Gauss}}}{S\varepsilon_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi \rho r^3}{4\pi r^2 \varepsilon_0} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{Qr}{4\pi R^3 \varepsilon_0}.$$

Komentář: Z výsledku je zřejmé, že vyšetřujeme-li elektrickou intenzitu uvnitř koule, tak intenzita roste úměrně s radiální vzdáleností. Dosáhneme-li poloměru R , tak pro $r > R$ i $R > r$ je intenzita totožná. Vně koule intenzita klesá s druhou mocninou vzdálenosti.

Př. 4.2.

Zadání: Uvažujte nabitou kouli o hustotě náboje $\rho = Ar$ uvnitř poloměru R a $\rho = 0$ vně poloměru R . Vypočtěte náboj (nacházející se pod poloměrem r), intenzitu a potenciál v závislosti na radiální vzdálenosti r .

Řešení: Náboj nacházející se pod poloměrem $r < R$ je

$$Q(r < R) = \int_V Ar dV = \int Ar \cdot r^2 \sin \theta dr \Big|_0^r d\phi \Big|_0^{2\pi} d\theta \Big|_0^\pi = 4\pi A \int_0^r r^3 dr = \pi Ar^4.$$

Vně koule je již náboj konstantní a nabývá hodnoty $Q(r > R) = \pi AR^4$.

Intenzita uvnitř koule je díky Gaussovu zákonu rovna

$$E(r < R) = \frac{Q(r)}{S\varepsilon_0} = \frac{\pi Ar^4}{4\pi r^2\varepsilon_0} = \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0}.$$

Analogicky intenzita vně koule je

$$E(r > R) = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{\pi AR^4}{4\pi r^2\varepsilon_0} = \frac{AR^4}{4r^2\varepsilon_0}.$$

Intenzita vně koule, jak lze očekávat, klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Lze ukázat prostým dosazením $r = R$, že intenzita je na přechodu (vnějšek, vnitřek koule) spojitá funkce.

Potenciál získáme integrací intenzity

$$\varphi(r < R) = - \int \frac{Ar^2}{4\varepsilon_0} dr = - \frac{Ar^3}{12\varepsilon_0} + C_1,$$

$$\varphi(r > R) = - \int \frac{AR^4}{4r^2\varepsilon_0} dr = \frac{AR^4}{4r\varepsilon_0} + C_2.$$

Položíme-li potenciál v nekonečnu rovnu nule, pak $C_2 = 0$. Aby byl potenciál na přechodu $r = R$ spojitý, musí platit $\varphi(r < R) = \varphi(r > R)$, tedy

$$-\frac{AR^3}{12\varepsilon_0} + C_1 = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \Rightarrow C_1 = \frac{AR^3}{3\varepsilon_0}.$$

Konečný tvar potenciálu je

$$\varphi(r < R) = -\frac{Ar^3}{12\varepsilon_0} + \frac{AR^3}{3\varepsilon_0},$$

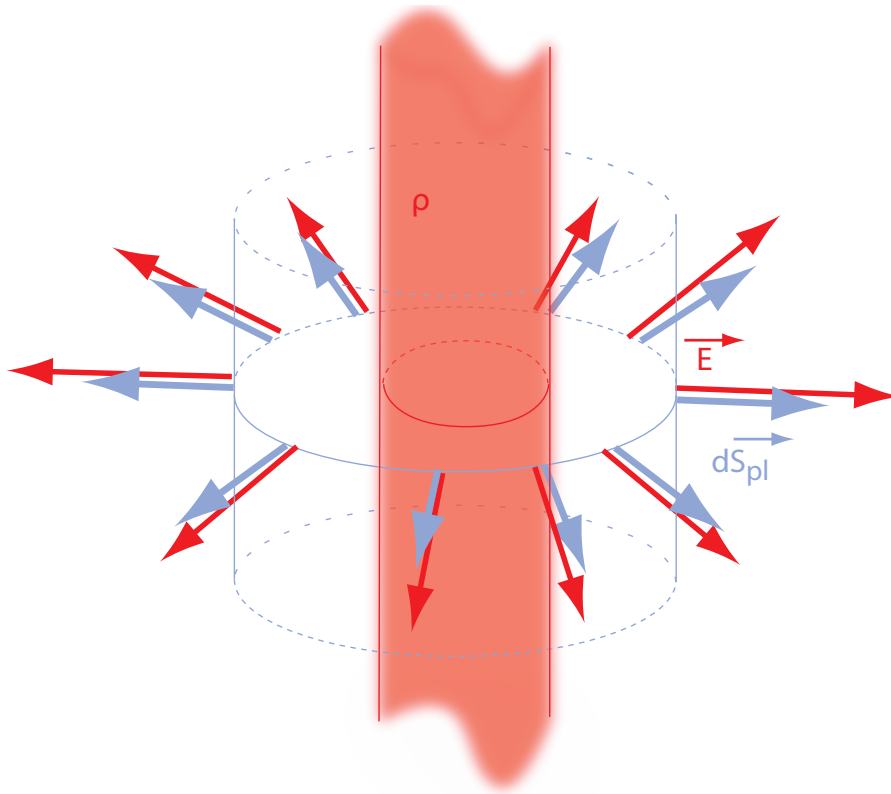
$$\varphi(r > R) = \frac{AR^4}{4r\varepsilon_0}.$$

Př. 4.3.

Zadání: Uvažujte nabitý nekonečně dlouhý plný válec o poloměru R (viz obrázek 18) s konstantní hustotou náboje ρ . Jaká je elektrická intenzita ve vzdálenosti r od osy válce? Uvažujme obě možnosti, a to $r < R$ a $r > R$.

Řešení: Myšlená Gaussova plocha má stejnou symetrii jako rozložení náboje, má tvar povrchu nekonečně dlouhého válce. Vliv podstav můžeme zanedbat, protože jsou nekonečně

daleko. Uvažujme nejprve $r > R$. Velikost náboje uvnitř nekonečně dlouhého válce nabývá $Q = \rho l \pi R^2$, kde l značí délku nekonečně dlouhého válce. Velikost Gaussovy válcové plochy vypočteme jako $S = 2\pi r l$. Intenzita mimo válec vyjde $E = \frac{\rho l \pi R^2}{2\pi r l \epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2r \epsilon_0}$. V případě $r < R$ lze vyjádřit náboj uvnitř Gaussovy plochy ve tvaru $Q = \rho l \pi r^2$. Elektrická intenzita uvnitř válce je $E = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}$.



Obrázek 18: Gaussova plocha okolo nabitého válce.

Př. 4.4.

Zadání: Uvažujme nekonečně dlouhý nabitý drát o délkové hustotě τ . Vypočtete velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti r od tohoto drátu.

Řešení: Myšlená Gaussova plocha má v tomto případě opět tvar válcové plochy $S = 2\pi r l$. Elektrická intenzita vychází $E = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{\tau l}{\epsilon_0 2\pi r l} = \frac{\tau}{\epsilon_0 2\pi r}$.

Př. 4.5.

Zadání: Uvažujme nekonečně velkou a nekonečně tenkou nabitou desku s plošnou hustotou náboje σ . Vypočtete velikost elektrické intenzity v blízkosti desky.

Řešení: Gaussova plocha obalující nekonečně velký plošně rozložený náboj se skládá ze dvou nekonečně velkých ploch. Náboj plochy se rovná $Q = ab\sigma$, kde a a b značí šířku a délku plochy. Gaussovu plochu vypočteme jako $S = 2ab$. Elektrická intenzita vychází $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

Př. 4.6.

Zadání: Uvažujme dvě velké a tenké nabitě rovnoběžné desky s opačným nábojem o plošné hustotě náboje desek $\pm\sigma$. Určete elektrickou intenzitu mezi deskami a mimo ně.

Řešení: Uvažujme bod P nacházející se mezi deskami. Necht' se v blízkosti bodu P nachází nejprve pouze jedna deska. Intenzita od této desky se v bodě P , jak jsme již uvedli, rovná $E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Pokud je deska kladně nabitá, horizontálně orientovaná a bod P leží nad ní, intenzita míří směrem nahoru. Pokud je deska záporně nabitá, horizontálně orientovaná a bod P leží pod ní, pak vektor intenzity směřuje opět směrem nahoru. Uvažujeme-li dvě desky, jednu nad bodem P (ta záporná) a druhou pod bodem P (ta kladná), pak díky principu superpozice lze zjistit, že velikost elektrické intenzity v tomto bodě vychází $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Intenzita mimo desky vyjde kvůli principu superpozice nulová.

Př. 4.7.

Zadání: Jaké je napětí mezi dvěma nekonečně dlouhými válcovými plechy o poloměrech R_1 a R_2 ($R_1 < R_2$) a plošných nábojích σ_1 a σ_2 ? Osy válců leží na stejné přímce. Určete kapacitu takto vytvořeného kondenzátoru.

Řešení: Dle Gaussova zákona $E = \frac{Q}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma 2\pi Rl}{2\pi r l \varepsilon_0} = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}$. Napětí indukované válcovitě rozloženým nábojem lze spočítat jako $U = \int_{R_1}^{R_2} E dr$. Informace o náboji na vnějším plechu zjevně není pro zjištění napětí důležitá. Vnější válec uvnitř sebe napětí nezpůsobuje, protože napětí je dáno integrálem z intenzity, která v tomto prostoru závisí na hustotě náboje na vnitřní elektrodě a na jejím poloměru. Napětí vyjde $U = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$.

$$\text{Kapacitu kondenzátoru definujeme jako } C = \frac{Q}{U}. \text{ Tedy } C = \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma_1 R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}.$$

Komentář: Tento výsledek není potřeba nutně považovat jako nefyzikální z důvodu, že $l \rightarrow \infty$, a tedy $C \rightarrow \infty$. Pro $l \gg \Delta R$ je možné uvažovat s výsledkem $C = \frac{2\pi l \varepsilon_0}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$ jako

velmi dobrou aproximací popisující reálný případ konečně dlouhého válcového kondenzátoru o délce l .

Př. 4.8.

Zadání: Uvažujte tlustou nekonečně dlouhou válcovou slupku o konstantní hustotě náboje ϱ , vnitřním a vnějším poloměrem R_1 a R_2 . Vypočtete velikost elektrické intenzity a potenciál v závislosti na vzdálenosti od osy symetrie r . Tyto závislosti zakreslete do grafu.

Řešení: Z Gaussova zákona je zřejmé, že uvnitř slupky je intenzita nulová $E_{r \leq R_1} = 0$. V oblasti mezi vnitřním a vnějším poloměrem můžeme intenzitu vyjádřit jako

$$E_{R_1 \leq r \leq R_2} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\pi (r^2 - R_1^2) l \varrho}{2\varepsilon_0 \pi r l} = \varrho \frac{r^2 - R_1^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Vně slupku platí

$$E_{R_2 \leq r} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{\pi (R_2^2 - R_1^2) l \rho}{2\varepsilon_0 \pi r l} = \rho \frac{R_2^2 - R_1^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Potenciál lze vypočítat jako záporný integrál z intenzity

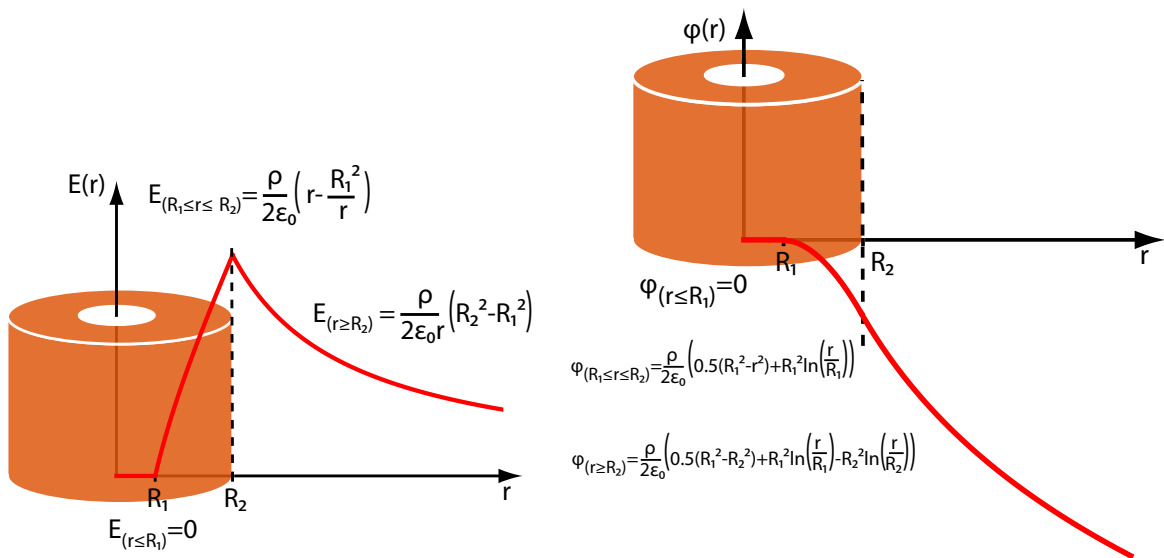
$$\varphi_{r \leq R_1} = K_1, \quad \varphi_{R_1 \leq r \leq R_2} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[R_1^2 \ln(r) - \frac{r^2}{2} \right] + K_2, \quad \varphi_{R_2 \leq r} = \rho \frac{R_1^2 - R_2^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + K_3.$$

Zvolíme-li hladinu nulového potenciálu uvnitř slupky, je výsledek díky spojitosti roven

$$\varphi_{r \leq R_1} = 0, \quad \varphi_{R_1 \leq r \leq R_2} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[R_1^2 \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) - \frac{r^2 - R_1^2}{2} \right],$$

$$\varphi_{R_2 \leq r} = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \left[\frac{R_1^2 - R_2^2}{2} - R_2^2 \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + R_1^2 \ln\left(\frac{r}{R_1}\right) \right].$$

Velikost intenzity a potenciál v závislosti na radiální vzdálenosti jsou zakresleny v grafech 19.



Obrázek 19: Velikost elektrické intenzity a potenciál v blízkosti nabitě válcové slupky.

Př. 4.9.

Zadání: Uvažujte dvě rovnoběžné nabitě přímky, jež mají opačné znaménko délkové hustoty náboje. Jakou elektrickou intenzitu vytvářejí?

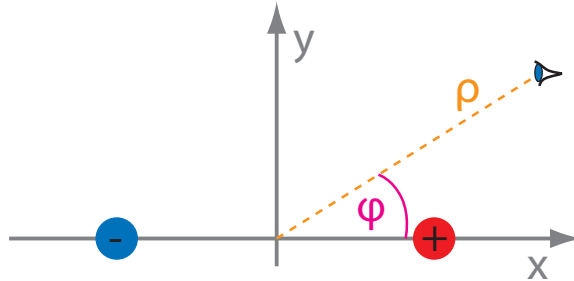
Řešení: Náboj nabitě přímky lze vyjádřit jako $Q = \tau l$. Myšlená plocha obepínající přímku je pak $S = 2\pi\rho l$, kde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Dle Gaussova zákona platí $E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho}$. Pokud je náboj kladný a přímka směřuje ve směru osy z , lze uvažovat, že vektory elektrické intenzity směřují od přímky

$$\vec{E} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\rho^2} (x, y, 0).$$

Pro kladně nabitou přímku ležící v $\vec{r}' = (a, 0, z')$ a záporně nabitou přímku ležící v $\vec{r}' = (-a, 0, z')$ platí

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{\tau(x-a, y, 0)}{2\pi\epsilon_0[(x-a)^2 + y^2]} - \frac{\tau(x+a, y, 0)}{2\pi\epsilon_0[(x+a)^2 + y^2]} = \\ &= \frac{\tau\left((x-a)\left[(x+a)^2 + y^2\right] - (x+a)\left[(x-a)^2 + y^2\right], y\left[\left[(x+a)^2 + y^2\right] - \left[(x-a)^2 + y^2\right]\right], 0\right)}{2\pi\epsilon_0[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]} = \\ &= \frac{2a\tau(x^2 - y^2 - a^2, 2xy, 0)}{2\pi\epsilon_0[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}.\end{aligned}$$

Uvažujeme-li válcové souřadnice, přejdeme od soustavy x, y, z na soustavu ρ, φ, z . Pro tyto



Obrázek 20: Grafické znázornění rovnoběžných vodičů v rovině xy .

souřadnice platí $x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi$. Tedy

$$\vec{E} = \frac{a\tau(\rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi - a^2, 2\rho^2 \cos \varphi \sin \varphi, 0)}{\pi\epsilon_0[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]} = \frac{a\tau(\rho^2 \cos 2\varphi - a^2, \rho^2 \sin 2\varphi, 0)}{\pi\epsilon_0[(x-a)^2 + y^2][(x+a)^2 + y^2]}.$$

Jestliže uvažujeme, že $\rho \gg a$, pak $(x \pm a)^2 + y^2 \doteq x^2 + y^2 = \rho^2$ a výsledná intenzita a její velikost se blíží

$$\vec{E} \doteq \frac{a\tau(\cos 2\varphi, \sin 2\varphi, 0)}{\pi\epsilon_0\rho^2}, \quad E \doteq \frac{a\tau}{\pi\epsilon_0\rho^2}.$$

Komentář: Lze hledat analogii s případem dipólu. V případě monopolů klesají intenzity od jednotlivých pólů s druhou mocninou vzdálenosti. U dipólu však klesá intenzita s mocninou třetí. V tomto případě klesá intenzita od přímky s první mocninou vzdálenosti, u dvou přímek s opačným nábojem již s mocninou druhou. Velikost intenzity klesá se druhou mocninou vzdálenosti podobně jako v případě bodového náboje.

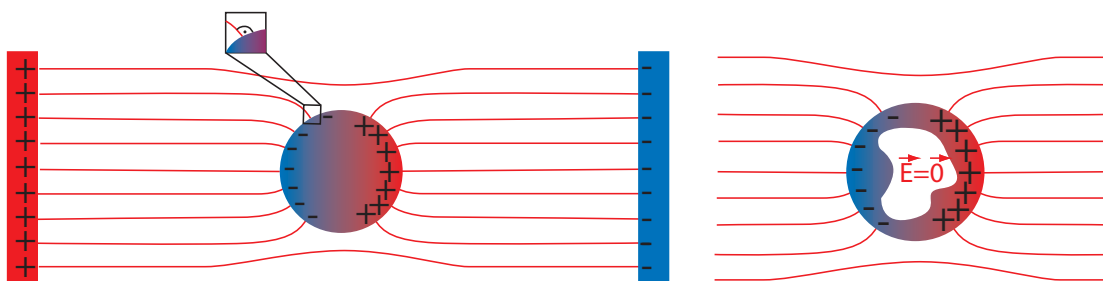
4.2 Vodiče v elektrickém poli

Uvažujme, že vložíme vodič do elektrického pole. Elektronů ve vodiči se mohou pohybovat v rámci celého objemu. Pokud ideální vodič leží v elektrickém poli, náboje se pohybují, dokud

pole uvnitř vodiče nezmizí. Náboje (v reálném případě elektrony) jsou ve výsledku koncentrovány na povrchu vodiče tak, že uvnitř něj kompenzují vnější pole. Je-li elektrické pole uvnitř vodiče nulové, potenciál ve všech bodech vodiče nabývá konstantní hodnoty, a to bez ohledu na morfologii vodiče. Povrch vodiče s konstantním potenciálem lze považovat za ekvipotenciální plochu, viz předešlá kapitola. Jak jsme již zmínili, vektory elektrické intenzity (tedy i elektrické siločáry) svírají s ekvipotenciální plochou pravý úhel.

Z výše uvedeného plyne:

- vektory elektrické intenzity jsou vždy **kolmé** na povrch vodiče (viz první obrázek 21).
- v dutině uvnitř vodiče nabývá elektrické pole **nulové** hodnoty (viz druhý obrázek 21), pokud se v ní ovšem nenachází jiný zdroj \vec{E} .



Obrázek 21: Vodič v elektrickém poli.

Uvažujme plošně rozmístěný náboj. Na jedné straně plochy je nulové elektrické pole (vnitřek kovu) a na druhé nikoli (vněšek kovu). Z Gaussova zákona vyplývá, že elektrickou intenzitu v bezprostřední blízkosti plochy lze zjistit pomocí $E = \frac{Q}{S\epsilon_0}$. V tomto případě však je plocha, kterou prochází vektory elektrické intenzity, totožná s plochou, na které je rozmístěn náboj (nikoli dvojnásobek jak v případě intenzity v blízkosti nabitě tenké desky). Dosazením $Q = \sigma S$ obdržíme rovnici

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (20)$$

Tento vztah neplatí pouze pro výše uvedený speciální případ, ale můžeme jej zobecnit. Plošná hustota pak již nebude konstantní, ale stane se funkcí souřadnic.

Př. 4.10.

Zadání: Uvažujme nekonečně velkou vodivou desku. Ve vzdálenosti a od desky se nachází kladný bodový elektrický náboj. Jaké je rozložení náboje na povrchu desky a jaké elektrické pole vzniká v okolí desky a bodového náboje?

Řešení: Kladný bodový náboj generuje ve svém okolí elektrické pole \vec{E}_b . Záporné náboje uvnitř vodivé desky se přemístí směrem ke kladnému bodovému náboji a kladné náboje od-

tečou do nekonečna. V konečné oblasti desky tak zůstanou pouze záporné náboje „nalepené“ na straně přilehlé ke kladnému bodovému náboji ².

Uvažujme, že deska leží v rovině yz ($\vec{r} = (0, y, z)$) a náboj leží na ose x v (x -ové) vzdálenosti a od desky ($\vec{r}' = (a, 0, 0)$). x -ová složka elektrické intenzity (generovaná bodovým nábojem) v rovině yz (tedy v $(0, y, z)$) je:

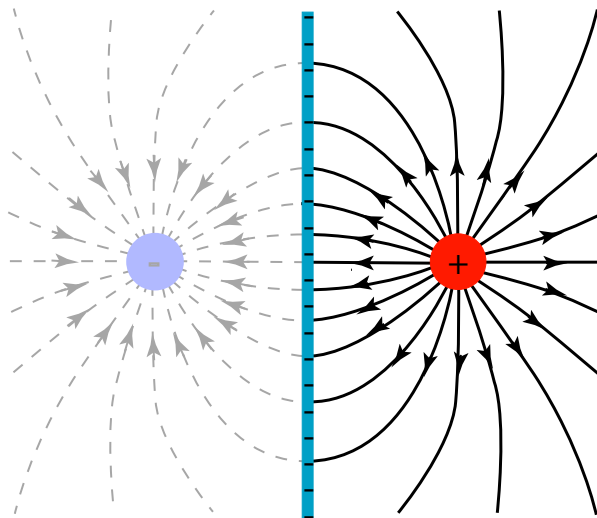
$$E_{bx} = \frac{-aQ}{4\pi\epsilon_0 (y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Aby uvnitř desky byla intenzita pole nulová, musí být náboj na povrchu (strany ve směru k bodovému náboji) rozložen tak, aby kompenzoval elektrické pole bodového náboje.

Jak jsme již zmínili, v celé oblasti nalevo od desky (opačně k té, na níž leží kladný náboj) se intenzita rovná nule. Deska (na levé straně) vytváří elektrické pole, které odpovídá poli bodového náboje o velikosti $-Q$ situovaného do polohy $(a, 0, 0)$, tedy do stejného místa, jako leží původní kladný náboj. Jinými slovy deska vytváří pole, které se jeví jako pole vytvořené původním nábojem, jen s opačným znaménkem. Součet polí dává pole nulové, které pozorujeme nalevo od desky.

Pole náboje tvořené povrchem desky je zrcadlově symetrické. Jestliže pozorovatel na levé straně vnímá pole od desky tvořené jakoby bodovým nábojem ze strany pravé, to samé musí vnímat i pozorovatel na straně druhé (pravé). Pozorovatel měřící elektrickou intenzitu na straně desky, kde se nachází náboj, měří jak pole původního bodového náboje Q ležícího v $(a, 0, 0)$, tak pole desky, které odpovídá náboji $-Q$ v poloze $(-a, 0, 0)$.

Takové elektrické pole je identické elektrickému poli dipólu, viz obrázek 22.



Obrázek 22: Elektrické pole náboje v blízkosti vodivé desky.

²Pro obhájení absence kladných nábojů v desce lze použít i jiný argument. Uvažujme vodivou kouli s kulovou dutinou. Dále uvažujme, že kulová dutina je jen o málo menší jak koule. Do blízkosti této koule vložíme bodový náboj, například kladný. Povrch koule v blízkosti kladného náboje se nabije záporně. Naopak odlehlá část se nabije kladně. Uvnitř dutiny je elektrická intenzita nulová a i plošný náboj na vnitřní stěně dutiny je nulový. Tuto kouli lze zvětšit donekonečna tak, že lze pozorovat jen nekonečně velkou stěnu přilehlou k bodovému náboji obsahující záporný náboj. Za touto stěnou bude intenzita nulová.

Z příkladu 3.2 víme, že elektrické pole dipólu v rovině $x = 0$ je rovno

$$E_x = \frac{-2aQ}{4\pi\epsilon_0 [a^2 + y^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Plošnou hustotu náboje lze díky rovnici (20) zjistit ve tvaru

$$\sigma = \frac{-aQ}{2\pi (y^2 + z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Příklady k procvičení 4.1.

Vypočítejte potenciál uvnitř a vně homogenně nabitě koule o náboji Q a o poloměru R . Zakreslete do grafů velikost elektrické intenzity a potenciál v závislosti na radiální vzdálenosti, ověřte spojitost obou funkcí na rozhraní.

Příklady k procvičení 4.2.

Vypočítejte potenciál ze zadání příkladu 4.3 a nakreslete si závislost elektrické intenzity a potenciálu na radiální vzdálenosti do grafu a ověřte spojitost funkcí na rozhraní $r = R$. Uvažujte v bode $\varphi(r = 0) = 0$.

Příklady k procvičení 4.3.

Uvažujte nekonečně velkou vertikálně posazenou nabitou desku o hustotě náboje σ . Deska se nachází v tíhovém poli s tíhovým zrychlením g . V blízkosti desky visí nabitá kulička o velikosti náboje Q a hmotnosti m . Délka závěsu je l . Vypočítejte vychýlení závěsu oproti vektoru tíhového pole.

Příklady k procvičení 4.4.

Jaké elektrické pole vzniká v okolí vodivé kulové tlusté slupky se středem v bodě $(0, 0, 0)$, v jejíž dutině je uložen bodový náboj Q s polohovým vektorem $(0, 0, z_1)$? Náboj neleží uprostřed kulové slupky. Kulová slupka má vnitřní a vnější poloměr R_1 a R_2 . Intenzitu vyjádřete pro libovolné \vec{r} , tedy i uvnitř dutiny a uvnitř kulové slupky.

Příklady k procvičení 4.5.

Určete potenciál v blízkosti a uvnitř nabitě koule o poloměru R . Hustota náboje je dána $\rho = kr$, kde r je radiální vzdálenost od středu koule. Potenciál v nekonečnu uvažujte jako nulový.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 34-38, 46-50, 52-61, 86-92*
Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 72-78, 82-95, 109-113*
Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 43-60, 109-122*
Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 24*

5 Kondenzátory

5.1 Kapacita

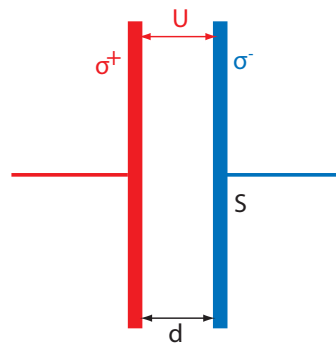
Uvažujme elektrické zařízení, ve kterém chceme skladovat elektrický náboj. Takové zařízení vytváří ve svém okolí elektrické pole. Na jednom místě tohoto zařízení skladujeme kladný náboj a na jiném záporný. V okolí obou míst, kde skladujeme náboj, je elektrický potenciál funkcí polohového vektoru. Rozdíl potenciálů (mezi místy, kde skladujeme náboje) vyjadřuje elektrické napětí. Definujme si **kapacitu** kondenzátoru C , jež vyjadřuje poměr skladovaného náboje ku napětí

$$C = \frac{Q}{U}. \quad (21)$$

Elektrické zařízení se jmenuje **kondenzátor** a oblast, ve které se skladuje náboj, označujeme **elektroda**.

Př. 5.1.

Zadání: Vypočtete kapacitu deskového kondenzátoru o ploše S , vzdálenosti desek d a povrchovém náboji σ . Uvažujte, že desky kondenzátoru jsou si velice blízko.



Obrázek 23: Přibližný náčrt deskového kondenzátoru

Řešení: Z Gaussovy věty víme, že intenzitu v blízkosti nabitě desky o nekonečné velikosti vyjádříme vztahem $E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$. Uvažujeme-li desky dvě (s opačným nábojem, ale stejnou velikostí náboje), existuje mezi nimi dvojnásobná intenzita $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. Pokud jsou si desky dostatečně blízko, můžeme zanedbat, že jsou konečné, a uvažovat o nich jako nekonečných. Napětí spočteme jako dráhový integrál z intenzity $U = \int_0^d \vec{E} d\vec{r}$. Zvolíme-li dráhu ve směru elektrické intenzity (což může být náš případ), můžeme v integrálu uvedené vektory nahradit velikostmi $U = \int_0^d E dr$. V tomto případě intenzita E na poloze nezáleží, integrál vyjádříme jako $U = Ed$. Celkový náboj jedné z elektrod se rovná plošné hustotě náboje σ krát plocha S , tedy $Q = S\sigma$. Kapacita deskového kondenzátoru se dle definice (21) rovná

$$C = \frac{S\sigma}{Ed} = \frac{\epsilon_0 S}{d}. \quad (22)$$

Př. 5.2.

Zadání: Vypočtete kapacitu dvou soustředných kulových slupek. Použijte limitu, kdy vnější kulová slupka je nekonečně velká.

Řešení: Z minulých kapitol víme, že pro potenciál v okolí bodového či sférického náboje (uvažujme-li, že střed koule je v počátku souřadnicové soustavy) platí $\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$. Rozdíl potenciálů v polohách R_1 a R_2 bude $U = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$. Všimněme si, že vnější slupka nepřispívá do pole mezi slupkami (výraz obsahuje pouze náboj Q_1). Kapacita takového kondenzátoru se rovná

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0}{\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)}.$$

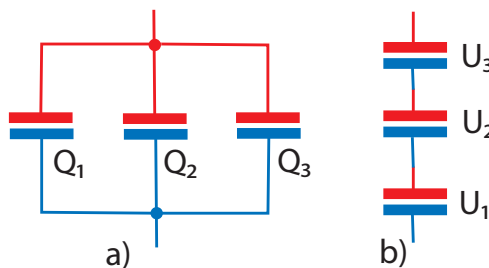
V případě poloměru vnější slupky jdoucí do nekonečna $R_2 \rightarrow \infty$ se kapacita kulového kondenzátoru (či osamocené koule) spočte $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$.

5.2 Kapacita soustavy kondenzátorů

Uvažujme **paralelní** zapojení kondenzátorů (viz obrázek 24 a)). Na každém kondenzátoru je stejné napětí. Díky rozdílné kapacitě se na jednotlivé kondenzátory přivede různé množství náboje Q_i . Celkový náboj pak bude dán součtem jednotlivých nábojů

$$Q = \sum Q_i = \sum UC_i = U \sum C_i = UC \Rightarrow C = \sum C_i.$$

Výsledná rovnice vyjadřuje výpočet celkové kapacity soustavy libovolných kondenzátorů zapojených paralelně.



Obrázek 24: Paralelní a) a sériové b) zapojení kondenzátorů.

Uvažujme nyní kondenzátory, které zapojíme za sebou, tedy do **série** (viz obr 24 b.). Na vodičích mezi jednotlivými deskami kondenzátoru se napětí rovná nule. Kdyby bylo nenulové, protékal by vodiči proud, dokud by se desky kondenzátoru nenabily. Naopak v mezerách mezi elektrodami napětí odpovídá $U_i = Q/C_i$. Náboj na všech deskách je stejně velký, jen s různými znaménky. Každý pár desek má celkový náboj nula. Představme si, že soustavu takovýchto kondenzátorů zavřeme do krabičky. Měříme-li celkové napětí (celkový rozdíl jednotlivých potenciálů), zjistíme, že se rovná součtu jednotlivých napětí na kondenzátorech $U = \sum U_i$.

Dosadíme-li do této rovnice za jednotlivá napětí $U_i = Q/C_i$, za celkové napětí $U = Q/C$ a na obou stranách podělíme nábojem, obdržíme vztah pro kondenzátory zapojené do série

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i},$$

kde C_i vyjadřuje kapacitu jednotlivých kondenzátorů zapojených do série.

Kondenzátor si lze představit jako vodní přehradu. Potenciál si představme jako hladinu vody, napětí jako rozdíl dvou hladin. Kondenzátor udržuje rozdíly hladin. Nad přehradou je hladina všude stejná a pod ní také. Pokud budeme stavět přehradu za sebe (sériově), rozdíl hladiny pod poslední přehradou a nad první je roven součtu jednotlivých rozdílů hladin u jednotlivých přehrad (zde bude fungovat vztah se součtem napětí). Naopak postavíme-li přehradu vedle sebe (paralelně), vody se do nich vejde více. Celková kapacita spojené přehrady (množství vody, jež se vejde do přehrady) se vypočte jako součet jednotlivých kapacit přehrad.

Př. 5.3.

Zadání: Uvažujme opět deskový kondenzátor zapojený v jednoduchém obvodu se zdrojem napětí. Uvažujme, že zdroj napětí je na počátku vypnutý. Poté jej skokově zapneme na elektromotorické napětí \mathcal{E} . Napětí po obvodu postupně přesouvá náboje na desky kondenzátoru. Jakou práci vynaloží zdroj napětí na nabití kondenzátoru nábojem Q_C ?

Řešení: Uvědomme si, že náboj na elektrodách se bude (od okamžiku zapnutí zdroje napětí) s časem zvětšovat, dokud nenastane situace kdy ve všech částech obvodu bude napětí nulové a nenulové bude jen mezi deskami kondenzátoru (případně na zdroji samotném, jenž v kondenzátoru udržuje napětí). Náboj na elektrodách se ustálí na hodnotě $Q_C = C\mathcal{E}$. Již dříve (viz tab. 3.1) jsme uvedli, že práci potřebnou k přenesení konstantního náboje Q v konstantním poli U získáme ze vztahu $W = QU$. Uvažujme, že přenášíme náboj po náboji. Přenesením náboje se pole U změní. Tento vztah již nelze použít.

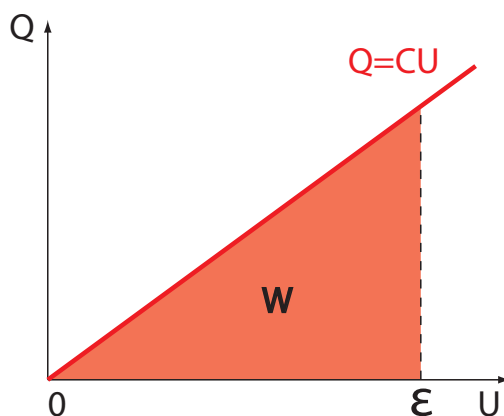
Pro infinitezimálně malou práci platí $dW = UdQ$. Sečteme-li práci přes všechny náboje, obdržíme $W = \int_0^{Q_C} UdQ$. Kapacita deskového kondenzátoru je konstanta. Napětí na deskách kondenzátoru v tomto integrálu vyjádříme jako funkci náboje $U = \frac{Q}{C}$ a zintegrujeme

$$W = \int_0^{Q_C} \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q_C^2}{C} = \frac{1}{2} C \mathcal{E}^2.^3$$

Komentář: Rozlišujeme mezi: napětí na deskách kondenzátoru U a elektromotorické napětí na zdroji \mathcal{E} . Napětí na deskách závisí na nábojích, jež leží na deskách. Elektromotorické napětí na zdroji je vlastností zdroje. Zdroj napětí si můžeme představit jako čerpadlo, jež čerpá vodu z místa pod přehradou do místa nad ní. V našem případě jsme počáteční stav zvolili tak, že hladiny před hrází a za ní byly ve stejné výšce. Čerpadlo zprvu nevykonalo příliš velkou práci

³Zdroj vynaloží ve skutečnosti práci větší než je $\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Příčina je v skokovém zapojení \mathcal{E} . Zdroj i kondenzátor má v principu $L \neq 0$ (viz kap. 11) a $R \neq 0$. Takže by obvod konal tlumené kmity a vyzářoval elektromagnetickou vlnu.

na přečerpání vody. Postupem času se hladina za hrází zvyšovala a před ní snižovala. Čerpadlo pracovalo stále proti většímu tlaku (výkon čerpadla rostl). Nakonec byl rozdíl hladin tak vysoký, že čerpadlo nebylo schopno přenést sebemenší objem vody (ekvivalentní elementárnímu náboji), výkon byl maximální. Poté rozdíl hladin přesně odpovídal schopnostem čerpadla, tedy $U = \mathcal{E}$ (viz obrázek 25). Z příkladu je vidět, že elektromotorické napětí hladinu (potenciál) zvyšuje, naproti tomu kondenzátor (nebo rezistor) hladinu (potenciál) snižuje. Jinými slovy změna potenciálu na zdroji napětí, vzhledem ke změně potenciálu na rezistoru a kondenzátoru v jednoduchém obvodu, je opačná.



Obrázek 25: Práce vykonaná nabíjením kondenzátoru.

Př. 5.4.

Zadání: Uvažujme nabitý deskový kondenzátor na napětí U . Jakou musíme vykonat práci, abychom desky vzdálili do určité konečné vzdálenosti? Zanedbejte nehomogenity pole na okraji.

Řešení: Velikost síly mezi deskami obdržíme ze vztahu $F = QE/2$. Polovina proto, že do celkové intenzity mezi deskami přispívají obě desky, ale silově na jednu působí jen ta druhá a naopak. Pole, jež vytváří deska kupříkladu kladná, působí přitažlivou silou jen na desku zápornou (nikoli opět na kladnou). Elektrické pole mezi deskami kondenzátoru závisí pouze na plošné hustotě náboje. Zafixujeme-li napětí na kondenzátoru, elektrické pole bude záviset na vzdálenosti desek $E = U/d$, kde d značí vzdálenost desek (d je proměnná). Kapacitu deskového kondenzátoru vyjádříme $C = S\epsilon_0/d$. Dosazením dostaneme

$$F = \frac{QU}{2d} = \frac{CU^2}{2d} = \frac{S\epsilon_0 U^2}{2d^2}.$$

Práci, kterou musíme vykonat pro oddálení desek kondenzátoru, vypočteme pomocí dráhového integrálu ze síly, kterou na desku působíme (vzhledem k pohybu desek rovnoběžnému s vektorem síly můžeme psát skaláry namísto vektorů ve skalárním součinu)

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F dd = \int_{d_1}^{d_2} \frac{S\epsilon_0 U^2}{2d^2} dd = -\frac{S\epsilon_0 U^2}{2d} \Big|_{d_1}^{d_2} = \frac{1}{2} S\epsilon_0 U^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2} \right) = \frac{1}{2} (C_1 - C_2) U^2 = -\frac{\Delta CU^2}{2},$$

kde C_1 a C_2 značí počáteční a konečnou kapacitu kondenzátoru. Tím jsme získali množství práce, již musíme vynaložit k oddálení dvou elektrod deskového kondenzátoru.

Komentář: Aby zůstalo napětí konstantní (podle vztahu $U = Ed$), tak se zvětšující se vzdáleností se kondenzátor vybíjí. Při vybíjení získáváme elektrickou energii. Při konstantním napětí se změna energie rovná

$$\Delta E = - \int_{Q_1}^{Q_2} U dQ = -U(Q_2 - Q_1) = -(C_2 - C_1)U^2 = -\Delta CU^2.$$

Odečteme-li získanou změnu elektrické energie od práce, kterou vykonáme k oddálení desek, obdržíme práci jež vybíjející se kondenzátor vykoná $W = -\frac{1}{2}\Delta CU^2$. Energie získaná z vybití je větší jak energie vynaložená k oddálení desek a rozdíl je právě uvedený vztah.

Výše uvedené závěry očekáváme, uvažíme-li, že při vybití kondenzátoru o kapacitě C_1 získáme energii $\frac{1}{2}C_1U^2$. Nenabitě desky můžeme poté od sebe vzdálit bez vykonání jakékoli práce. Opětovným nabitím tak, aby vzniklo napětí U , vynaložíme energii $\frac{1}{2}C_2U^2$. Rozdíl obou energií je $-\frac{1}{2}\Delta CU^2$.

Př. 5.5.

Zadání: Uvažujme opět nabitě desky kondenzátoru. Na deskách uvažujme tentokrát konstantní náboj. Jakou musíme vykonat práci, abychom desky vzdálili do nějaké vzdálenosti? Okrajové podmínky zanedbejme.

Řešení: Práce potřebná k odtrhnutí dvou nabitých desek se rovná

$$W = \int_{d_1}^{d_2} F dd = \int_{d_1}^{d_2} \frac{1}{2} EQ dd = \int_{d_1}^{d_2} \frac{Q^2}{2S\epsilon_0} dd = \frac{Q^2 d}{2S\epsilon_0} \Big|_{d_1}^{d_2} = \frac{Q^2}{2S\epsilon_0} (d_2 - d_1) = \frac{Q^2}{2} \left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1} \right).$$

Příklady k procvičení 5.1.

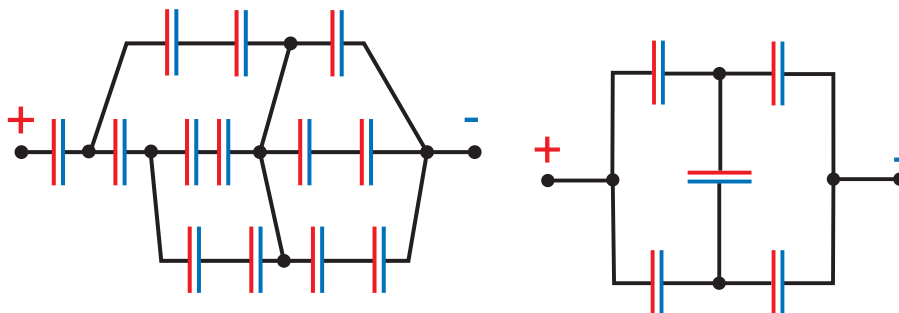
Vypočtete kapacitu kondenzátorů tvořeného dvěma kruhovými deskami o poloměru R . Kruhy jsou planparalelní a jejich středy leží na ose z , kladný v bodě $-a$ a záporný v bodě a . Uvažujte, že pro kruhy platí $a \gg R$. Dále uvažujte, že plošná hustota náboje σ na deskách je konstantní (požadavek konstantního σ je v reálném případě obtížně splnitelný).

Příklady k procvičení 5.2.

Uvažujte homogenně nabitý (plošná hustota náboje je σ) tenký kruh o poloměru R . Jaká je kapacita kruhu oproti nekonečnu?

Příklady k procvičení 5.3.

Vypočtete zapojení kondenzátorů z prvního obrázku 26, kde každý kondenzátor má kapacitu C .



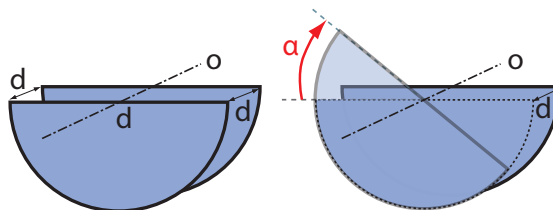
Obrázek 26: Zapojení kondenzátorů.

Příklady k procvičení 5.4.

Uvažujte zapojení z druhého obrázku 26. Jaké má zapojení celkovou kapacitu, je-li kapacita všech kondenzátorů rovna C ?

Příklady k procvičení 5.5.

Uvažujte kondenzátor tvořený dvěma polokruhovými disky o poloměru R . Disky se mohou vůči sobě otáčet kolem osy (osy kruhů, které doplňují polokruhy) – viz obrázek 27. Na desky kondenzátoru je přivedeno konstantní napětí U . Určete velikost momentu síly, pokud disky vychýlíte o úhel α . Uvažujte $R \gg d$, kde d je vzdálenost disků.



Obrázek 27: Polokruhový kondenzátor.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 98-109*

Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 114-116, 142-145*

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 122-134, 137-138*

Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 26 (26.1 – 26.5)*

6 Dielektrika

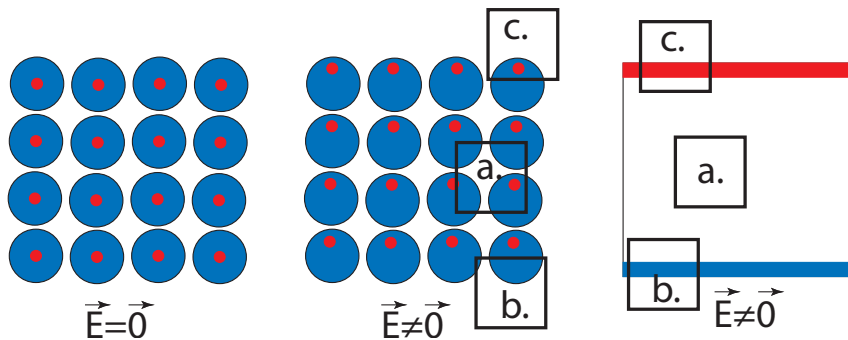
6.1 Dielektrika v homogenním poli

Z pohledu elektrických vlastností je možné látky rozdělit do dvou skupin: **vodiče**, **polovodiče** (kterými se zabývat nebudeme) a **dielektrika**. Vodiče obsahují **volné náboje**, ty se mohou v objemu látky volně pohybovat. Vložíme-li vodič do vnějšího elektrického pole \vec{E}_0 , náboje se přemístí tak, aby elektrické pole uvnitř látky zcela odstranily. Látky obsahující vázané náboje, které se nemohou volně pohybovat, se nazývají dielektrika.

V principu lze rozdělit dielektrika na **polární** a **nepolární**. Polární dielektrika obsahují nenulové elektrické dipóly, které existují i bez působení vnějšího pole. Příkladem polárních dielektrik je voda⁴. V polárním dielektriku bez vnějšího pole jsou směry dipólů náhodné. Jakmile dielektrikum vložíme do vnějšího elektrického pole \vec{E}_0 , například mezi elektrody, kladné části dipólů se natočí ve směru k záporným elektrodám a záporné části směrem ke kladným. Proto se elektrické pole uvnitř dielektrika zeslabí.

V nepolárních dielektrících dipóly vznikají až přítomností vnějšího elektrického pole. Uvažujme krystalovou mřížku pro jednoduchost jednoatomové látky. Jednotlivé neutrální atomy se skládají ze záporného obalu (v obrázku 28 modrá koule) a kladného jádra (v obrázku 28 červený bod). V případě přítomnosti vnějšího elektrického pole \vec{E}_0 se jádro vzhledem k obalu vychýlí. V látce vzniknou elektrické dipóly, které stíní vnější elektrické pole (viz krychle a. v obrázcích 28). Polární dielektrika mívají zpravidla větší permitivitu (více stíní vnější pole) jak dielektrika nepolární.

Na povrchu, kde elektrické siločáry vystupují nebo vstupují do dielektrika, jsou náboje mírně vysunuté (v krychli b. je více záporných nábojů a v krychli c. je více kladných nábojů). Na povrchu dielektrika vzniká plošná hustota náboje, jež přispívá ke stínění vnějšího pole.



Obrázek 28: Představa atomů nepolárního dielektrika v elektrickém poli.

Jestliže na jedné straně dielektrika se indukuje kladný náboj a na druhé straně náboj záporný, má dielektrikum jako celek v elektrickém poli dipólový charakter, který lze experimentálně ověřit. Výsledný dipólový moment (viz příklad 3.2) daného objemu dielektrika je dán objemovým integrálem vektoru elektrické polarizace.

$$\vec{d}_d = \int \vec{P} dV. \quad (23)$$

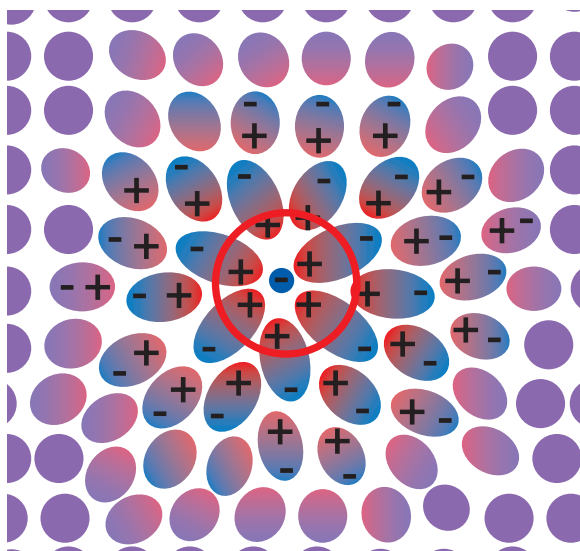
⁴Voda je tříatomová molekula složená ze dvou atomů vodíku a jednoho atomu kyslíku. Atom kyslíku na sebe váže elektrony silněji než atomy vodíku. Proto jsou v molekule vody atomy vodíku nabitě kladně a atomy kyslíku záporně. Díky nesymetrii molekuly vody (spojnice obou vodíků s atomem kyslíku spolu svírají úhel 104°) vzniká elektrický dipól.

Tento vztah implicitně definuje **vektor polarizace**, který lze chápat jako objemovou hustotu dipólového momentu.

6.2 Vektor elektrické indukce

Uvažujme elektrické pole, do kterého vložíme dielektrikum. Elektrické pole dielektrikum polarizuje. Tuto polarizaci popisuje vektor \vec{P} . Uvažujme uzavřenou plochu a na ní vektorové pole tvořené vektory polarizace. Integrál $\oint \vec{P} \cdot d\vec{S}$ přes uzavřenou plochu bude roven úbytku náboje uvnitř plochy způsobený polarizací dielektrika.

Pro jednoduchost si představme bodový náboj, například záporný, obklopený dielektrikem. Záporný náboj přitáhne k sobě kladné náboje a odpudí záporné. Když kolem náboje vytvoříme uzavřenou plochu (viz obrázek 29), skrze tuto plochu budou vytlačeny záporné náboje a vtáhnuty ty kladné. Míra vtáhnutí či vytlačení pak bude dána vektorem polarizace na této ploše. Celkový přebytek náboje, který se díky dielektrické povaze látky uvnitř plo-



Obrázek 29: Nehomogenní polarizace dielektrika.

chy objeví, bude dán součtem všech částí plochy vynásobené vektorem polarizace. Použitím infinitezimálního počtu obdržíme

$$\Delta Q_{\text{pol}} = - \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}.$$

V tomto výrazu jsme použili označení $d\vec{S} = \vec{n}dS$, kde \vec{n} je vektor kolmý na plochu S . Znaménko mínus zde vystupuje proto, že dovnitř plochy S jsou vtahovány náboje opačného znaménka, než je znaménko náboje, které primární pole vytváří. Uvnitř plochy pak vzniká nenulová hustota náboje, která souvisí s nábojem dle vztahu $\Delta Q_{\text{pol}} = \int_V \rho_{\text{pol}} dV$. Použitím

Gaussovy věty z kapitoly 4.1 obdržíme $\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$. Což nám umožňuje spojit oba výrazy pro náboj do rovnice

$$\int_V \rho_{\text{pol}} dV = - \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{P} dV \Rightarrow \rho_{\text{pol}} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \quad (24)$$

Oproti Gaussovu zákonu (10) je v rovnici (24) záporné znaménko. To lze interpretovat tím způsobem, že kladný náboj se posouvá ve směru vektoru polarizace (v obrázku 29 směrem k zápornému náboji). Polarizace dielektrika jakoby stíní původní náboj (popsaný ρ) generující elektrické pole. Výsledné elektrické pole je pak slabší, než kdybychom dielektrikum neuvažovali. Bude třeba upravit Gaussův zákon, ve výše uvedeném tvaru (10), který přestává v dielektriku platit. Divergence elektrické intenzity nyní bude dána jak nábojem generujícím pole, tak i nábojem vzniklým polarizací dielektrika

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{\text{diel}} = \frac{\rho + \rho_{\text{pol}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \frac{\rho}{\varepsilon_0} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E}_{\text{diel}} + \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0} \right).$$

Definujeme-li novou veličinu, **vektor elektrické indukce**, jako

$$\vec{D} = \vec{E}_{\text{diel}}\varepsilon_0 + \vec{P}, \quad (25)$$

dostaneme upravený **Gaussův zákon** (10) ve tvaru

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho. \quad (26)$$

V případě obecné dielektrické látky přestává být Gaussův zákon vzhledem k elektrické intenzitě lineární diferenciální rovnicí. Tou je ve speciálním případě lineární aproximace, pokud je vektor polarizace úměrný elektrické intenzitě. Lineární aproximace se často používá v případě slabých polí.

Rozdíl mezi elektrickou intenzitou a indukcí lze chápat následovně: Elektrická intenzita je veličina, kterou by mělo být možno měřit fyzikálním přístrojem. Naopak elektrická indukce nám popisuje, jaké by bylo elektrické pole, kdyby se generující náboje nenacházely v prostředí dielektrika.

6.3 Lineární aproximace

Uvažujeme-li nepolární dielektrikum ve slabém elektrickém poli je vychýlení jádra vůči obalu přímo úměrné elektrické intenzitě uvnitř látky $\vec{E}_{\text{diel}} \sim \vec{\delta}$, kde $\vec{\delta} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$ značí vychýlení jádra vůči obalu za přítomnosti elektrického pole.

Uvažujme látku o objemu V , jež obsahuje N neutrálních atomů. Koncentraci atomů vypočteme z podílu $n = N/V$. Koncentrace celkového počtu kladných (či záporných) nábojů v látce vyjde $n_q = nq$, kde q označuje kladné anebo záporné náboje v atomu účastníci se polarizace. Vektor polarizace v dielektriku vypočteme

$$\vec{P} = nq \vec{\delta}. \quad (27)$$

Úměrnost mezi elektrickou intenzitou a vektorem polarizace lze pro slabá pole uvažovat i v případě polárních dielektrik. Zavedeme-li konstantu úměrnosti $\chi\varepsilon_0$, lze vztah mezi vektorem elektrické intenzity a vektorem polarizace zapsat jako $\vec{P} = \chi\varepsilon_0 \vec{E}_{\text{diel}}$,⁵ kde χ je bezrozměrná konstanta (ε_0 přidáme z rozměrových důvodů) nazývaná susceptibilita. Závislost mezi elektrickou indukcí a intenzitou lze zapsat ve tvaru

$$\vec{D} = \vec{E}_{\text{diel}}\varepsilon_0 + \vec{P} = \vec{E}_{\text{diel}}\varepsilon_0 (1 + \chi) = \vec{E}_{\text{diel}}\varepsilon_0\varepsilon_r. \quad (28)$$

⁵Vztah mezi vektorem polarizace a elektrickou intenzitou nemusí být nutně lineární. Pokud směr \vec{P} neodpovídá směru \vec{E}_{diel} , pak χ je tenzor.

Je potřeba zdůraznit, že v případě silnějších polí přestává platit úměrnost mezi \vec{E} a \vec{P} . Ve výše uvedené rovnici jsme zavedli bezrozměrnou konstantu, **relativní permitivitu** $\varepsilon_r = 1 + \chi$. Násobek relativní permitivity a permitivity vakua dává takzvanou **permitivitu** $\varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon$. Nahradíme-li dielektrikum vakuem, musí být $\vec{E}_{\text{diel}} \varepsilon_0 = \vec{D}$, tedy $\varepsilon_r = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_0$. Relativní permitivita za běžných podmínek nabývá hodnot větších jak jedna. Intenzita uvnitř dielektrika je pak menší jak intenzita vnějšího elektrického pole.

$$\vec{E}_{\text{diel}} = \frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_r}. \quad (29)$$

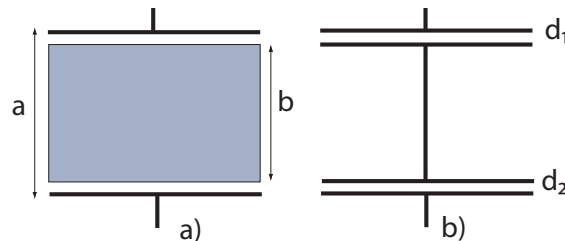
Uvažujme dielektrikum v elektrickém poli. Na povrchu dielektrika se generuje elektrický náboj

$$Q = \int_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = \int_S P \cos \alpha dS^6,$$

kde S je plocha uvažovaného povrchu dielektrika, α je úhel, jenž svírá vektor \vec{P} s plochou $d\vec{S} = \vec{n} dS$. Uvažujeme-li plošnou hustotu náboje σ_{pol} , platí $Q = \int_S \sigma_{\text{pol}} dS$. Z těchto vztahů lze jednoduše odvodit závislost mezi povrchovou hustotou náboje a vektorem polarizace $\sigma_{\text{pol}} = P \cos \alpha = \vec{P} \cdot \vec{n}$.

Př. 6.1.

Zadání: Uvažujte deskový kondenzátor vytvářející homogenní pole. Desky kondenzátoru leží ve vzdálenosti a . Mezi desky jsme vložili kovový kvádřík se stejnou plochou podstavy, jakou mají desky kondenzátoru. Kvádřík má výšku b – viz obrázek 30 a). Chování pole na rozích kvádříku zanedbejte. Vypočítejte kapacitu tohoto kondenzátoru.



Obrázek 30: Kovový kvádřík mezi deskami kondenzátoru.

Řešení: Uvažujme na deskách kondenzátoru plošnou hustotu náboje σ . Kladné náboje v kovovém vodiči se přitáhnou k záporné elektrodě a záporné náboje ke kladné elektrodě. Uvnitř vodiče nakonec bude nulové elektrické pole. Pole bude nenulové pouze v mezerách mezi deskami kondenzátoru a vodičem. Vzniklé uspořádání tak bude připomínat sériové zapojení desek kondenzátoru – viz obrázek 30 b). Z obrázku také vidíme, že součet mezer mezi deskami kondenzátorů se rovná $d_1 + d_2 = a - b$. Pro sériově zapojené kondenzátory platí

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{Ed_1 + Ed_2}{Q} = \frac{E}{Q} (a - b) = \frac{\sigma (a - b)}{\varepsilon_0 \sigma S} = \frac{a - b}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow C = \frac{\varepsilon_0 S}{(a - b)}.$$

⁶V tomto případě bereme náboj vytlačený ve směru vektoru \vec{P} , ten je kladný.

Př. 6.2.

Zadání: Uvažujme, že mezi desky deskového kondenzátoru vložíme homogenní lineární dielektrikum tak, aby zcela vyplňovalo prostor mezi deskami. Jaká je kapacita kondenzátoru s dielektrikem?

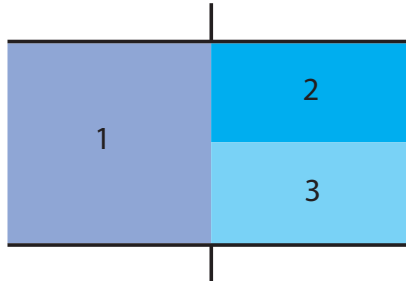
Řešení: Jestliže nabijeme desky kondenzátoru povrchovým nábojem σ , mezi deskami vznikne elektrická intenzita $E_0 = \sigma/\varepsilon_0$. V případě, že se mezi deskami nachází dielektrikum, budeme pracovat s rovnicí (29), tedy $E_{\text{diel}} = \sigma/\varepsilon$, kde $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$. Intenzita v celém objemu dielektrika zůstává homogenní, napětí je $U = dE_{\text{diel}}$, kde d označuje vzdálenost mezi deskami kondenzátoru. Velikost náboje na deskách kondenzátoru lze vyjádřit jako $Q = \sigma S$. Užitím těchto vzorců jednoduše zjistíme

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\sigma S}{dE_{\text{diel}}} = \frac{\sigma S \varepsilon}{d\sigma} = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}.$$

Komentář: Z tohoto výsledku vidíme, že s relativní permitivitou dielektrika zároveň roste i kapacita kondenzátoru. To vysvětluje, proč se dielektrika využívají při výrobě kondenzátorů.

Př. 6.3.

Zadání: Uvažujte kondenzátor s dielektrikem (viz obrázek 31). Oblast 1 má relativní permitivitu ε_{r1} , oblasti 2 a 3 mají ε_{r2} a ε_{r3} . Uvažujme oblast 1 dvojnásobnou vůči oblastem 2 i 3. Určete kapacitu tohoto kondenzátoru.



Obrázek 31: Kondenzátor se složeným dielektrikem

Řešení: Na elektrodách lze uvažovat konstantní napětí. Kondenzátor můžeme rozdělit na levou a pravou část. Celkovou kapacitu pak spočítáme jako kapacitu dvou paralelně zapojených kondenzátorů $C = C_1 + C_{23}$. Kapacita levé části kondenzátoru je $C_1 = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{2d}$. Připomeňme, že jelikož jsme kondenzátor pomyslně rozdělili, za plochu dosadíme $S/2$.

Kapacita C_{23} lze vypočítat více způsoby. Buď uvažujeme, že část kondenzátoru C_{23} se skládá ze dvou sériově zapojených kondenzátorů o tloušťce $d/2$, nebo vypočteme napětí jako integrál z elektrické intenzity v prostředí a použijeme definici pro kapacitu kondenzátoru. Jelikož je první způsob řešení triviální, uvedeme ten druhý.

Jak jsme řekli v příkladu 6.2, elektrická intenzita v dielektriku generovaná deskami kondenzátoru se rovná $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$. Napětí je dráhovým integrálem z intenzity. Především si uvědomme, že integrujeme přes dvě různé oblasti s různými permitivitami. Vzhledem k tomu, že v obou oblastech intenzita nezávisí na poloze, vyjde napětí

$$U_{23} = \frac{E_2 d}{2} + \frac{E_3 d}{2} = \frac{\sigma d}{2\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \right).$$

Výraz $d/2$ jsme užili proto, že polovina intervalu integrálu jde přes oblast 2 a polovina přes oblast 3. Náboj na polovině plochy elektrody označme $Q_{23} = \sigma S/2$. Kapacita pravé poloviny kondenzátoru je

$$C_{23} = \frac{Q_{23}}{U_{23}} = \frac{S\varepsilon_0}{d \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \right)}.$$

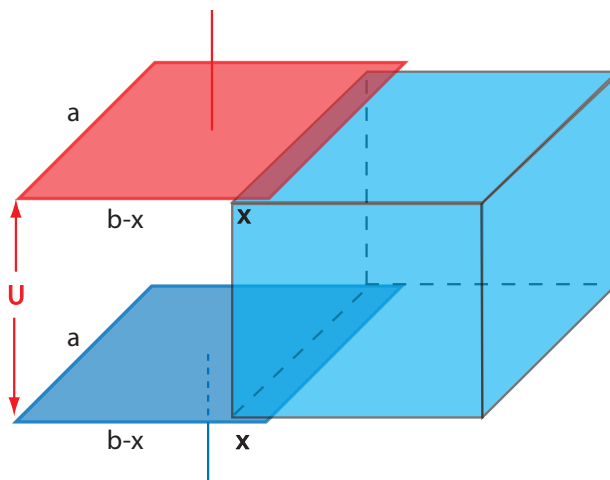
Použitím vztahu pro součet paralelně zapojených kondenzátorů obdržíme celkovou kapacitu

$$C = \frac{S\varepsilon_0\varepsilon_{r1}}{2d} + \frac{S\varepsilon_0}{d \left(\frac{1}{\varepsilon_{r2}} + \frac{1}{\varepsilon_{r3}} \right)}.$$

Jako kontrolu správného řešení můžeme všechny jednotlivé permitivity ε_{r1} , ε_{r2} , ε_{r3} nahradit jedinou ε_r . Pak obdržíme kapacitu kondenzátoru z předešlého zadání.

Př. 6.4.

Zadání: Uvažujme deskový kondenzátor o ploše $S = ab$ a mezeře mezi deskami kondenzátoru o velikosti d . Do tohoto kondenzátoru budeme zasouvat dielektrikum stejných parametrů (viz obrázek 32). Jaká síla vtahuje dielektrikum mezi desky kondenzátoru? Pro tento případ uvažujme na deskách kondenzátoru konstantní napětí.



Obrázek 32: Kondenzátor s posuvným dielektrikem.

Řešení: Jak jsme již uvedli, energie nutná na nabití kondenzátoru se rovná $E = CU^2/2$. Parametr, který popisuje polohu dielektrika v kondenzátoru, označme x . Dielektrikum vsouváme při konstantním napětí. Na část elektrod kondenzátoru, mezi kterými se dielektrikum nachází, je přiváděn dodatečný náboj (tak aby bylo napětí shodné jak v místě s dielektrikem, tak v místě bez dielektrika). Kondenzátor navíc vykonává práci při vtahování dielektrika. Malá změna energie kondenzátoru může být vyjádřena vztahem: $dE = -Fdx + UdQ$. Napětí je konstantní, tedy $dQ = UdC$, proto část práce odpovídající nabíjení kondenzátoru je rovna $UdQ = U^2dC = 2dE$. Tato hodnota je dvojnásobně velká jako samotná energie kondenzátoru. Výše uvedenou rovnici lze přepsat do tvaru $dE = Fdx$. Je-li napětí konstantní, jedinou

proměnnou veličinou zůstává kapacita kondenzátoru C . Kapacita se mění s hloubkou zasunutí dielektrika v kondenzátoru. Sílu vypočteme jako derivaci energie podle x ,

$$F_x = \frac{U^2}{2} \frac{\partial C}{\partial x}.$$

Z výše uvedených výpočtů vyplývá, že kondenzátor s částečně vsunutým dielektrikem lze brát jako dva kondenzátory zapojené paralelně. Uvažujeme-li plochu prvního (bez dielektrika) jako $a(b-x)$ a plochu druhého (s dielektrikem) jako ax , pak celková kapacita vychází

$$C = \frac{a(b-x)\varepsilon_0}{d} + \frac{ax\varepsilon_0\varepsilon_r}{d}.$$

Dosazením do předešlého výrazu obdržíme výsledný vztah pro sílu

$$F_x = \frac{a\varepsilon_0 U^2}{2d} (\varepsilon_r - 1).$$

Př. 6.5.

Zadání: Uvažujme, že jsme mezi desky deskového kondenzátoru vložili dielektrikum. Desky kondenzátoru leží ve vzájemné vzdálenosti d a dielektrikum má šířku a , kde $d > a$ (dielektrikum nevyplňuje mezeru mezi deskami úplně). Vyjádřete kapacitu kondenzátoru s dielektrikem C jako funkci kapacity bez dielektrika C_0 .

Řešení: Jak jsme si již několikrát uvedli, kapacita deskového kondenzátoru je $C_0 = S\varepsilon_0/d$. Z výše uvedeného plyne, že kapacita kondenzátoru (s dielektrikem) se nezmění, ať umístíme dielektrikum mezi desky kamkoli. Elektrická intenzita v oblasti bez dielektrika bude rovna $E_{\text{bez}} = \sigma/\varepsilon_0$, intenzita v oblasti s dielektrikem bude $E_{\text{diel}} = \sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$. Napětí pak bude dráhovým integrálem těchto intenzit. Vzhledem k tomu, že intenzita zůstává na jednotlivých oblastech konstantní, lze napětí zapsat jako

$$U = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} (d-a) + \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r} a,$$

kde $d-a$ označuje šířku oblasti bez dielektrika a a šířku dielektrika. Kapacitu vypočítáme podle definice (21) jako

$$C = \frac{S\varepsilon_0}{(d-a) + \frac{1}{\varepsilon_r} a} = \frac{C_0 d}{(d-a) + \frac{1}{\varepsilon_r} a}.$$

Př. 6.6.

Zadání: Deskový kondenzátor jsme připojili ke konstantnímu napětí U . Do kondenzátoru potom vsuneme dielektrickou destičku tak, aby zcela vyplňovala mezeru mezi deskami kondenzátoru. Jakou práci vykoná zdroj napětí?

Řešení: Napětí a kapacity jsou

$$U = \frac{Q_{\text{bez}}}{C_{\text{bez}}} = \frac{Q_{\text{diel}}}{C_{\text{diel}}}, \quad C_{\text{bez}} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad C_{\text{diel}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \Rightarrow Q_{\text{diel}} = Q_{\text{bez}} \varepsilon_r.$$

Jak jsme si uvedli dříve, práci vypočítáme jako integrál

$$W = \int_{Q_{\text{bez}}}^{Q_{\text{diel}}} U dQ = U (Q_{\text{diel}} - Q_{\text{bez}}) = U Q_{\text{bez}} (\varepsilon_r - 1).$$

Př. 6.7.

Zadání: Uvažujme kovovou kouli o poloměru R nabitou nábojem Q a potaženou dielektrikem o tloušťce d . Určete povrchovou hustotu náboje na vnitřním a vnějším povrchu dielektrika a hustotu náboje uvnitř dielektrika, jehož relativní permitivita je konstanta ε_r .

Řešení: Vztah mezi vektorem polarizace, elektrickou intenzitou a indukcí vypadá při využití lineární aproximace následovně:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}_{\text{diel}} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}_{\text{diel}} = \frac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \vec{D}.$$

Vidíme, že vektor polarizace se rovná vektoru elektrické indukce vynásobenému konstantou. Pokud víme, že v dielektriku platí $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ (náboj generující pole je pouze v nabitě kouli), pak musí platit $\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = 0$, tedy dle rovnice (24) $\rho_{\text{pol}} = 0$.

Plošná hustota povrchového náboje dielektrika se rovná velikosti vektoru polarizace, takže

$$\sigma_{\text{pol}} = P = \frac{(\varepsilon_r - 1)}{\varepsilon_r} \frac{Q}{4\pi r^2}.$$

Pro vnitřní povrch platí $r = R$ a pro vnější $r = R + d$. Celkový náboj na plochách vyjde $Q_{\text{pol}} = Q(\varepsilon_r - 1)/\varepsilon_r$.

Př. 6.8.

Zadání: Uvažujte válcový kondenzátor sestávající ze dvou souosých kovových válcových ploch o poloměrech R_1 a R_2 a dielektrika, jenž vyplňuje mezeru mezi nimi. Určete kapacitu tohoto kondenzátoru. Okrajové vlastnosti zanedbejte.

Řešení: Je-li náboj na vnitřním válci roven Q , pak z Gaussova zákona vypočítáme velikost elektrické intenzity v dielektriku jako $E_{\text{diel}} = \frac{Q}{2\pi r l \varepsilon_0 \varepsilon_r}$ (viz příklad 4.3), kde l označuje délku válce. Napětí je určitý integrál z intenzity (viz příklad 4.7), platí $U = \frac{Q}{2\pi l \varepsilon_0 \varepsilon_r} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$. Konečně kapacita tohoto kondenzátoru se rovná

$$C = \frac{2\pi l \varepsilon_0 \varepsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}.$$

6.4 Elektrické pole na rozhraní dvou dielektrik

V předchozích podkapitolách jsme si vysvětlili, jak se chová elektrické pole v dielektriku. V této podkapitole popíšeme chování elektrického pole na rozhraní dvou dielektrik. Podobně jako v optice, kdy na rozhraní dvou různých optických prostředí dochází k lomu světla, v tomto případě dochází k lomu siločár elektrické intenzity.

Nejdříve odvodíme rovnici pro rotaci elektrostatičkého pole. V kapitole 1.4 jsme hovořili o konzervativních a nekonzervativních polích. Splňuje-li elektrické pole rovnici

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0, \quad (30)$$

nazývá se konzervativní. Elektrostatické pole je pole konzervativní. Pakliže by nebylo, mohli bychom v takovém poli pohybem nabitě částice po uzavřené křivce vykonávat práci.

Tento výraz lze upravit podobným způsobem, jako jsme upravili Gaussův zákon. Dráhový integrál přes uzavřenou křivku převedeme na plošný integrál přes plochu, kterou křivka obepíná

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_S \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

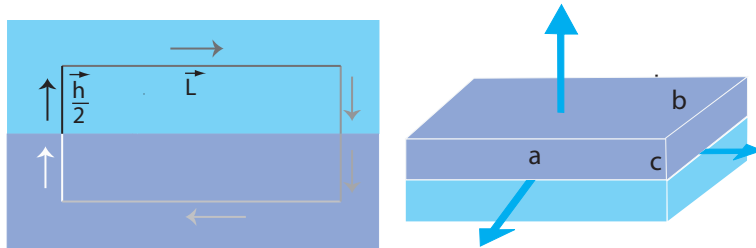
kde $d\vec{S}$ označuje infinitezimál plochy vynásobený normálou. Tato identita se nazývá **Stokesova věta**.

Aby se výše uvedený vztah rovnal nule pro jakoukoli plochu, přes kterou je integrován, musí být roven nule výraz uvnitř závorky. Zapsáním tohoto vztahu získáme neúplnou verzi Faradayova zákona pro magnetické pole nezávislé na čase

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0. \quad (31)$$

Kompletní verzi Faradayova zákona si uvedeme v následujících kapitolách. Vztah (31) říká, že elektrostatické pole je nevírové. Tím jsme však poněkud odběhli od hlavního tématu. Vraťme se opět k rovnici (30).

Uvažujme malou smyčku ve tvaru obdélníku o délce stran L a h . Tato smyčka leží na rozhraní dvou dielektrik tak, aby rozhraní procházelo jejím středem (viz první obrázek 33), a současně aby strana L byla rovnoběžná s rozhraním a strana h kolmá na rozhraní.



Obrázek 33: Obdelníková smyčka a kvádřová plocha na rozhraní dielektrik.

Víme, že integrál z elektrické intenzity přes tuto smyčku se rovná nule. Tento integrál můžeme vyčíslit. Obdelník rozložíme na 6 částí (v obrázku označených šipkami), celkový integrál pak bude součet přes tyto části, které jsou určeny skalárním součinem délky orientovaného úseku s elektrickou intenzitou. Pro dostatečně malou smyčku (kde v každém ze dvou dielektrik můžeme uvažovat pole přibližně homogenní) platí

$$0 = \vec{E}_1 \frac{\vec{h}}{2} + \vec{E}_1 \vec{L} - \vec{E}_1 \frac{\vec{h}}{2} - \vec{E}_2 \frac{\vec{h}}{2} - \vec{E}_2 \vec{L} + \vec{E}_2 \frac{\vec{h}}{2} \Rightarrow \vec{E}_1 \vec{L} = \vec{E}_2 \vec{L}.$$

V této rovnici lze stejné členy s opačným znaménkem jednoduše odečíst a výraz se značně zjednoduší.

Pro skalární součin platí $\vec{E} \vec{L} = EL \cos \alpha$, kde α označuje úhel, jenž svírá vektor intenzity s rozhraním dielektrik (neboli s vektorem \vec{L}).

V optice se dopadající úhly popisují od kolmice. V následujícím textu budeme používat stejné značení. Proto musíme v zápisu přejít od α k φ , a to podle vztahu $\cos \alpha = \sin \varphi$, kde φ

je úhel, který svírá kolmice s elektrickou intenzitou. Výše uvedený výraz pro skalární součin se změní na

$$E_1 \sin \varphi_1 = E_2 \sin \varphi_2.$$

Vraťme se nyní k upravenému Gaussovu zákonu (26). Ten popisuje vztah mezi elektrickou indukcí a zdrojovou hustotou náboje. Jak jsme si vysvětlovali na začátku této kapitoly, na povrchu dielektrik vzniká v elektrickém poli nenulová povrchová hustota náboje (zeslabující vnější pole uvnitř dielektrika). Když k sobě přiložíme dva povrchy dielektrik s různou permitivitou, na rozhraní zůstane nenulová hustota náboje, jež ovlivňuje elektrickou intenzitu. Povrchová hustota náboje na dielektriku však nepředstavuje původní zdroj – bez vnějšího pole by nevznikla. Proto jsme zavedli elektrickou indukci. Ta závisí pouze na původním zdroji, jak popisuje rovnice (26).

Na rozhraní dvou neutrálních dielektrik žádný původní zdroj elektrického pole neuvažujeme. Rovnice (26) se zjednoduší do tvaru $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$. Opět připomeňme, že pro elektrickou intenzitu by tento vztah na rozhraní neplatil, jelikož na rozhraní je hustota náboje nenulová. Uvažujme objemový integrál (přes konečný objem) z této rovnice. Pomocí matematické Gaussovy věty upravíme tento integrál do tvaru

$$0 = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{D} dV = \oint_S \vec{D} d\vec{S}, \quad (32)$$

kde S je orientovaná plocha obalující objem V .

Uvažujme malý kvádr, jehož středem prochází rozhraní dvou dielektrik (viz druhý obrázek 33). (Malý ho "chceme" proto, aby indukce zůstala v obou polovinách přibližně konstantní a rozhraní dielektrik přibližně ploché). Stěna ab je orientována tak, aby byla rovnoběžná s rozhraním. Použijeme-li kvádr jako integrální plochu v rovnici (32), můžeme integrál jednoduše rozdělit na 10 částí

$$\vec{S}_{ab}\vec{D}_1 + \frac{\vec{S}_{ac}\vec{D}_1}{2} + \frac{\vec{S}_{bc}\vec{D}_1}{2} - \frac{\vec{S}_{ac}\vec{D}_1}{2} - \frac{\vec{S}_{bc}\vec{D}_1}{2} - \vec{S}_{ab}\vec{D}_2 + \frac{\vec{S}_{ac}\vec{D}_2}{2} + \frac{\vec{S}_{bc}\vec{D}_2}{2} - \frac{\vec{S}_{ac}\vec{D}_2}{2} - \frac{\vec{S}_{bc}\vec{D}_2}{2} = 0.$$

Stejně jako v předešlém případě je většina členů na protějších stěnách kváдру identická, ale s opačným znaménkem. Po jejich odečtení zůstane pouze

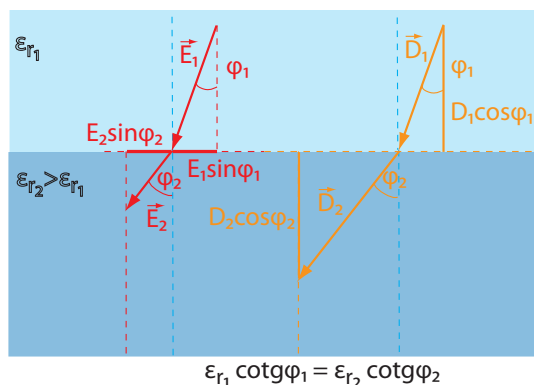
$$\vec{S}_{ab}\vec{D}_1 = \vec{S}_{ab}\vec{D}_2.$$

Orientaci plochy S_{ab} jsme popsali pomocí normálového vektoru (také kolmého k rozhraní). Užitím vztahu pro skalární součin dvou vektorů, které svírají vektor φ , obdržíme

$$D_1 \cos \varphi_1 = D_2 \cos \varphi_2.$$

V předchozí podkapitole jsme si uvedli vztah mezi vektory elektrické intenzity \vec{E} a indukce \vec{D} , konkrétně lineární aproximaci vyjádřenou vztahem $\vec{E} \varepsilon_0 \varepsilon_r = \vec{D}$. Použitím obou výsledků pro \vec{E} a \vec{D} získáme konečnou rovnici určující **vztah pro lom elektrické intenzity na rozhraní dvou dielektrik** (viz obrázek 34):

$$\varepsilon_{r1} \cotg(\varphi_1) = \varepsilon_{r2} \cotg(\varphi_2). \quad (33)$$



Obrázek 34: Lom elektrické intenzity a indukce na rozhraní dvou prostředí.

6.5 Dielektrická pevnost

Dielektrická pevnost je vlastností dielektrik. V předchozích kapitolách jsme hovořili o tom, že pomocí dielektrika můžeme snadno zvýšit kapacitu kondenzátorů. Teoreticky bychom byli schopni vytvořit kondenzátor téměř libovolně velké kapacity v závislosti na relativní permitivitě. To by bylo velmi výhodné. Zmínili jsme, že kondenzátory fungují jako úložiště elektrického náboje. Mohli bychom tak ukládat neomezený náboj – s tím by bylo spojeno také to, že bychom uložili i neomezené množství energie. Opak je však pravdou. Jeden z největších problémů současné energetiky spočívá v ukládání elektrické energie. V současnosti používaná zařízení se nemohou pochlubit vysokou kapacitou ani účinností. Za tento problém v případě kondenzátorů zodpovídá právě dielektrická pevnost.

Uvažujme dielektrikum v elektrickém poli. Se zvětšujícím se elektrickým polem roste také polarizace dielektrika. Při dostatečně velké elektrické intenzitě dojde k urychlení volného elektronu obsaženého v dielektriku, který následně narazí do neutrálního atomu. Vlivem srážky se z atomu uvolní další množství elektronů rovněž urychlovaných elektrickým polem. Dochází tak k řetězové reakci, podobně jako při výbuchu atomové bomby. Řetězová reakce je tak silná, že dojde k lokálnímu poškození (proražení) dielektrika. Vznikne kanál, jímž mohou elektrony proudit. Nastane stejná situace, jako by byl dielektrikem provlečen vodič. Děj lze přirovnat k proražení přehrady. Dírou v přehradě také voda odteče. Napětí potřebné k tomuto ději se nazývá **průrazné napětí**.

Proražení lze zabránit dvojitým způsobem: můžeme snížit napětí na kondenzátoru pod průrazné napětí, tím ale dojde i ke snížení množství nábojů uložených v kondenzátoru, lze také zvětšit tloušťku dielektrika, sníží se však kapacita kondenzátoru, a současně se zvětší jeho objem. Veličina popisující průrazné napětí vztahované na tloušťku dielektrika se nazývá **dielektrická pevnost** a její jednotky jsou V/m.

Př. 6.9.

Zadání: Uvažujme několik dielektrických látek s danou relativní permitivitou a dielektrickou pevností D_p . Dále uvažujme deskové kondenzátory stejného tvaru obsahující různá dielektrika. Vyberte nejvhodnější kondenzátor pro uložení největšího množství náboje.

Řešení: Náboj uložený v deskovém kondenzátoru se rovná

$$Q = UC = U \frac{S \varepsilon_0 \varepsilon_r}{d} = D_p \varepsilon_r S \varepsilon_0.$$

Látka	D_p [MVm ⁻¹]	ϵ_r
Papír	16	3,5
Sklo	14	7,6
Voda	16	80
Vzduch	3	1
Křemen	8	12
Polystyren	24	2,6

Tabulka 2: Dielektrická pevnost a relativní permitivita různých látek.

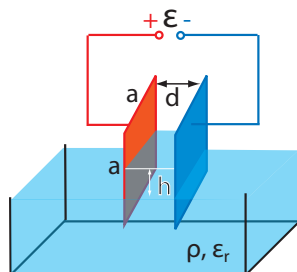
Náboj je úměrný dielektrické pevnosti násobené relativní permitivitou. Nejvyšší hodnoty dosahuje součin těchto dvou veličin pro vodu (z látek uvedených v tabulce 6.5).

Příklady k procvičení 6.1.

Uvažujte kondenzátor tvořený dvěma soustřednými kulovými plochami o poloměrech R_1 a R_2 nabitými nábojem Q . Mezera mezi kondenzátory je vyplněna dielektrikem. Určete kapacitu takového kondenzátoru.

Příklady k procvičení 6.2.

Uvažujte deskový kondenzátor (vzdálenost desek d) o tvaru čtverce s délkou hrany a částečně ponořeného do kapaliny o permitivitě ϵ_r a hustotě ρ . Kondenzátor je ponořený do kapaliny dle obrázku 35. Určete, jak vysoko vystoupá hladina kapaliny, je-li kondenzátor připojen na zdroj elektromotorického napětí \mathcal{E} . Zanedbejte vliv povrchového napětí kapaliny.



Obrázek 35: Deskový kondenzátor ponořený v dielektrické kapalině.

Příklady k procvičení 6.3.

Uvažujte válcový kondenzátor se souosými válci o vnitřním poloměru R_1 a vnějším poloměru R_2 . Rozdíl poloměrů je mnohem menší jak délka kondenzátoru l . Kondenzátor je svisle ponořen do kapaliny o permitivitě ϵ_r a hustotě ρ . Určete, jak vysoko dovnitř kondenzátoru vystoupá hladina kapaliny, je-li napětí na deskách kondenzátoru U . Zanedbejte vliv povrchového napětí kapaliny.

Příklady k procvičení 6.4.

Uvažujte deskový kondenzátor, který je vyplněn dielektrikem, jehož permitivita se lineárně mění od desky k desce. Na povrchu desek uvažujte permitivitu ε_1 a ε_2 . Vzdálenost desek je l a plocha S . Jaká je kapacita C kondenzátoru?

Příklady k procvičení 6.5.

Uvažujte kulový kondenzátor (obě koule jsou soustředné) o vnitřním poloměru R_1 a vnějším poloměru R_2 . Mezi kulovými slupkami je látka s permitivitou $\varepsilon = \alpha/r^2$, kde r je radiální vzdálenost od středu kuličky a α je konstanta. Určete kapacitu kondenzátoru C .

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 84-86, 118-135*

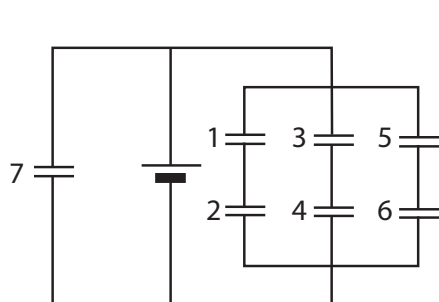
Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 174-204*

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 144-171*

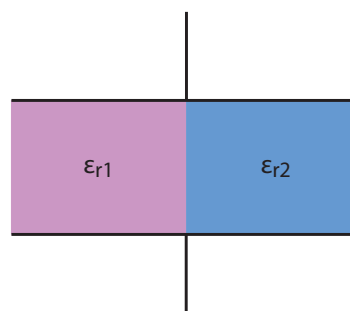
Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 26 (26.6 – 26.8)*

Čtvrtsemestrální písemná práce č. 2.

1. Tenkostěnná válcová trubka o poloměru R nese plošný náboj σ . Určete velikost vektoru elektrické intenzity E vně ($r > R$) a uvnitř ($r < R$) trubky v závislosti na vzdálenosti r od osy trubky. Nakreslete graf funkce E v intervalu $(0; 2R)$. Určete směr vektoru \vec{E} , víte-li, že trubka má kladný náboj. Kolikrát se zvětší/zmenší E v případě $2R$ oproti $1R$?
2. Určete kapacitu kondenzátoru, který se skládá ze dvou nabitých sférických ploch o poloměru R_1 a R_2 se stejnou polohou středu a o plošné hustotě náboje $\sigma_1, -\sigma_2$. Velikost celkového náboje každé plochy je stejná, má však opačné znaménko.
3. Vypočtete obecně celkovou kapacitu kondenzátorů zapojených podle obrázku 1. Určete, čemu bude rovna kapacita zapojení, pokud budou mít všechny kondenzátory stejnou kapacitu C .
4. Uvnitř kondenzátoru se nachází dva různé druhy dielektrik s permitivitou ϵ_{r1} a ϵ_{r2} . Určete kapacitu kondenzátoru, znáte-li vzdálenost desek d , plochu desek S , permitivitu vakua ϵ_0 . Dielektrikum je vloženo do kondenzátoru podle obrázku 2. Oba kusy dielektrik jsou stejně velké.



Obr. 1.



Obr. 2.

7 Ohmův zákon a Kirchhoffovy zákony

7.1 Elektrický proud

Pro vyjádření Ohmova zákona si nejprve správně definujme potřebné elektrické veličiny. Ve výše uvedeném textu jsme si již uvedli, že **napětí** U je rozdíl potenciálů $U = -\Delta\varphi$. Dále jsme zavedli pojem „**náboj**“, veličinu, která je přirozenou vlastností těles a na které závisí elektrostatická přitažlivá síla.

Přemístování elektrického náboje se nazývá **elektrický proud**. Uvažujme plochu, kterou za daný časový interval Δt projde množství náboje ΔQ . Proud je úměrný prošlému náboji a nepřímo úměrný času za který náboj plochou projde. Pro průměrný elektrický proud platí

$$\bar{I} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Limitním přechodem $\Delta t \rightarrow 0$ získáme okamžitý proud

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (34)$$

Zde lze uvést analogii s vodou v řece. Průtok vody v řece nazveme vodní proud. Čím je kratší časový interval, za který nějaké množství vody proteče, tím je vodní proud větší. Podobně, čím je vody při protékání více, tím je vodní proud silnější.

Ačkoliv elektrický proud definujeme jako velikost prošlého náboje za čas, základní jednotkou SI není coulomb [$C = As$], ale ampér [A]. Proud je definován v SI jako základní jednotka pomocí silových účinků. Jeden ampér teče ve dvou rovnoběžných, nekonečně dlouhých vodičích o kruhovém průřezu ve vzdálenosti jednoho metru právě tehdy, když na metr délky vodiče působí síla $2 \cdot 10^{-7}N$.

Proud nemusí být vždy zcela vhodná veličina popisující uspořádaný pohyb nábojů. Analogie s řekou nám ukazuje, že voda v blízkosti břehu se může pohybovat pomaleji než uprostřed.

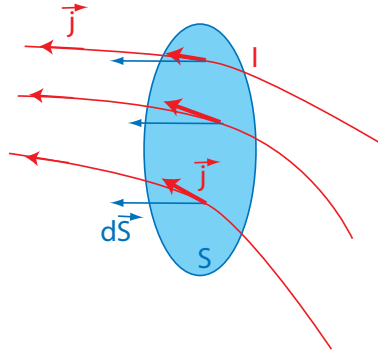
Z tohoto důvodu si definujeme **hustotu elektrického proudu** \vec{j} . Bude-li proudová hustota ve všech bodech vodiče (nosiče proudu – ekvivalent koryta řeky) stejná, pak proud bude

$$I = \vec{j} \cdot \vec{S},$$

kde \vec{S} je plocha řezu (ne nutně kolmého) vodičem. Pohybují-li se náboje kolmo na plochu, vztah se zjednoduší na $I = jS$. Proudová hustota nemusí být nutně konstantní po celé ploše. Pak se proud z proudové hustoty získá pomocí plošného integrálu, platí

$$I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}. \quad (35)$$

Uvažujme vodič o průřezu S , kterým protéká proud I . Proud v jednotlivých částech vodiče popisuje proudová hustota \vec{j} (viz obrázek 36). Uvažujme, že plochou S proběhne za nějaký krátký časový interval dt náboj dQ , tedy platí rovnice (34). Když se na vodič podíváme podrobněji, zjistíme, že ne nutně celou plochou musí procházet stejný náboj. Pomocí definice objemové hustoty náboje můžeme uvažovat, že infinitezimální náboj ddQ za infinitezimálně malý čas dt prošel plochou dS a vzdálil se od ní o dl . Ve výše uvedeném výrazu jsme uvedli před nábojem Q dvakrát dd . Nepřeklepli jsme se, myslíme tím, že náboj prošel jak malou



Obrázek 36: Proud I protékající plochou S .

plochou dS , tak za malý čas dt . V definici hustoty náboje nahradíme $dV = d\vec{l} \cdot d\vec{S}$. Pak lze jednoduše zapsat $ddQ = \rho d\vec{l} \cdot d\vec{S}$, kde \vec{l} je vektor, v jehož směru a délce se posunuly náboje za krátký čas dt . Jednoho d se jednoduše zbavíme dělením dt , tedy

$$dI = \frac{ddQ}{dt} = \rho \frac{d\vec{l}}{dt} \cdot d\vec{S} = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}.$$

K tomuto výsledku můžeme dojít za předpokladu, že náboj ve vodiči se nikde neakumuluje ani neubývá, je v čase (nikoli v prostoru) konstantní. Ze vztahu (35) získáme $dI = \vec{j} \cdot d\vec{S}$. Vektor hustoty proudu a vektor rychlosti náboje míří ve stejném směru, lze napsat

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \quad (36)$$

7.2 Rovnice kontinuity

Uvažujme uzavřenou plochu (proto zvolíme integrál přes uzavřenou plochu na rozdíl od předešlých výrazů), uvnitř které se nachází náboje, jež mohou volně unikat mimo tuto plochu. Výše uvedenou situaci popisují rovnice

$$I = -\frac{\partial Q}{\partial t}, \quad I = \oint \vec{j} \cdot d\vec{S}, \quad Q = \int \rho dV.$$

Do první rovnice jsme vložili znaménko mínus z důvodu, že uvažujeme kladný proud, jenž snižuje náboj uzavřený v ploše S . Dále jsme změnil výraz z totální časové derivace na partiální, která je vhodnější pro operace, jež chceme provést. Kombinací výše uvedených vztahů obdržíme

$$\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Uvažujme-li, že objem V pod uzavřenou plochou S je na čase nezávislý, lze derivaci na pravé straně rovnice vložit do integrálu. Jak jsme již dříve ukázali, lze plošný integrál nahradit objemovým $\oint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int \vec{\nabla} \cdot \vec{j} dV$. Sejmutím integrálu obdržíme rovnici

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (37)$$

Tato rovnice se jmenuje **rovnice kontinuity** a má velký význam nejen v elektromagnetismu, ale i v jiných fyzikálních disciplínách, například v teorii tekutin, v kvantové mechanice a v dalších.

Rovnici lze překládat tak, že v čase snižující se (proto záporné znaménko, pokud člen s hustotou převedeme na opačnou stranu) hustota náboje v daném objemu doprovází divergující hustota proudu, jenž náboj odnáší. Slovo divergující označuje jak operátor divergence, tak to, že vektory \vec{j} míří směrem ven od daného objemu (viz úvodní kapitoly).

Tento výsledek a výsledek předešlý lze dosadit do jednoho vztahu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (38)$$

7.3 Ohmův zákon

Ohmův zákon patří k nejnámějším zákonům elektromagnetismu. Vyjadřuje úměrnost mezi napětím U mezi konci vodiče a elektrickým proudem I . Čím je napětí mezi konci vodiče vyšší, tím se zvýší i proud protékající vodičem. Konstanta úměrnosti se nazývá **elektrický odpor** R . Platí, že čím je odpor větší, tím se proud protékající vodičem zmenší. Ohmův zákon lze vyjádřit ve tvaru

$$I = \frac{U}{R},$$

nebo v zapamatovatelnějším tvaru

$$U = RI. \quad (39)$$

Převrácená hodnota odporu se nazývá **elektrická vodivost**

$$G = \frac{1}{R}.$$

Celkovou představu si čtenář může udělat na základě analogie mezi proudem ve vodiči a proudem v potoce. Pokud je rozdíl mezi výškou hladiny vody na kopci a pod kopcem (analogie napětí, neboli rozdíl dvou potenciálů) vyšší, bude i voda téct rychleji a proud se zvýší. Když se ale v potoce nachází kameny (analogie odporu), voda je bude muset obtékat a nedostane se dolů tak rychle, proud se sníží.

Zjevně elektrický odpor je veličina, jež se týká celého vodiče. Pomocí výše uvedené hustoty proudu lze odvodit i takzvaný **diferenciální Ohmův zákon**

$$\vec{E} = \rho \vec{j}, \quad (40)$$

kde \vec{E} se nazývá vektor elektrické intenzity, ρ představuje rezistivitu a \vec{j} značí vektor proudové hustoty. Z definice proudové hustoty a napětí lze rezistivitu z homogenního vodiče za použití $U = LE$, $I = jS$ získat jako

$$\rho = \frac{S}{L}R, \quad (41)$$

kde S značí průřez vodiče a L je jeho délka. Při konstantní rezistivitě je elektrický odpor úměrný délce vodiče a nepřímo úměrný jeho průřezu.

7.4 Kirchhoffovy zákony

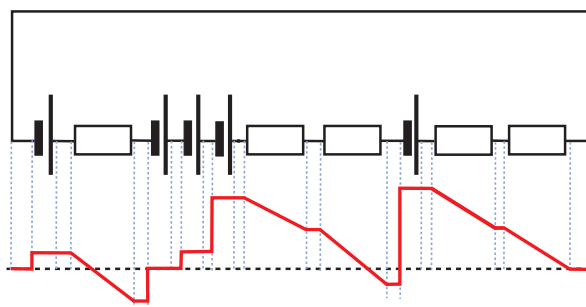
V jednoduchém vodiči uvažujeme, že náboj se nikde nekumuluje ani neubývá. Pak ze zákona zachování náboje vyplývá, že proud vtékající do jisté oblasti vodiče je roven proudu z této oblasti vytékající, a to i navzdory tomu, když se vodič mezitím rozvětví. Bod větvení se nazývá uzel. Tento zákon se jmenuje **1. Kirchhoffův zákon** a lze jej napsat ve tvaru:

- Součet všech proudů do uzlu vtékajících se rovná součtu proudů z uzlu vytékajících.

$$\sum I_{\text{In}} = \sum I_{\text{Out}}. \quad (42)$$

Analogie s proudy v řece je jasná. Součet množství vody ze všech přítoků vlévajících se do soutoku se rovná množství vody ze soutoku vytékající.

Uvažujme nyní uzavřený obvod. V tomto obvodu se nachází zdroje napětí a rezistory (součástky, jež mají nenulový odpor). Uvažujme, že vodiče spojující zdroje mají nulové odpory. Každý zdroj v obvodu vytváří přírůstek napětí (kladný rozdíl potenciálů) tzv. elektromotorické napětí \mathcal{E} a každý rezistor jeho úbytek (záporný rozdíl potenciálů) U_R – viz obrázek 37.



Obrázek 37: Uzavřený obvod se zdroji a rezistory a vyznačeným průběhem potenciálu.

Potenciál je konstantní v části obvodu, kde se nenachází rezistor ani zdroj. V obrázku před prvním zdrojem musí být hladina potenciálu ve stejné výšce jako za posledním rezistorem. Na základě této úvahy lze formulovat **2. Kirchhoffův zákon** ve tvaru

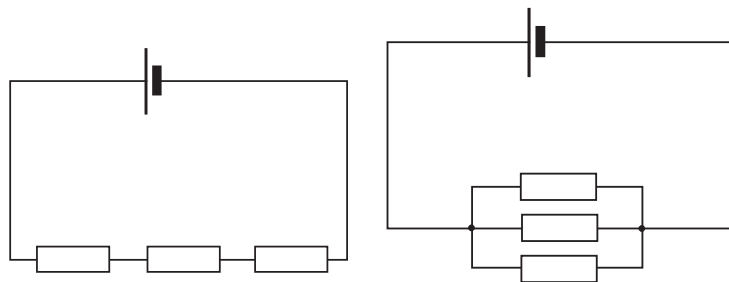
- Součet elektromotorických napětí (zkratka – emn.) na jednotlivých zdrojích v uzavřené smyčce se rovná součtu úbytku napětí na rezistorech.

$$\sum_j \mathcal{E}_j = \sum_i U_{iR}. \quad (43)$$

Úbytek napětí na rezistorech lze vyjádřit pomocí Ohmova zákona $U = RI$. Kirchhoffův zákon (43) lze pro jednoduchou smyčku zapsat jako

$$\sum_j \mathcal{E}_j = I \sum_i R_i.$$

Proud jsme mohli vytknout před sumu pouze pro jednoduchou smyčku, protože v ní musí být proud dle prvního Kirchhoffova zákona konstantní.



Obrázek 38: a) Sériově a b) paralelně zapojené odpory.

Vraťme se zpět k vodní analogii. Představme si zdroj napětí jako čerpadlo a rezistor jako peřeje (nebo jiný úsek řeky, kde se hladina sníží). Je-li voda hnána v uzavřeném obvodu, přírůstek výšky hladiny na čerpadlech se musí rovnat úbytku výšky hladiny na peřejích.

Díky přepsání druhého Kirchhoffova zákona pomocí odporů a proudů můžeme odvodit jeden důležitý princip. Uvažujme jednoduchý obvod, v němž zapojíme za sebou (neboli **do série**) několik rezistorů (viz obrázek 38 a)). V obvodu se také nachází jeden zdroj elektromotorického napětí. Evidentně platí

$$\mathcal{E} = I \sum_i R_i = IR,$$

kde R označuje celkový odpor jednotlivých rezistorů. Celkový odpor sériově zapojených rezistorů se rovná součtu jednotlivých odporů

$$\sum_i R_i = R. \quad (44)$$

Stejně jako z druhého Kirchhoffova zákona lze odvodit vztah pro sčítání sériově zapojených rezistorů, dá se z prvního Kirchhoffova zákona odvodit ekvivalentní výraz pro **paralelně** zapojené rezistory (vedle sebe viz obrázek 38 b)). Do vodiče před rozvětvením teče proud I . Součet proudů ve všech větvích dává celkový proud $I = \sum_i I_i$. Jelikož pracujeme s ideálními vodiči, uvažujeme na levé straně stejný potenciál u všech rezistorů (to stejně platí pro pravou stranu). Úbytek napětí je na všech rezistorech stejný. Můžeme díky Ohmovu zákonu psát $\frac{U}{R} = \sum_i \frac{U}{R_i}$, neboli

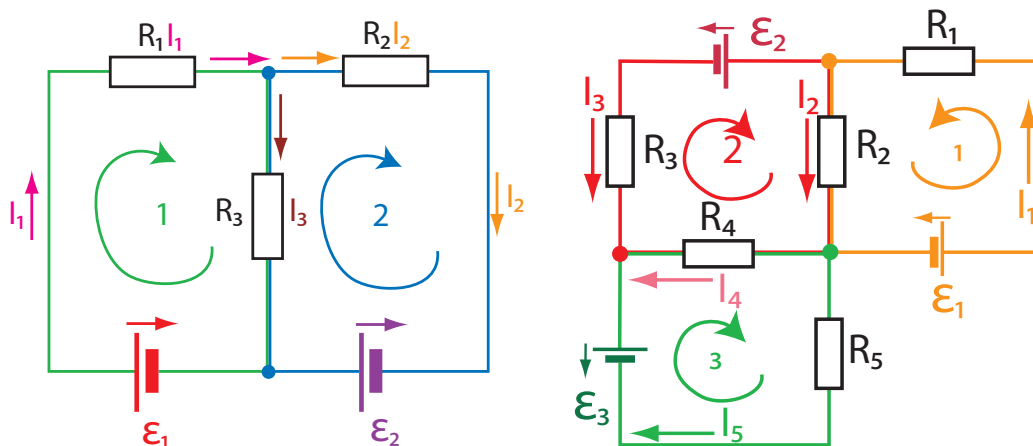
$$\frac{1}{R} = \sum_i \frac{1}{R_i}. \quad (45)$$

Převrácená hodnota celkového odporu paralelně zapojených rezistorů se rovná součtu převrácených hodnot jednotlivých odporů.

Př. 7.1.

Zadání: Uvažujme obvod zakreslený na prvním z obrázků 39. V obvodu zapojíme zdroje elektromotorického napětí a rezistory s následujícími parametry: $\mathcal{E}_1 = 7\text{V}$, $\mathcal{E}_2 = 3\text{V}$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$. Jaký je proud protékající jednotlivými rezistory?

Řešení: Je výhodné si pro zjednodušení do obvodu zakreslit smyčku (viz obrázek 39) a směry proudů vyznačit šipkami. Šipky znázorňující emn. se zakreslují s opačným směrem



Obrázek 39: Elektrický obvod.

jak směr kladného proudu, které zdroj napětí vytváří. Průběh napětí (přírůstek na zdrojích, úbytek na rezistorech) v první smyčce z druhého Kirchhoffova zákona vyjadřuje rovnost (začneme u zdroje emn.): $\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$. V druhé smyčce pak: $\mathcal{E}_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 = 0$. V této rovnici je u třetího odporu opačné znaménko. To proto, že šipka proudu zakreslená v obrázku směřuje proti směru smyčky. Stejným způsobem bychom změnili znaménko, pokud by některé ze zakreslených emn. bylo otočeno na opačnou stranu. Z prvního Kirchhoffova zákona lze odvodit výraz pro proudy $I_1 = I_2 + I_3$.

Z těchto tří rovnic lze vyjádřit proud

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_3 R_2} = 1 \text{ A.}$$

Z rovnice pro první smyčku platí

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - I_3 R_3}{R_1} = 4 \text{ A.}$$

Z druhého Kirchhoffova zákona pak

$$I_2 = I_1 - I_3 = 3 \text{ A.}$$

Př. 7.2.

Zadání: Uvažujte obvod zakreslený na druhém z obrázků 39. Sestavte dle prvního a druhého Kirchhoffova zákona příslušné rovnice.

Řešení:

Dle prvního Kirchhoffova zákona platí

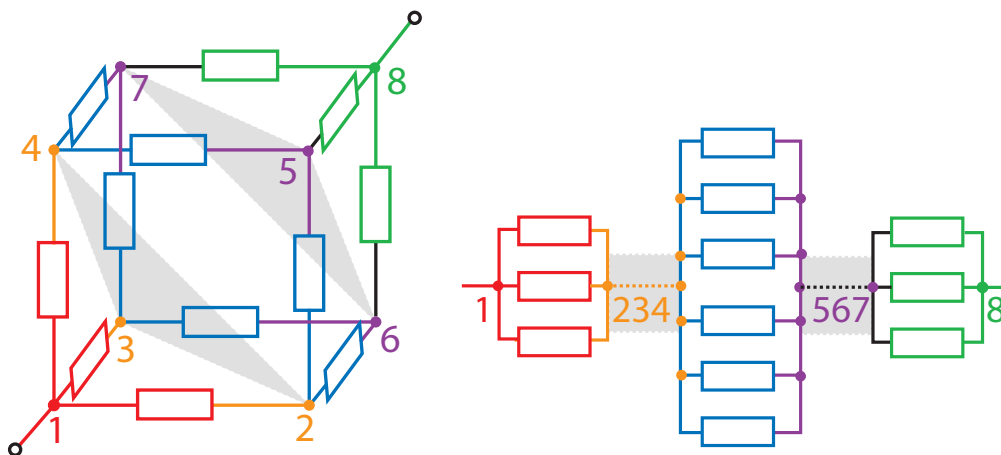
$$I_1 = I_2 + I_3, \quad I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

Dle druhého Kirchhoffova zákona

$$\mathcal{E}_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2, \quad \mathcal{E}_2 = R_2 I_2 + R_4 I_4 - R_3 I_3, \quad \mathcal{E}_3 = R_5 I_5 - R_4 I_4.$$

Př. 7.3.

Zadání: Uvažujme krychli, v jejíchž hranách se nachází 12 rezistorů o stejných odporech $R = 1\Omega$ (viz obrázek 40 a)). V každém rohu se nachází uzel. Jednotlivé uzly očíslováme od 1 do 8. Soustavu napojíme na zdroj emn. v protilehlých rozích (uzly 1 a 8). Vypočtete odpor celé soustavy.



Obrázek 40: a) Rezistory zapojené do tvaru krychle. b) Zapojení rezistorů se stejným výsledným odporem jako zapojení do krychle.

Řešení: Při bližším pohledu na danou soustavu si všimněme, že (díky rovnosti všech odporů) v uzlech 2, 3, 4, a pak dále v uzlech 5, 6, 7 je stejný potenciál. Zapojení tak půjde zakreslit v jiném tvaru (viz obrázek 40 b)), jenž má stejný výsledný odpor, daný vztahem

$$R = \frac{R}{3} + \frac{R}{6} + \frac{R}{3} = \frac{5}{6}R.$$

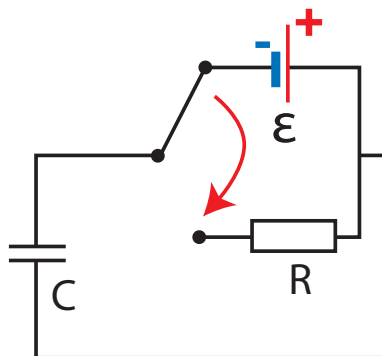
Př. 7.4.

Zadání: Uvažujme obvod na obrázku 41. Na jednoduchý obvod s kondenzátorem nejprve napojíme elektromotorické napětí, které nabije kondenzátor. Potom obvod přepneme tak, aby byl zdroj emn. nahrazen rezistorem. Jaká je závislost náboje na deskách kondenzátoru na čase? Obvod s tímto zapojením se nazývá RC obvod.

Řešení: Při emn. \mathcal{E} na zdroji se kondenzátor nabije nábojem $Q_0 = C\mathcal{E}$. Při přepnutí nahradí funkci zdroje napětí sám kondenzátor, kde $Q = CU$. Ten se snaží vybit tak, že tvoří proud, jenž teče skrze rezistor. Čím je kondenzátor vybitější, tím menší proud vyrábí. Velikost proudu získáme z Ohmova zákona $U = RI$. Víme, že proud je změna náboje v čase. Vzhledem k tomu, že se náboj na kondenzátoru v čase zmenšuje, je i znaménko u časové změny záporné. Veličiny R a C se chovají v tomto případě jako konstanty nezávislé na čase. Kombinací výše uvedených vztahů získáme

$$-R \frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{C} \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = \frac{-dt}{RC} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{t}{CR}},$$

kde Q_0 označuje náboj na deskách kondenzátoru před odpojením zdroje emn.



Obrázek 41: Elektrický obvod.

Př. 7.5.

Zadání: Uvažujme Gaussův zákon ve tvaru (10) a Ampérův zákon (později probereme podrobně) ve tvaru

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

kde \vec{B} vyjadřuje vektor magnetické indukce a μ_0 označuje permeabilitu vakua. Odvoďte z těchto dvou zákonů rovnici kontinuity.

Řešení: Divergencí Ampérova zákona získáme

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Divergenci a parciální derivaci podle času lze zaměnit $\vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Divergence elektrické intenzity je pak z Gaussova zákona hustota náboje podělená permitivitou vakua. Na levé straně se nachází operátor divergence z rotace. Z předešlého textu víme, že tento člen se rovná nule

$$0 = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Podělením permeability na obou stranách rovnice získáme rovnici kontinuity.

Př. 7.6.

Zadání: Na elektrony v kovu při daném napětí působí urychlující síla. Pokud bychom uvažovali pouze sílu danou napětím, brzy by se elektrony pohybovaly rychlostí blízkou rychlosti světla. Navíc by kov neměl elektrický odpor. Elektrony v reálných kovech dosahují maximálních rychlostí o mnoho řádů nižších. To je způsobeno srážkami s atomy, elektrony nebo ionty v kovu. Ty odeberou elektronu hybnost. Kov se srážkami zahřívá a vykazuje elektrický odpor. Určete střední volnou dobu mezi dvěma srážkami τ , platí-li vztah pro driftovou rychlost $v = a\tau$.

Řešení: Dle druhého Newtonova zákona lze vyjádřit zrychlení působící na částici o hmotnosti m (v reálném kovu hmotnost elektronu) v silovém poli F jako $a = F/m$. Pokud sílu

tvoří elektrostatické pole, pak platí $F = qE$, kde E vyjadřuje velikost vektoru elektrické intenzity a q označuje náboj částice v elektrickém poli. Střední volnou dobu obdržíme ze vztahu $\tau = vm/qE$. Dle diferenciálního Ohmova zákona $E = j\rho = vq\rho$ (q —hustota nábojů, ρ —rezistivita) můžeme určit $\tau = m/q\rho$. Výraz ještě upravíme pomocí $q = nq$, kde n označuje koncentrace nosičů náboje

$$\tau = \frac{m}{q^2 n \rho}.$$

Rezistivitu můžeme vyjádřit jako funkci střední volné doby, koncentrace náboje, velikosti náboje nosiče a hmotnosti nosiče

$$\rho = \frac{m}{q^2 n \tau}.$$

Př. 7.7.

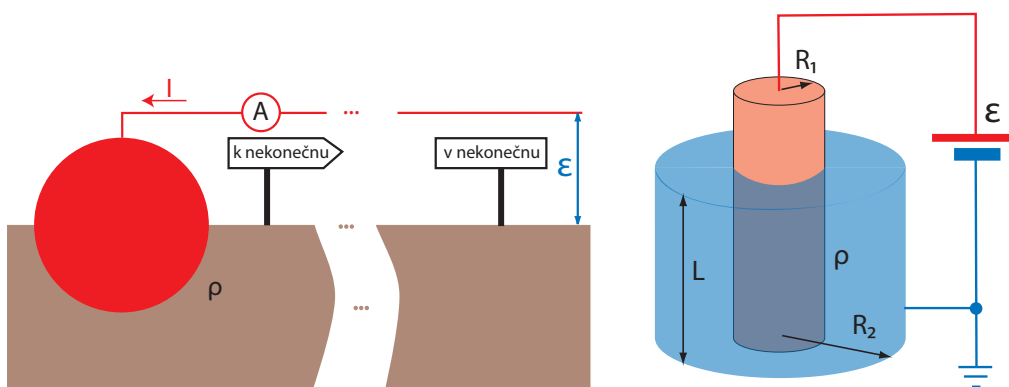
Zadání: Uvažujte polovodičovou součástku s PN přechodem. Nosiče proudu jsou na rozhraní přechodu jak elektrony, tak kladně nabitě díry. Uvažujte, že za $\Delta t = 16$ s se jedním směrem, plochou $S_1 = 1$ mm², přesune $N_e = 3,5 \cdot 10^{15}$ elektronů a směrem opačným $N_d = 2,5 \cdot 10^{15}$ děr. Jaký proud teče průřezem $S_2 = 1$ cm²?

Řešení: Díry a elektrony se pohybují opačným směrem. Díky rozdílnému znaménku však vytváří proud, jenž je součtem proudu jak od elektronů, tak od děr. Díra má stejně velký (ale opačný) náboj $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C jak elektron. Proto proud tekoucí plochou 1 cm² se rovná

$$I = \frac{(N_e + N_d)qS_2}{S_1\Delta t} = 6 \text{ mA}.$$

Příklady k procvičení 7.1.

Uvažujte vodivou kouli o poloměru R do půlky zahrabanou do země. Koule je udržována na konstantním emn. \mathcal{E} (viz obrázek 42 a)). Určete proud protékající koulí, víte-li, že rezistivita půdy, ve které je koule zahrabána, je konstantní ρ .



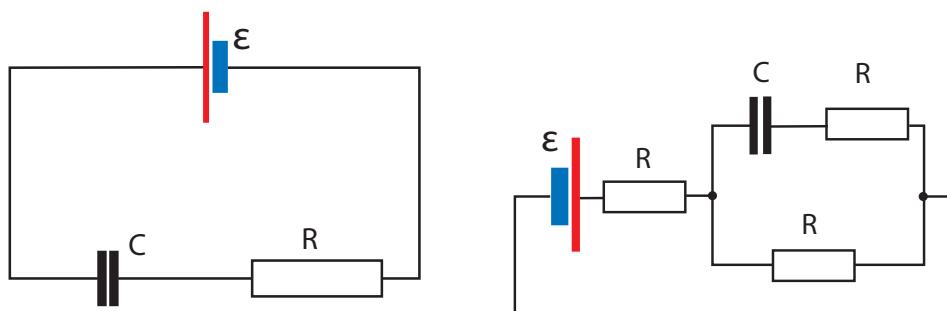
Obrázek 42: a) Koule z poloviny zasazená ve vodivém prostředí. b) Vodivý roztok ve válcové nádobě.

Příklady k procvičení 7.2.

Uvažujte nádobu, která je naplněna vodivým roztokem o rezistivitě ρ . Nádoba má válcovitý tvar o poloměru R_2 a výšce L . Vnitřní povrch válce (nikoli podstava) je vodivý a uzemněný (viz obrázek 42 b)). Středem nádoby prochází vodivý drát o poloměru R_1 napojený na konstantní emn. \mathcal{E} . Určete proud protékající roztokem.

Příklady k procvičení 7.3.

Uvažujte sériově zapojenou soustavu – zdroj emn. \mathcal{E} , rezistor R a kondenzátor C . Obvod je uzavřen do smyčky (viz první z obrázků 43). Na počátku je kondenzátor vybitý. Vypočtěte náboj na kondenzátoru a proud v obvodu v závislosti na čase.



Obrázek 43: Zapojení rezistorů a kondenzátorů.

Příklady k procvičení 7.4.

Uvažujte zapojení z druhého obrázku 43. Všechny rezistory mají stejný odpor R . Elektromotorické napětí zdroje uvažujte \mathcal{E} , kapacitu kondenzátoru uvažujte C . Na počátku je kondenzátor vybitý. Vypočtěte celkový proud v obvodu v závislosti na čase.

Příklady k procvičení 7.5.

Uvažujte zapojení z obrázku 40 s tím, že rezistory zaměňte s kondenzátory o kapacitě C . Vypočtěte celkovou kapacitu zapojení.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 173-198*

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 183-210*

Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 27, 28*

8 Magnetostatika a základy elektromagnetismu

8.1 Lorentzova síla

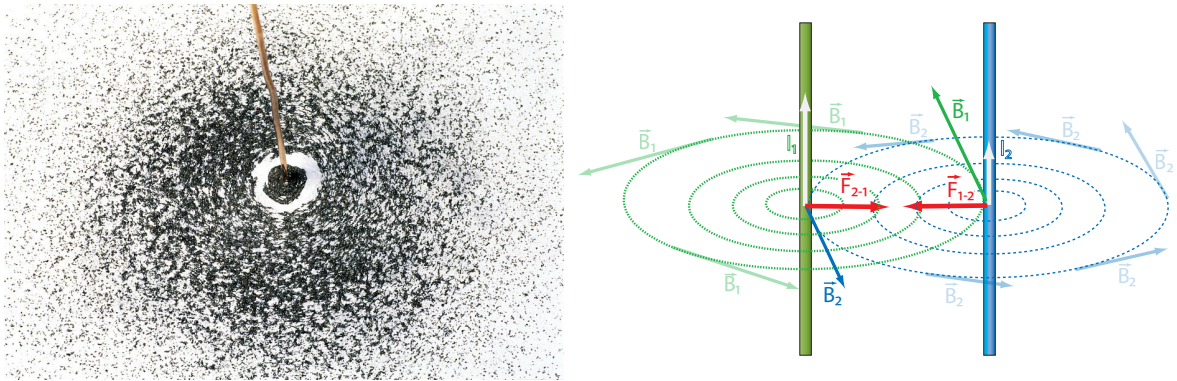
V předchozích kapitolách jsme si vysvětlili, že elektrické pole je generováno elektrickým nábojem. Rovnice popisující vztah mezi zdrojem a elektrostatickým polem se nazývá Gaussův zákon (10). Toto pole vytváří sílu $\vec{F} = q\vec{E}$ působící na nabitě částice. Zkráceně: náboje tvoří elektrické pole a toto pole působí silově na další náboje. Kromě elektrického pole působícího na elektrické náboje však existuje i pole magnetické. Čím je však toto pole generováno? A na co magnetické pole silově působí?



Obrázek 44: (Ne)působení magnetického pole.

V první polovině devatenáctého století si francouzský fyzik a matematik André-Marie Ampère (1775 – 1836) všiml zajímavého jevu, kdy dva vodiče, jimiž protékal elektrický proud, na sebe silově působily. Síla mezi dvěma rovnoběžnými vodiči byla buď přitažlivá (proud ve vodičích tekł ve stejném směru), nebo odpudivá (proud tekł ve směru opačném). Dnes víme, že elektrický proud tvoří pohybující se náboje. Máme situaci, kdy pohybující se náboje ve vodiči vytváří pole **magnetické**. Toto pole pak silově působí na pohybující se náboje. Což vysvětluje silové působení vodičů. Jednoduchým způsobem můžeme magnetické pole zobrazit pomocí feromagnetických pilin – viz obrázek 45 a). Piliny směřují podél **magnetických indukčních čar**. **Vektory magnetické indukce** \vec{B} , které slouží k popisu magnetického pole, jsou k těmto křivkám tečny.

Z obrázku 45 a) vidíme, že magnetické indukční čáry obtáčí vodič. Vektory magnetické indukce směřují kolmo na vektor rychlosti nábojů \vec{v} a tedy i na vektor proudové hustoty \vec{j} . Pokud jsou oba vodiče rovnoběžné, magnetické indukční čáry do druhého vodiče vstupují kolmo a síla působící na vodič svírá pravý úhel jak s vektory rychlostí nábojů ve vodiči, tak se zmiňovaným magnetickým polem, viz obrázek 45 b). Experimenty ukázaly, že změním-li pravý úhel mezi vektory rychlosti nábojů a magnetické indukce na libovolný úhel, sníží se i výsledná síla, a to jako $\sin \alpha$, kde α značí úhel mezi vektory. Z experimentů vyplývá, že výsledná síla působící na nabitou částici uvnitř vodiče je úměrná velikosti náboje této částice q , její rychlosti \vec{v} (která je úměrná proudu ve vodiči), magnetické indukci \vec{B} ve kterém se



Obrázek 45: a) Působení magnetického pole na železné piliny. b) Zobrazení Ampérova pokusu.

pohybuje (vytvářející druhým vodičem) a sinem úhlu který svírá vektor rychlosti s vektorem magnetické indukce. Dané chování popisuje rovnice

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}.$$

Uvažujeme-li nabitou částici nacházející se současně v poli elektrickém i magnetickém, lze výraz zapsat díky principu superpozice ve tvaru

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (46)$$

Tuto rovnici můžeme bez nadsázky označit za nejdůležitější rovnici elektromagnetismu, popisuje silové působení elektromagnetického pole na nabitou částici. Tato síla se nazývá **Lorentzova síla**. Je důležité, aby si tuto rovnici zapamatovali studenti jako celek. Často se uvádějí dva důležité podpřípady této síly. Elektrostatický $\vec{B} = \vec{0}$ a $\vec{E} \neq \vec{f}(t)$, jímž jsme se zabývali v druhé kapitole, a magnetostacionární $\vec{E} = \vec{0}$ a $\vec{B} \neq \vec{f}(t)$,

Uvažujme malý úsek vodiče o délce $\Delta\vec{L}$ ležící v magnetickém poli. Uvažujme dále, že tímto vodičem protéká proud $I = \Delta Q/\Delta t$, kde Δt označuje čas, za který množství nábojů $\Delta Q = Nq$ proteče úsekem $\Delta\vec{L}$. Náboje q , jež generují proud, se pohybují rychlostí \vec{v} . Proud ve vodiči teče ve směru $\Delta\vec{L}$. Pokud se rychlost a proud v čase nemění, můžeme napsat $\vec{v} = \Delta\vec{L}/\Delta t$. Pro magnetickou část Lorentzovy síly s mnoha pohybujícími se náboji ve vodiči lze uvést

$$\vec{F} = Nq\vec{v} \times \vec{B} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\Delta\vec{L} \times \vec{B}.$$

Lorentzovu sílu působící na vodič o délce $\Delta\vec{L}$ s proudem I v magnetickém poli \vec{B} je možné vyjádřit i ve tvaru

$$\vec{F} = I\Delta\vec{L} \times \vec{B}. \quad (47)$$

Podotkneme ještě jednu důležitou věc vyplývající z Lorentzovy síly. Zrychlení (či síla) působící na částici v magnetickém poli nesměruje ve směru indukčních čar (jak je tomu v případě pole elektrického). Čáry nemůžeme nazývat siločáry, ale indukční čáry.

Př. 8.1.

Zadání: Uvažujte elektron o náboji $-q$ a hmotnosti m v homogenním magnetickém poli o velikosti $\vec{B} = (0, 0, B_z)$. Elektron se pohybuje rychlostí $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$. Vypočtete trajektorii částice. Zjistěte jak se situace změní ve chvíli, kdy se částice pohybuje kolmo vzhledem k magnetickým indukčním čarám.

Řešení: Dle druhého Newtonova zákona a Lorentzovy síly platí

$$m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = -q(v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B_z) = -qB_z(v_y, -v_x, 0).$$

Z této soustavy rovnic lze vyjádřit tři diferenciální rovnice

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{qB_z}{m}v_y, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{qB_z}{m}v_x, \quad \frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Třetí rovnice má triviální řešení $v_z = \text{konst.}$ Řešení prvních dvou rovnic obdržíme derivací první rovnice a dosazení za $\frac{dv_y}{dt}$ z druhé

$$\frac{d^2v_x}{dt^2} = -\left(\frac{qB_z}{m}\right)^2 v_x \Rightarrow v_x = A \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow v_y = A \sin(\omega t + \varphi),$$

kde $\omega = \frac{qB_z}{m}$ je úhlová rychlost a $A^2 = v_x^2 + v_y^2$ je kvadrát velikosti rychlosti v rovině xy . Z výše uvedeného řešení vyplývá, že tento kvadrát je v čase konstantní a je určen počáteční rychlostí. Úhel φ určují také počáteční podmínky. Částice se bude pohybovat po šroubovici orientované ve směru z , podél magnetických indukčních čar.

V případě pohybu kolmém na magnetické indukční čáry vymizí složka rychlosti v_z . Částice se bude pohybovat po kružnici jejíž poloměr vyjádříme jako $r = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{qB}$.

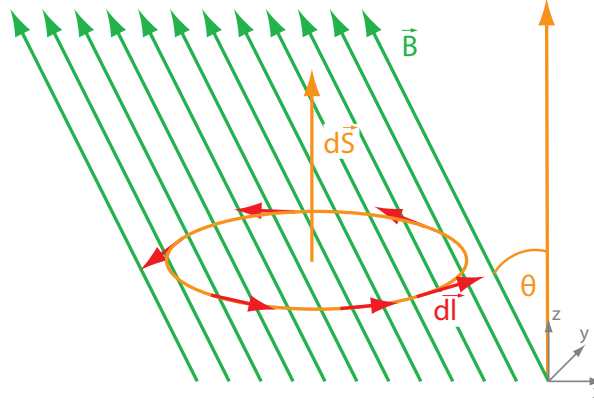
Komentář: Pohyb nabitých částic v magnetickém poli znázorňuje obrázek 46. Částice v prostředí ztrácejí rychlost a poloměr jejich dráhy se zmenšuje, proto nejsou znázorněné křivky kružnice (nebo šroubovice), ale spirály.



Obrázek 46: Elektrony a pozitrony v magnetickém poli.

Př. 8.2.

Zadání: Uvažujte kruhovou proudovou smyčku ve vnějším homogenním magnetickém poli. Necht' normála ke smyčce uzavírá s vektory magnetické indukce \vec{B} úhel θ . Jak velký moment síly působí na smyčku?



Obrázek 47: Proudová smyčka v magnetickém poli.

Řešení: Uvažujme, že kruhová smyčka leží v rovině xy a vektory magnetické indukce v rovině xz a s osou z svírají úhel θ – viz obrázek 47. Polohový vektor smyčky je $\vec{l} = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$. Element tohoto vektoru se rovná $d\vec{l} = (-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0) d\varphi$. Magnetické pole směřuje ve směru $\vec{B} = (-B \sin \theta, 0, B \cos \theta)$, kde B značí velikost vektoru magnetické indukce. Z Lorentzovy síly (47) jasně vyplývá, že na element vodiče působí element síly $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$. Moment sil pak zapíšeme jako $\vec{M} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$, kde $\vec{r} \equiv \vec{l}$ odpovídá polohovému vektoru kruhu, kde počátek souřadnicové soustavy se nachází na ose rotace. Dosazením do vzorců získáme

$$\begin{aligned} \vec{M} &= I \int \vec{l} \times (d\vec{l} \times \vec{B}) = \\ &= I \int_0^{2\pi} (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0) \times [(-R \sin \varphi, R \cos \varphi, 0) \times (-B \sin \theta, 0, B \cos \theta)] d\varphi = \\ &= IBR^2 \int_0^{2\pi} (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) \times (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta) d\varphi = \\ &= IBR^2 \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \varphi \sin \theta, -\cos^2 \varphi \sin \theta, 0) d\varphi = \\ &= IBR^2 \sin \theta \int_0^{2\pi} (\sin \varphi \cos \varphi, -\cos^2 \varphi, 0) d\varphi = \\ &= -IBR^2 \sin \theta \left(\frac{1}{2} \cos^2 \varphi, \frac{1}{2} \left[\varphi + \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \right], 0 \right)_0^{2\pi} = \end{aligned}$$

$$= -IBR^2 \sin \theta (0, \pi, 0) = -IB\pi R^2 \sin \theta (0, 1, 0) = -IBS \sin \theta (0, 1, 0) = I\vec{S} \times \vec{B}.$$

Z výsledku vidíme, že moment síly je úměrný vektorovému součinu plochy kruhové smyčky $\vec{S} = (0, 0, S)$ (orientované pomocí normály) a vektoru magnetické indukce.

Moment síly v našem případě směřuje v směru osy y , která se tak stává osou otáčení smyčky. Moment se snaží smyčku otočit tak, aby rovina smyčky byla kolmá na pole a aby magnetické indukční čáry generované smyčkou a vnějším polem směřovaly stejným směrem.

Komentář: Čtenář může zkontrolovat, že síla působící na kroužek se rovná

$$\vec{F} = - \int_0^{2\pi} I\vec{B} \times d\vec{l} = IBR \int_0^{2\pi} (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, -\cos \varphi \sin \theta) d\varphi = \vec{0}.$$

8.2 Magnetický moment

Klasická mechanika definuje moment hybnosti hmotného bodu jako $\vec{L} = m\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$, kde \vec{r} je polohový vektor a m je hmotnost hmotného bodu.

Uvažujme částice o celkové hmotnosti M , které se pohybují stejnou velikostí rychlosti v a ve stejném směru po kružnici o poloměru R v jejímž středu se nachází počátek souřadnicové soustavy. Velikost momentu hybnosti částice je dána vztahem $L = MvR$.

V příkladu (8.2) jsme vypočetli, že moment síly působící na proudovou kruhovou smyčku o poloměru R je $\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}$. Označme $I\vec{S} \equiv \vec{\mu}$, kde μ se nazývá magnetický moment. Uvažujme, že proud ve smyčce zprostředkovávají náboje Q , které celou kruhovou smyčkou projdou za čas ΔT . Magnetický moment pak lze upravit do tvaru

$$\mu = SI = \pi R^2 \frac{Q}{\Delta T} = \frac{o}{\Delta T} Q \frac{R}{2} = vQ \frac{R}{2} = L \frac{Q}{2M},$$

kde $o = 2\pi R$ je obvod kružnice. Z výše uvedeného je tedy zřejmé, že magnetický moment je úměrný momentu hybnosti.

Kvantová mechanika stanovuje, že existuje minimální možný moment hybnosti, který je roven Planckově konstantě \hbar . Uvažujeme-li nabitou hmotnou částici, kupříkladu elektron, pak její magnetický moment je roven právě $\mu_B = \frac{q\hbar}{2m}$, kde m je hmotnost částice a q její náboj. μ_B se nazývá Bohrov magneton.

8.3 Gaussův zákon pro magnetické pole

V druhé kapitole jsme uvedli Gaussův zákon (10) a (18), který dával do souvislosti zdroj elektrického pole, hustotu náboje a samotné elektrické pole. Tyto rovnice si lze představit tak, že uzavřeme-li náboje pod myšlenou plochu, z této plochy budou vycházet vektory elektrické intenzity. Pole podle toho nazýváme rozbíhavé (divergentní). Uvažujme nyní namísto elektrického pole magnetické. Předpokládejme speciální magnetický náboj (takzvaný magnetický monopól), jenž by generoval divergentní magnetické pole. Logicky by musel platit stejný Gaussův zákon i pro pole magnetické. Problém však tkví v tom, že při žádném experimentu se nikdy takový náboj nepodařilo detekovat. Jinými slovy můžeme říci, že pro současnou fyziku

je magnetický náboj vždy nulový. **Gaussův zákon pro magnetické pole** můžeme zapsat v diferenciálním a v integrálním tvaru jako

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (48)$$

První rovnice říká, že magnetické pole není divergentní a že magnetické indukční čáry musí být vždy uzavřené křivky. Druhá rovnice zase říká, že máme-li uzavřenou plochu, magnetické indukční čáry vbíhající do této plochy z ní i na jiném místě vybíhají.

Na rozdíl od monopólu, magnetický dipól existuje a pozoruje se. Vytváří ho proudová smyčka (nikoliv dva monopoly - N a S podobně jako u elektrického pole). Jako příklad magnetického dipólu uveďme tyčový magnet pozorovaný z velké vzdálenosti. Pokud bychom jej rozpůlili, výsledkem jsou dvě dipólová pole. To funguje až na strukturu elementární. Pozorované elementární částice mají magnetický dipólový moment.

8.4 Ampérův zákon v diferenciálním tvaru

Vysvětlili jsme si jak magnetické pole působí, ale doposud jsme neodpověděli na otázku, jak se magnetostacionární pole generuje. Obrázek 45 ukazuje, jak se magnetické pole obtáčí okolo proudu, nebo lépe okolo vektoru hustoty proudu \vec{j} . Z předchozího textu vyplývá, že rotace magnetického pole bude úměrná vektoru hustoty proudu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}, \quad (49)$$

kde μ_0 představuje konstantu úměrnosti, která se nazývá **permeabilita vakua** ($\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \text{H} \cdot \text{m}^{-1}$). Vektor hustoty proudu vytváří okolo sebe magnetické pole, jenž jej obtáčí.

Pojem magnetostacionární jsme uvedli z důvodu, že byť magnetické pole může být nezávislé na čase, tak jej lze budít pohybujícími se nestatickými náboji. Statické magnetické pole se nazývá pole buzené permanentním magnetem.

Zobecněme rovnici (49) nikoli pouze na magnetostacionární podpřípad. Uvažujme časově závislé elektrické pole \vec{E} . Pro elektrické pole platí Gaussův zákon (10). Dosadíme-li hustotu náboje v Gaussově zákoně do rovnice kontinuity, obdržíme

$$0 = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \vec{f}.$$

Funkce \vec{f} je integrační vektorová funkce, která splňuje $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$. Srovnáme-li získaný výsledek s Ampérovým zákonem je zřejmé, že vektorová funkce je právě vektor magnetické indukce $\vec{B} = \mu_0 \vec{f}$. Výsledná rovnice se nazývá **Ampérův zákon**

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (50)$$

Ve skutečnosti se nepodařilo nalézt Ampérovi tento zákon v kompletním tvaru. Časovou derivaci elektrické intenzity doplnil později až James Clerk Maxwell (1831 – 1879). Proto bychom měli rovnici (50) nazývat přesně Ampérův zákon s Maxwellovou korekcí, nebo rozšířený Ampérův zákon. Pro stručnost však v dalším textu budeme většinou uvádět pouze "Ampérův zákon".

Ampérův zákon (50) a Gaussův zákon (10) společně tvoří první pár Maxwellových zdrojových rovnic. Druhý pár intuitivně označujeme jako bezdrojový jednoduše proto, že neobsahuje hustotu náboje ρ ani hustotu proudu \vec{j} (my jsme zatím uvedli pouze rovnici $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$).

8.5 Ampérův zákon v integrálním tvaru

Gaussův zákon jsme vyjádřili v diferenciálním (10) i v integrálním (18) tvaru. Stejným způsobem můžeme nalézt v obou zmíněných tvarech i zákon Ampérův. Uvažujme integrál přes orientovanou plochu \vec{S} , jím upravíme Ampérův zákon (50) do tvaru

$$\int \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \mu_0 \int \vec{j} \cdot d\vec{S} + \mu_0 \varepsilon_0 \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}.$$

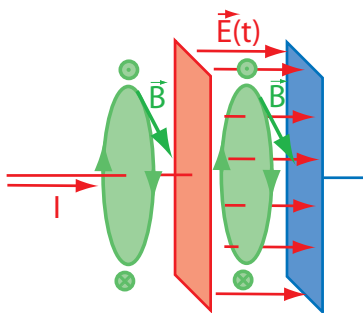
Z předešlého textu víme, že plošný integrál z proudové hustoty dává elektrický proud $\int \vec{j} \cdot d\vec{S} = I$. Dále použijeme Stokesovu větu $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Integrál $\int \vec{E} \cdot d\vec{S}$ označíme jako tok elektrické intenzity ϕ_E plochou S . Použitím těchto úprav získáme **Ampérův zákon v integrálním tvaru**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}. \quad (51)$$

Totální derivace je v rovnici (51) uvedena namísto parciální z důvodu, že tok elektrické intenzity závisí jak na elektrické intenzitě, tak na ploše kterou prochází. Obě tyto veličiny mohou být v obecném případě funkcemi času.

Je důležité, aby student tuto rovnici správně interpretoval. Uveďme si nyní několik podpřípadů, jež rovnici překládají z jazyka matematiky do jazyka fyziky. Uvažujme například nulové elektrické pole $\vec{E}(t) = 0 \Rightarrow \phi_E(t) = 0$. Z Ampérova zákona lze číst, že máme-li nenulovou hustotu proudu a nulové elektrické pole, pak v okolí hustoty proudu vzniká vírové magnetické pole.

Uvažujme nyní nulový proud I či proudovou hustotu \vec{j} . Vírové magnetické pole může existovat i bez proudu nebo proudové hustoty. Mějme opět uzavřenou křivku obepínající plochu S . Podél této křivky existuje nenulové magnetické pole, pokud na ploše dochází k časové změně elektrického toku. Magnetické pole se chová, jako kdyby obklopovalo skutečný elektrický proud. Časová změna toku elektrického pole se také proto často nazývá posuvný proud. Jako hezký příklad toho, kdy lze posuvný proud pozorovat, uveďme nabíjející se kondenzátor. Vezmeme-li uzavřenou křivku obkružující plochu, kterou protíná vodič těsně před nabíjejícím se kondenzátorem (viz obrázek 48), je zřejmé, že díky proudu ve vodiči musí podél této křivky vznikat vírové magnetické pole. O kousek vedle plochu již neprotíná vodič, nachází se mezi deskami kondenzátoru, který tím, jak se nabíjí, vytváří zvětšující se elektrické pole. Zde je zdrojem magnetického pole právě měnící se elektrické pole.



Obrázek 48: Uzavřené křivky v blízkosti desek kondenzátoru.

Pro třetí podpřípad uvažujme sféricky rozložené náboje, například v balónku. Předpokládejme, že balónek je ze všech stran děravý, takže na povrchu nám budou náboje sféricky unikat. Uvažujme dále část plochy povrchu balónku, z níž budou směřovat vektory elektrické intenzity ven (či dovnitř – v závislosti na znaménku náboje). Jak budou plochou náboje unikat (plochou potече elektrický proud), v balónku se bude zmenšovat náboj a následně s ním také elektrické pole, a tok elektrické intenzity plochou S . Změna toku vyjde záporná v závislosti na proudu odnášejícím náboj.

Samozřejmě v obecném případě bereme v úvahu všechny tři složky Ampérova zákona.

Př. 8.3.

Zadání: Mějme dva nekonečně dlouhé rovnoběžné vodiče ve vzdálenosti r . Jakou silou se přitahují, protéká-li jimi proud I ?

Řešení: Nejprve uvažujme pouze jeden lineární vodič. Okolo tohoto vodiče předpokládejme myšlenou kružnici, v jejímž středu se vodič nachází (vodič je orientován kolmo vůči rovině, na níž kružnice leží). Díky symetrii a nedivergentnosti magnetického pole musí být vektory magnetické indukce ve všech bodech kružnice stejně velké a ke kružnici tečné. Jsou-li ke kružnici tečné, půjde skalární součin vektorů nahradit $\vec{B} \cdot d\vec{r} = Bdr$. Je-li B po celé kružnici konstantní, lze jej vytknout před integrál. Integrál přes uzavřenou křivku se rovná délce křivky $\oint dr = l = 2\pi r$, kde l značí délku křivky a r poloměr kružnice. Pokud bude splněna podmínka tečnosti ke křivce a konstantnosti velikosti magnetické indukce, lze Ampérův zákon s nulovým elektrickým polem zapsat ve tvaru

$$Bl = \mu_0 I. \quad (52)$$

V případě přímého vodiče se magnetické pole v jeho okolí díky rovnici (52) rovná

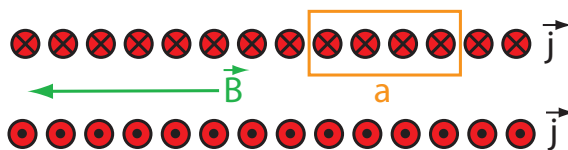
$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}.$$

Ze vztahu pro Lorentzovu sílu víme, že pokud magnetické pole svírá s přímým vodičem o délce L pravý úhel, velikost síly působící na vodič vyjádříme ve tvaru

$$F = ILB = \frac{\mu_0 I^2 L}{2\pi r}.$$

Př. 8.4.

Zadání: Mějme dlouhou cívku (**solenoid**). Určete magnetické pole hluboko uvnitř cívky a na konci cívky, protéká-li cívkou proud I .



Obrázek 49: Cívka.

Řešení: Řez cívkou vykresluje obrázek 49. Oranžový obdélník představuje myšlenou křivku, podél které zkoumáme magnetické pole. Uvažujeme-li solenoid nekonečně dlouhý, můžeme magnetické pole venku oproti poli uvnitř zanedbat. Uvažíme-li libovolnou uzavřenou křivku ležící mimo solenoid, tak skrze tuto křivku poteče nulový proud (zanedbáme-li proud ve směru solenoidu) a magnetické pole mimo solenoid musí být nulové. Uvnitř je magnetické pole orientováno rovnoběžně s cívkou (viz zakreslený vektor magnetické indukce). Uvažíme-li svislé strany obdélníku, skalární součin těchto úseků s vektory magnetické indukce se rovná nule právě kvůli kolmosti vektorů \vec{B} na tyto úseky. Jediným přispívajícím úsekem zůstane vnitřní horizontální strana o délce a , ta, která je s magnetickým polem rovnoběžná. Pro cívku platí rovnice (52), tedy $\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_0^a B dr = B \int_0^a dr = Ba$. Uzavřenou křivkou však probíhá více než jeden vodič. Celkem v sobě úsek o délce a uzavírá N vodičů. Celkový proud pak odpovídá N násobku proudu protékajícího cívkou. Takže platí

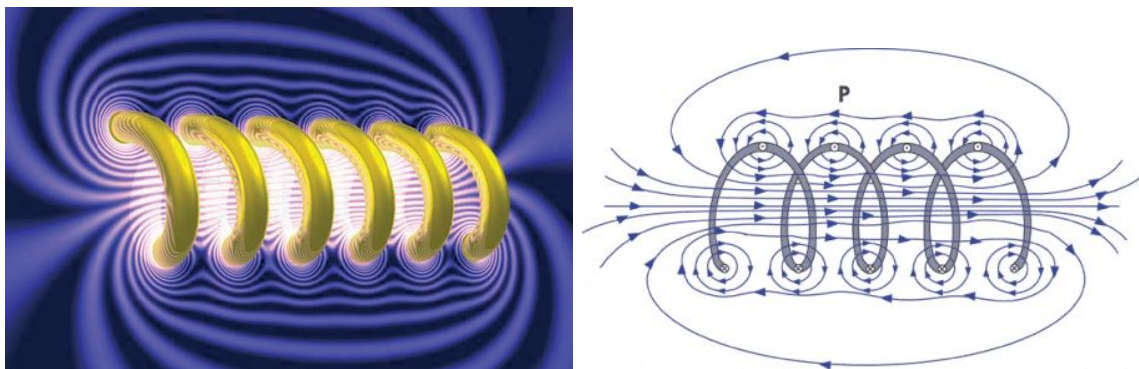
$$B = \frac{\mu_0 IN}{a}.$$

Označíme-li si hustotu závitů $\eta = N/a$, lze magnetické pole uvnitř dlouhé cívky vyjádřit jako

$$B = \mu_0 I \eta. \quad (53)$$

Toto magnetické pole vytváří všechny závity. Jak ale ukázal předešlý příklad, vzdálenější závity působí mnohem méně než ty blízké. Představme si, že cívku rozřízneme v půli a jednu půlku přesuneme na opačný konec druhé z cívek. Rozřízneme-li cívku na půl a jednu z půlek odejmeme, logicky z toho díky principu superpozice vyplývá, že magnetické pole v bodě řezu je poloviční. Přesuneme-li odříznutou půlku na druhou stranu, bude ona půlka při dostatečné délce solenoidu velmi daleko (od bodu řezu) a její příspěvek budeme moci zanedbat. Na okraji dlouhé cívky působí poloviční magnetické pole než uprostřed.

Reálné pole cívky (solenoidu) vykresluje obrázek 50.

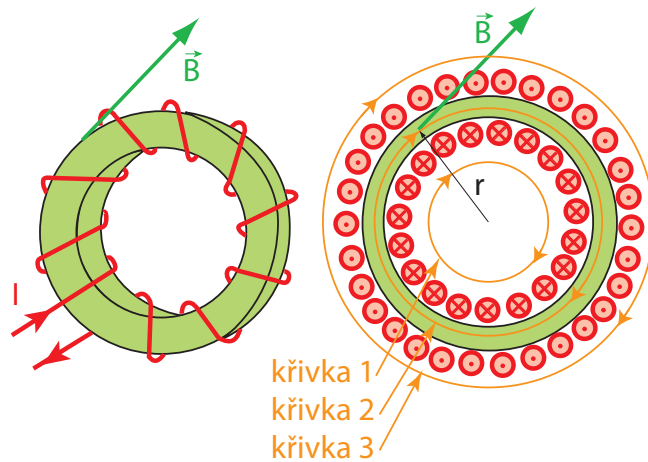


Obrázek 50: Magnetické pole v blízkosti reálných cívek.

Př. 8.5.

Zadání: Vyšetřete pole uvnitř a vně toroidu.

Řešení: Nákres toroidu můžete vidět na obrázku 51. Uvažujme kružnici se středem uloženým ve středu toroidu. Příklad lze rozdělit na tři možnosti.



Obrázek 51: Toroid.

- Kružnice je menší než vnitřní části toroidu (křivka 1). Pak neobjímá žádné proudy a i magnetické pole na této kružnici bude nulové.
- Kružnice je větší než vnější části toroidu (křivka 3). Kružnice objímá vodiče vcházející do roviny kružnice a stejný počet vodičů vycházejících. Součet všech proudů vyjde nulový. Pak je magnetické pole podél kružnice opět nulové.
- Kružnice je uvnitř toroidu (křivka 2) a objímá N vodičů, kde N vyjadřuje počet závitů.

Vně toroidu je pole nulové. Uvnitř, dle Ampérova zákona, rovnice (52) platí

$$Bl = \mu_0 NI.$$

Pro délku myšlené kružnice $l = 2\pi r$, kde r označuje poloměr kružnice, se velikost magnetické indukce rovná

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (54)$$

Př. 8.6.

Zadání: Uvažujme deskový kondenzátor tvaru dvou rovnoběžných kruhů o poloměru R . Vzdálenost desek kondenzátoru předpokládejme mnohem menší než jejich velikost. Kondenzátory se nabíjejí proudem I . Vyšetřete magnetické pole mezi deskami kondenzátoru.

Řešení: Mějme myšlenou kružnici o poloměru $r \ll R$, která se nachází mezi deskami kondenzátoru, její rovina s nimi leží rovnoběžně a její střed se nachází na spojnici středů kruhových desek kondenzátoru. Je logické, že díky symetrii a nedivergentnosti magnetického pole zůstane na myšlené kružnici velikost vektoru magnetické indukce konstantní a směr magnetické indukce bude ke kružnici tečný. Pod kružnicí vyjde elektrický proud nulový. Rostoucí elektrické pole však vyvolá proud posuvný, platí

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt} \Rightarrow lB = \mu_0 \epsilon_0 S \frac{\partial E}{\partial t},$$

kde $l = 2\pi r$ označuje délku myšlené křivky, $S = \pi r^2$ plochu, kterou křivka uzavírá, a E zase velikost vektoru elektrické intenzity, které míří kolmo na plochu S , proto lze skalární součin vektorů (intenzity a normály k ploše) nahradit součinem dvou skalárů (stejný argument platí pro vektor magnetické indukce). Jak jsme si uvedli, elektrická intenzita pro deskový kondenzátor se rovná $E = \frac{Q}{S_k \varepsilon_0}$, kde $S_k = \pi R^2$ odpovídá ploše celého kondenzátoru. Změna náboje v čase vytváří proud, platí

$$B = \frac{S \mu_0}{S_k l} \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} I.$$

Se zvětšující se vzdáleností od centra magnetické pole narůstá. Pokud bychom uvažovali ideální kondenzátor (což znamená, že přesně za hranicí $r = R$ by elektrické pole zmizelo), byla by pak na této hranici magnetická indukce $B = \frac{\mu_0}{2\pi R} I$ stejná jak ve vzdálenosti R od vodiče nesoucího proud I . S rostoucí vzdáleností by pak magnetické pole klesalo podle $B = \frac{\mu_0}{2\pi r} I$. Magnetická indukce má ve velké vzdálenosti od nabíjecího se kondenzátoru stejný průběh jako magnetická indukce v blízkosti lineárního vodiče.

Komentář: Šíření energie v elektromagnetickém poli popisuje Poyntingův vektor definovaný vztahem $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$. Uvažujeme-li mezi deskami kondenzátoru vektor elektrické intenzity ve tvaru $\vec{E} = (0, 0, \frac{Q(t)}{\pi R^2 \varepsilon_0})$ a tomu odpovídající vektor magnetické indukce $\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi R^2} (-y, x, 0)$. Poyntingův vektor je roven

$$\vec{S} = \frac{Q(t)I(t)}{2\pi^2 R^4 \varepsilon_0} (-x, -y, 0) = \frac{1}{4\pi^2 R^4 \varepsilon_0} (-x, -y, 0) \frac{d(Q(t)^2)}{dt}.$$

Poyntingův vektor při nabíjení kondenzátoru (zvětšování kvadrátu náboje na deskách) míří směrem do osy symetrie kondenzátoru. Energie elektromagnetického pole teče směrem dovnitř kondenzátoru. Energie nabíjecího se kondenzátoru roste.

Příklady k procvičení 8.1.

Uvažujte dlouhý vodič válcového tvaru o poloměru R protékáný proudem o velikosti proudové hustoty $j = kr$, kde r je radiální vzdálenost od osy vodiče. Určete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř i mimo vodič.

Příklady k procvičení 8.2.

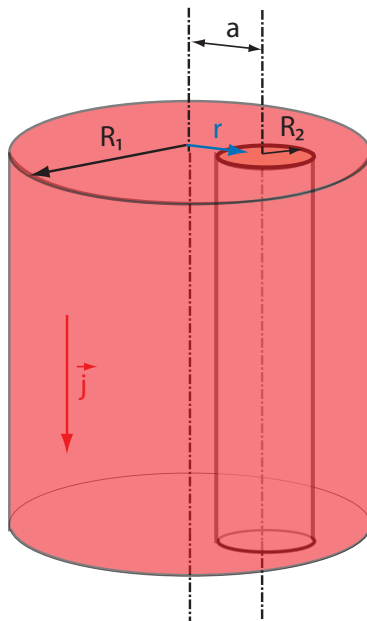
Uvažujte nabitou dlouhou tyč válcového tvaru o poloměru R s konstantní hustotou náboje ϱ_0 . Tyč je roztočena kolem osy symetrie úhlovou rychlostí ω . Určete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř tyče v závislosti na radiální vzdálenosti od osy tyče.

Příklady k procvičení 8.3.

Uvažujte nabitou dlouhou tyč válcového tvaru o poloměru R s hustotou náboje $\varrho = k(R - r)$, kde r je radiální vzdálenost od osy tyče. Tyč je roztočena kolem osy symetrie úhlovou rychlostí ω . Určete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř tyče v závislosti na radiální vzdálenosti od osy tyče.

Příklady k procvičení 8.4.

Uvažujte nekonečně dlouhý vodivý válec o poloměru R_1 . Do tohoto válce je vyvrtána válcová dutina o poloměru R_2 (viz obrázek 52). Osy obou válců jsou rovnoběžné, ale nikoli totožné. Jejich vzdálenost je a , kde $a + R_2 < R_1$. Vypočtete velikost vektoru magnetické indukce uvnitř dutiny na spojnici obou os ve chvíli, kdy válcem protéká proud s konstantní hustotou proudu j . Radiální vzdálenost od středu vodivého válce (uvažujte na spojnici os) je r .



Obrázek 52: Vodič s válcovou dutinou.

Příklady k procvičení 8.5.

Uvažujte v rovině xy nekonečně velkou vodivou tenkou desku, kterou protéká proud ve směru osy x . Délková hustota proudu je i (proud je $I = iL$, kde L je délka v rovině xy ve směru y). Určete vektor magnetické indukce v závislosti na vzdálenosti od roviny.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 198-205, 216-219*

Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 224-240*

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 236-245, 247-255, 266-282*

Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *kap. 29, 30, 32*

9 Biotův–Savartův zákon.

9.1 Biotův–Savartův zákon a vektorový potenciál.

V úvodních kapitolách jsme uvedli Gaussův zákon (10) a našli jsme jeho řešení (pro vektor elektrické intenzity \vec{E}) ve tvaru rovnice (9). Podobným způsobem jsme se seznámili s Poissonovu rovnicí (17) a s jejím řešením pro potenciál φ ve tvaru (16). Pomocí Ampérova zákona (50) (pro statické elektromagnetické pole) nalezneme proudovou hustotu \vec{j} , známe-li přesný tvar magnetického pole. Jak ale najdeme řešení pro vektor magnetické indukce \vec{B} ze znalosti proudové hustoty?

Pro nalezení řešení nám bude nápomocný Gaussův zákon pro magnetické pole $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Vzpomeneme-li si na matematickou identitu $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$, pak můžeme nahradit vektor magnetické indukce rotací nového vektoru $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Divergence magnetické indukce je pak nulová identicky. Použitím tohoto nového výrazu změním Ampérův zákon (pro $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0$) do tvaru $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}$. Z dřívějších výpočtů víme, že platí $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \equiv \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A}$. K nově vytvořené vektorové funkci \vec{A} smíme přičíst gradient funkce f , aniž by se magnetické pole změnilo: $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f$, protože $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$. Funkce f se nazývá kalibrační funkce. Vektorová funkce \vec{A} je díky kalibrační funkci nejednoznačná. Změnou \vec{A} o gradient libovolné funkce se \vec{B} , které je fyzikálně měřitelnou veličinou, nezmění. Změní se však divergence vektorového pole $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ na $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \Delta f$. Protože můžeme f vybrat libovolně, zvolme jej právě tak, aby platilo $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$. Ampérův zákon (49) (v elektrostatickém podpřípadu) se tímto změní do tvaru

$$-\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (55)$$

Pozorný čtenář si jistě všimne podobnosti mezi touto rovnicí a potenciálem φ v Poissonově rovnici (17), jejímž řešením byla rovnice (16). Díky analogii můžeme nalézt řešení rovnice (55) ve tvaru

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (56)$$

Vektor \vec{A} nyní z důvodů, jež jsou zřejmé, můžeme nazvat **vektorový potenciál**.

Stejně jako v případě výpočtu elektrické intenzity zdůrazněme, že $\vec{A}(\vec{r})$ je funkcí nečárkovaných souřadnic, na rozdíl od $\vec{j}(\vec{r}')$, která je funkčně závislá na čárkovaných souřadnicích, přes které integrujeme.

Vektor magnetické indukce pak vypočteme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Operátor $\vec{\nabla}$ přesuneme dovnitř integrálu. Připomeňme identitu (viz příklady na doma 1.4) $\vec{\nabla} \times (\vec{j} f) = f \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{j}) + (\vec{\nabla} f) \times \vec{j}$, kde $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$. Operátor $\vec{\nabla}$ je operátorem nečárkovaných souřadnic, takže $\vec{\nabla} \times \vec{j} = 0$. Z předchozích kapitol víme, že platí rovnost $\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$. Dosazením výše uvedených výrazů a použitím $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

obdržíme

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (57)$$

Tato rovnice je řešením Ampérova zákona (50) (s magnetostacionárním polem).

Teče-li proud I v tenkém vodiči, je směr elementu vodiče stejný jako směr proudové hustoty

$$d\vec{r}' \parallel \vec{j} \Rightarrow d\vec{r}' = \vec{n} dr', \quad \vec{j} = \vec{n} j.$$

Výraz uvnitř integrálu pozměníme na

$$\begin{aligned} \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV' &= \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') (d\vec{r}' \cdot d\vec{S}') = \vec{n} \times (\vec{r} - \vec{r}') (\vec{n} \cdot d\vec{S}') j dr' = \\ &= d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') (\vec{j} \cdot d\vec{S}') = d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') dI = -(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' dI \end{aligned}$$

V rovnici (57) žádný jiný člen není funkcí I , a proto lze použít $\int dI = I$. S těmito úpravami lze rovnici (57) změnit do tvaru

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (58)$$

Připomeňme si ještě jednou význam jednotlivých částí v Biotově–Savartově zákonu.

Význam veličiny	Veličina
Proud (pro rozvětvlující se vodič závisí na poloze zdroje)	$I(\vec{r}')$
Vektor proudové hustoty (závisí na poloze zdroje)	$\vec{j}(\vec{r}')$
Polohový vektor studovaného bodu	\vec{r}
Polohový vektor zdroje pole	\vec{r}'
Vektorový element zdroje (slouží k integraci přes zdroj)	$d\vec{r}'$
Vzdálenost studovaného bodu od zdroje	$ \vec{r} - \vec{r}' $

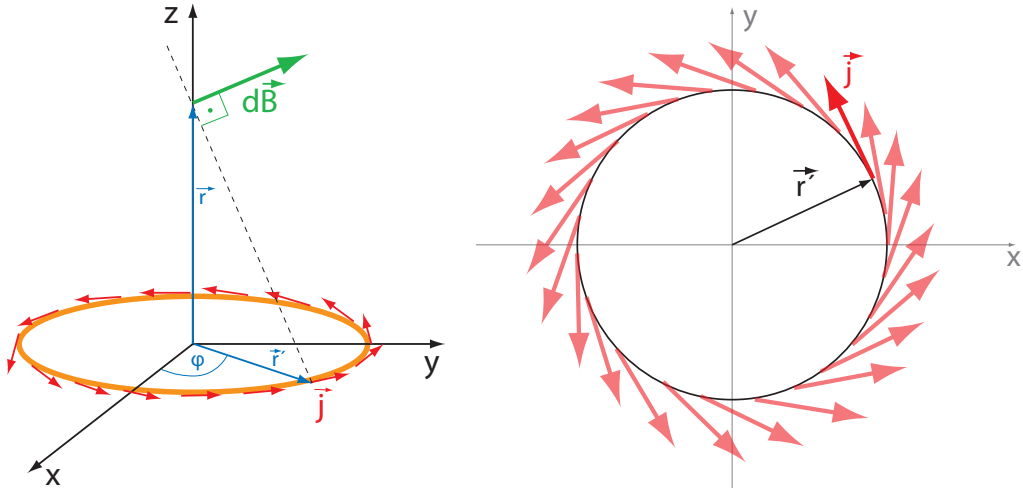
Tabulka 3: Význam členů v Biotově–Savartově zákonu.

Př. 9.1.

Zadání: Uvažujte kruhovou smyčku o poloměru R , kterou protéká proud I . Jaká je magnetická indukce podél přímky kolmé na rovinu kružnice, procházející středem kružnice (viz obrázek 53 a))?

Řešení: Vzhledem k tomu, že elektrický proud teče pouze skrze tenký vodič ve tvaru kruhové smyčky, použijeme rovnici (58). Proud I uvažujeme podél celé smyčky konstantní. Pro výpočet je potřeba správně zvolit souřadnicovou soustavu. Uvažujme, že proudová smyčka se nachází v rovině xy a přímka, kde magnetické pole studujeme, leží na ose z . Polohový vektor bodu, kde magnetické pole studujeme, vyjádříme ve tvaru $\vec{r} = (0, 0, z)$. Polohový vektor zdroje, který leží na kružnici, je $\vec{r}' = (R \cos \varphi', R \sin \varphi', 0)$, kde $\varphi' \in (0; 2\pi)$ je souřadnice na kružnici, jež křivku parametrizuje. Diferenciál tohoto polohového vektoru vyjádříme $d\vec{r}' = (-R \sin \varphi', R \cos \varphi', 0) d\varphi'$. Dosazením do členů v rovnici (58) obdržíme

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = R^2 \cos^2 \varphi' + R^2 \sin^2 \varphi' + z^2 = R^2 + z^2,$$



Obrázek 53: a) Kruhová proudová smyčka. b) Vektory směru proudu v rovině xy .

$$-(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' = (R \cos \varphi', R \sin \varphi', -z) \times (-\sin \varphi', \cos \varphi', 0) R d\varphi' = (zR \cos \varphi', zR \sin \varphi', R^2) d\varphi',$$

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(zR \cos \varphi', zR \sin \varphi', R^2) d\varphi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \left(\int_0^{2\pi} zR \cos \varphi' d\varphi', \int_0^{2\pi} zR \sin \varphi' d\varphi', \int_0^{2\pi} R^2 d\varphi' \right) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} (zR \sin \varphi' \Big|_0^{2\pi}, -zR \cos \varphi' \Big|_0^{2\pi}, R^2 \varphi' \Big|_0^{2\pi}) = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} (0, 0, 2\pi R^2) = \frac{\mu_0 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} (0, 0, R^2). \end{aligned}$$

Pokud $z = 0$, pak $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} (0, 0, 1)$.

Komentář: Ukažme si, že stejný výsledek obdržíme i v případě, aplikujeme-li k výpočtu rovnici (57). Klíčové při tomto výpočtu bude správně sestavit vektor hustoty proudu. Pakliže se náboje pohybují pouze v tenkém vodiči, použijeme delta-funkce. Vodič ve tvaru kruhu o poloměru R umístěný do roviny xy popíšeme dvěma delta-funkcemi $\delta(r' - R)$, $\delta(z')$. Jednotkový vektor mající směr proudové hustoty je $(-\sin \varphi', \cos \varphi', 0)$ – viz obrázek 53. Proudovou hustotu vyjádříme ve tvaru $\vec{j} = I \delta(r' - R) \delta(z') (-\sin \varphi', \cos \varphi', 0)$. Objemový element ve válcových souřadnicích nabývá tvaru $dV' = dx' dy' dz' = r' dr' d\varphi' dz'$.

Dosazením do členů v rovnici (57) obdržíme

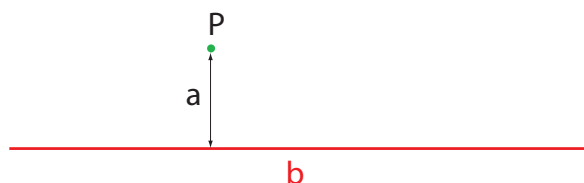
$$\begin{aligned} \vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= I \delta(r' - R) \delta(z') (z \cos \varphi', z \sin \varphi', R), \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I \delta(r' - R) \delta(z') (z \cos \varphi', z \sin \varphi', R) r' dr' d\varphi' dz'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int \delta(r' - R) \delta(z') (z \cos \varphi', z \sin \varphi', R) r' dr' d\varphi' dz' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int (z \cos \varphi', z \sin \varphi', R) R d\varphi' = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} (0, 0, 2\pi R^2) = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2(R^2 + z^2)^{3/2}} (0, 0, R^2).
\end{aligned}$$

Je evidentní, že oba výsledky se shodují.

Př. 9.2.

Zadání: Vypočtěte magnetické pole v bodě P , který je ve vzdálenosti a od proudové úsečky o délce b (viz obrázek 54).



Obrázek 54: Proudová úsečka

Řešení: Kvůli absenci válcové symetrie použijeme Biotův–Savartův zákon a nikoli Ampérův zákon. Jestliže umístíme proudovou úsečku na osu x a bod P na osu y , lze vzdálenost bodu P od libovolného bodu na úsečce vyjádřit jako

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = x'^2 + a^2,$$

vektorově pak

$$\vec{r} - \vec{r}' = (-x', a, 0).$$

Element polohového vektoru zdroje nabývá tvaru $d\vec{r}' = (dx', 0, 0)$. Integrační interval pak bude $(x_1; x_2)$, kde $x_2 - x_1 = b$. Dosazením pak získáme

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(-x', a, 0) \times (dx', 0, 0)}{(x'^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x_1}^{x_2} \frac{(0, 0, a dx')}{(x'^2 + a^2)^{3/2}} = \\
&= \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \left[\frac{(0, 0, x')}{a^2 (x'^2 + a^2)^{1/2}} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} \left[\frac{(0, 0, x_2)}{(x_2^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{(0, 0, x_1)}{(x_1^2 + a^2)^{1/2}} \right] = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4a\pi} \left[\frac{(0, 0, (x_1 + b))}{((x_1 + b)^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{(0, 0, x_1)}{(x_1^2 + a^2)^{1/2}} \right].
\end{aligned}$$

Z výsledku zjišťujeme, že záleží jak na délce proudové úsečky, tak na vzdálenosti od okraje.

V případě $x_1 = -c$, $x_2 = c$ a $c \rightarrow \infty$ se výsledek změní na

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4a\pi} \left[\frac{(0, 0, c)}{(c^2 + a^2)^{1/2}} + \frac{(0, 0, c)}{(c^2 + a^2)^{1/2}} \right] \rightarrow \frac{\mu_0 I}{2a\pi} (0, 0, 1).$$

Tento výsledek je shodný s výsledkem magnetického pole v blízkosti nekonečně dlouhého vodiče.

Př. 9.3.

Zadání: Uvažujte proudovou úsečku umístěnou na ose $x \in (x_1; x_2)$. Určete magnetickou indukci v bodě P ležící opět na ose x .

Řešení: Polohový vektor zdroje je $\vec{r}' = (x', 0, 0) \Rightarrow d\vec{r}' = (dx', 0, 0)$. Polohový vektor bodu, kde chceme pole měřit, vyjádříme ve tvaru $\vec{r} = (x, 0, 0)$. Dle rovnice (58) platí

$$(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}' = (x - x', 0, 0) \times (dx', 0, 0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = 0.$$

Komentář: Leží-li vodič na přímce (nebo jeho část) a na stejné přímce se nachází bod, ve kterém studujeme magnetické pole, je příspěvek od vodiče (či jeho části) k magnetickému poli nulový. Proudová úsečka uvedená v příkladě 9.2 je v zásadě nefyzikální. Proud musí někudy vtékat a někudy vytékat. Přidáme-li však k úsečce proudové polopřímky, které leží na přímce s bodem P vyjde magnetické pole stejně jako v příkladu 9.2.

Příklady k procvičení 9.1.

Uvažujte vektorový potenciál ve tvaru $\vec{A} = e^{-kr^2} \vec{r}$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ a $\vec{r} = (x, y, z)$. Vypočtete vektor magnetické indukce \vec{B} .

Příklady k procvičení 9.2.

Uvažujte kruhovou proudovou tenkou smyčku o poloměru R , kterou protéká proud I (proud teče v matematicky kladném směru). Smyčka leží v rovině xy tak, že její střed se nachází v bodě $(0, 0, 0)$. Vypočtete vektorový potenciál na ose z . Pro výpočet použijte rovnici (56).

Příklady k procvičení 9.3.

Uvažujte nekonečně dlouhý lineární vodič protékaný proudem I . Určete vektorový potenciál v jeho blízkosti. Proud směřuje ve směru osy z . Pro výpočet použijte rovnici (56).

Příklady k procvičení 9.4.

Uvažujte čtvercovou vodivou smyčku o délce hrany a ležící v rovině xy tak, že její střed se nachází v bodě $(0, 0, 0)$. Vypočtete vektor magnetické indukce na ose z . Proud teče v matematicky kladném směru.

Příklady k procvičení 9.5.

Uvažujte kruhový tenký disk o plošné hustotě náboje σ ležící v rovině xy tak, že jeho střed se nachází v bodě $(0, 0, 0)$. Kruh rotuje úhlovou rychlostí ω kolem osy z . Vypočtete vektor magnetické indukce na ose z . Disk rotuje v matematicky kladném směru.

Doporučená literatura

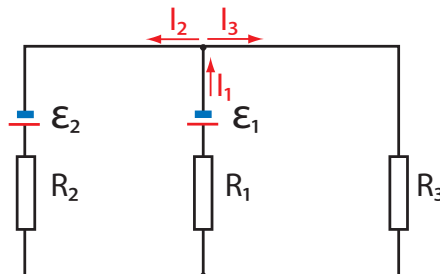
Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 205-216, 219-220*
 Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 242-256, 267-269*
 Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 239-253*
 Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *podkapitola 30.1*

Čtvrtsemestrální písemná práce č. 3.

1. Spočtete velikost vektoru magnetické indukce v blízkosti proudové úsečky o délce a . Úsečkou protéká konstantní proud I . Magnetické pole vypočtete v bodě A , jenž je od obou konců úsečky stejně vzdálený a od středu úsečky má vzdálenost z_0 . Zjistěte, jestli lze toto pole kolem bodu A reálně vytvořit, nakreslete obrázek, jak by musel reálný zdroj vypadat.

Nápověda: $\int (k + x^2)^{-3/2} dx = \frac{x}{k} (k + x^2)^{-1/2}$. Pro kontrolu můžete položit $a \approx \infty$ a srovnat s polem v okolí nekonečně dlouhého vodiče.

2. Vypočtete proudy protékající obvodem na obrázku 1.: $\mathcal{E}_1 = 2V$, $\mathcal{E}_2 = 7V$, $R_1 = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 3\Omega$.
3. Koaxiálním kabelem (vnitřní částí) protéká proud $I = 2A$, vnějším obalem protéká opačný proud $I = 1A$ (proud protéká opačným směrem). Vypočtete velikost magnetické indukce mezi vnitřní a vnější částí a mimo kabel. Uvažujte vnitřní část jako nekonečně tenký a dlouhý vodič umístěný na ose z a vnější obal jako nekonečně tenkou a dlouhou válcovou plochu s poloměrem R a se středem na ose z . Nakreslete závislost B na vzdálenosti od osy z . Ovlivňování magnetického pole jinými zdroji zanedbejte.
4. Uvažujte dvě dlouhé válcové cívky, jež se na koncích (podstavami) dotýkají. Proud protékající závitů označte I a hustotu závitů (počet závitů na jednotku délky cívky) jednotlivých cívek η_1 a η_2 . Jaká je velikost magnetické indukce v místě dotyku cívek (myšleno uvnitř válců)?

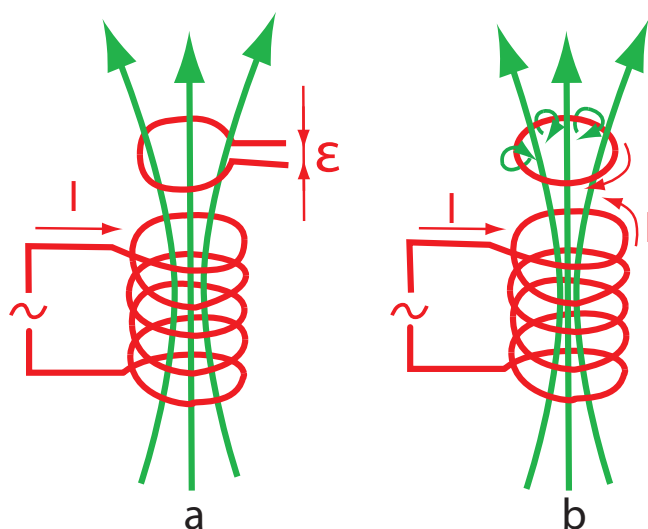


Obr.1

10 Faradayův zákon, Maxwellovy rovnice, potenciály

10.1 Faradayův zákon

Když se v roce 1820 zjistilo, že elektrický proud vytváří magnetické pole, a o rok později, že na vodič protékající proudem v magnetickém poli působí síla, vyskytla se otázka, zda nelze vytvořit magnetickým polem elektrický proud. První pokusy se prováděly magnetostacionárně. Studovalo se, jestli v blízkosti vodičů s vysokými proudy nevznikají v jiných vodičích nové proudy díky přítomnosti magnetického pole. Tyto experimenty však skončily neúspěchem. Až v roce 1840 anglický fyzik Michael Faraday objevil, že se elektrické jevy projevují pouze se změnou magnetického pole, nikoli jen s jeho přítomností. Teče-li v jednom z vodičů střídavý proud, pak i ve vodiči v jeho blízkosti lze naměřit střídavý proud. Podobným způsobem můžeme generovat proud ve vodiči pomocí magnetu, který se pohybuje v jeho okolí. Hovoříme o **indukovaných proudech** (viz obrázek 55 a).



Obrázek 55: Faradayovy pokusy.

Uvažujme proudovou smyčku či cívku (několik smyček) připojenou na zdroj střídavého elektromotorického napětí. Smyčka ve svém okolí generuje střídavé magnetické pole $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq 0$. V blízkosti této smyčky (nebo cívky) se nachází jiná uzavřená smyčka (viz obrázek 55 b)). Experimenty ukázaly, že střídavé magnetické pole v druhé smyčce indukuje elektromotorické napětí. Je dobré si uvědomit, že **indukované elektromotorické napětí** existuje v uzavřené křivce. Pohybem nábojů podél uzavřené křivky můžeme vykonávat nebo získávat práci. Elektrické pole představuje v tomto případě pole nekonzervativní, platí $\vec{\nabla} \times \vec{E} \neq 0$ (viz první kapitola). Nejde však o perpetuum mobile, energii dodává střídavý zdroj napětí. Je-li smyčka vodivá, pak jí za přítomnosti napětí protéká proud. Tento proud opět vytváří magnetické pole.

Ruský fyzik Heinrich Friedrich Emil Lenz zjistil, že indukovaný proud v druhé smyčce má takový směr, že svým magnetickým polem působí proti změně magnetického pole, jež jej

indukovala. **Faradayův zákon v diferenciálním tvaru** lze zapsat

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E}. \quad (59)$$

Znaménko mínus se ve vzorci objevuje právě díky Lenzovu zákonu.

Stejně jako v případě elektrické intenzity můžeme definovat pod uzavřenou křivkou **magnetický indukční tok** jako

$$\phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Integrací Faradayova zákona (59) přes plochu $d\vec{S}$ obdržíme

$$\frac{d\phi_B}{dt} = -\mathcal{E}_I, \quad (60)$$

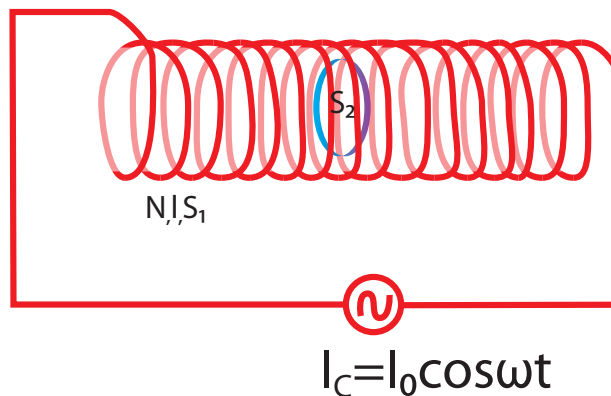
kde \mathcal{E} představuje indukované elektromotorické napětí vzniklé ve smyčce, které získáme díky Stokesově větě

$$\mathcal{E}_I = \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot d\vec{S}.$$

V rovnici (60) uvádíme totální derivaci namísto parciální. Je to z toho důvodu, že magnetický tok může být závislý jak na ploše, tak na magnetickém poli. Obě tyto veličiny mohou být funkcemi času.

Př. 10.1.

Zadání: Uvažujte dlouhou cívku o N závitěch, délce l a ploše průřezu S_1 , kterou protéká proud $I_c = I_0 \cos \omega t$. Uvnitř této cívky se nachází homogenní magnetické pole. Do této cívky vložíme kovový kroužek jenž obepíná plochu $S_2 < S_1$ (normála k ploše kroužku je rovnoběžná s vektory magnetické indukce) – viz obrázek 56. Odpor kroužku uvažujte R . Jaký proud teče kroužkem a jakou silou působí cívka na kroužek? Uvažujte pouze výše zmíněné vlivy (zanechte vlivy magnetického pole vytvořeného proudem indukovaným v kroužku samotném). Toho lze docílit například zvolením dostatečně velkého R .



Obrázek 56: Cívka s kroužkem.

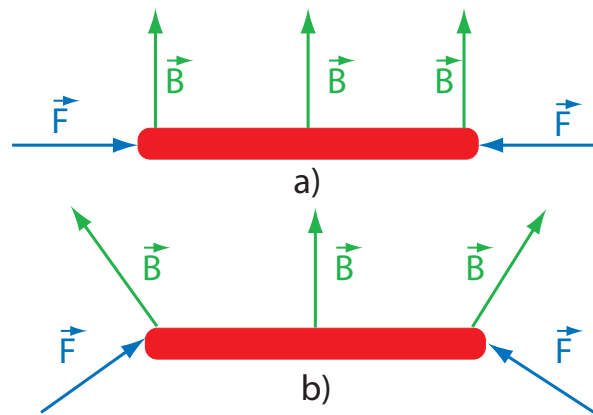
Řešení: Jak jsme uvedli v předchozích kapitolách, uvnitř cívky platí $B = \frac{\mu_0 I_c N}{l}$. Dle Faradayova zákona $\mathcal{E}_I = -\frac{\partial B}{\partial t} S_2 = -\frac{\partial I_c \mu_0 N S_2}{\partial t}$. Proud protékající smyčkou vypočítáme z Ohmova zákona jako

$$I_s = -\frac{\partial I_c \mu_0 N S_2}{\partial t} \frac{1}{lR} = \frac{\mu_0 N S_2 \omega I_0 \sin \omega t}{lR}.$$

Nyní uvažujme sílu působící na kroužek. Ze vztahu pro Lorentzovu sílu víme, že platí $d\vec{F} = I_s d\vec{l} \times \vec{B}$. Předpokládejme, že pro daný okamžik magnetické pole směřuje ve směru z a kovový kroužek leží v rovině xy , tedy $\vec{B} = (0, 0, B)$, $\vec{l} = (R_k \cos \varphi, R_k \sin \varphi, 0)$, $d\vec{l} = (-R_k \sin \varphi, R_k \cos \varphi, 0) d\varphi$, kde R_k značí poloměr kroužku. Po dosazení obdržíme

$$\vec{F} = I_s \int_0^{2\pi} (-R_k \sin \varphi, R_k \cos \varphi, 0) \times (0, 0, B) d\varphi = I_s B R_k \int_0^{2\pi} (\cos \varphi, \sin \varphi, 0) d\varphi = (0, 0, 0).$$

Komentář: Výsledná síla vyjde nulová. K tomu dojde proto, že magnetické pole uvnitř dlouhé cívky je homogenní. Vložíme-li jednoduchý feritový magnet (vytvářející pole podobné dipólovému) do homogenního pole, také se nebude přitahovat k jednomu z pólů (magnet se však natočí díky momentu síly tím způsobem, aby severní pól směřoval k jižnímu a naopak). Sílové účinky se začnou projevovat až v případě pole nehomogenního, například u okraje cívky. Z obrázku 57 vidíme, že výsledná síla (po zintegrování přes celý obvod) je nenulová teprve v případě nehomogenního pole.

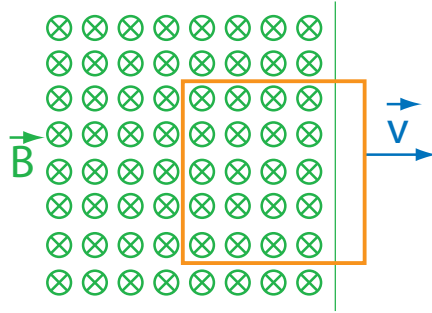


Obrázek 57: Síla na proudový kroužek v a) homogenním a b) v nehomogenním magnetickém poli.

Př. 10.2.

Zadání: Uvažujme homogenní magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, -B)$ pro $x < 0$ a nulové magnetické pole pro $x > 0$. V rovině xy leží čtvercová vodivá smyčka s délkou hran a a s nezanedbatelným odporem R (viz obrázek 58). Čtvercovou smyčku vytahujeme konstantní rychlostí $\vec{v} = (v_0, 0, 0)$ z magnetického pole. Určete výkon potřebný k vytáhnutí smyčky.

Řešení: Magnetický tok odpovídá v tomto případě zjednodušenému vztahu $\phi = BS$. Předpokládáme-li konstantní magnetické pole, pak změna toku může být dána změnou plochy.



Obrázek 58: Čtvercová vodivá smyčka tažená z homogenního magnetického pole.

Uvažujeme-li, že čtvercovou smyčku vytahujeme z magnetického pole, mění se pouze x -ová souřadnice, platí $d\phi = BdS = Badx$. Indukované emn. ve smyčce se rovná $\mathcal{E}_I = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Ba\partial x}{\partial t} = -Bav_0$. Proud je pak $I = -\frac{Bav_0}{R}$. Z obrázku 58 jasně vidíme, že magnetické pole působí na horní část smyčky stejně velkou, ale opačně orientovanou silou jak na spodní část smyčky. Výsledná síla od těchto dvou příspěvků, v případě pevného vodiče, vyjde nulová. Nenulový příspěvek získáme od svislé části smyčky, která je zanořena v magnetickém poli. Síla ve směru osy x bude rovna

$$F = IaB = -\frac{B^2 a^2 v_0}{R}.$$

Znaménko mínus ukazuje, že síla míří proti směru vytahování. Vykonavatel práce musí působit silou proti této síle $\vec{F}_v = -\vec{F}$. Výkon pak jednoduše vypočteme jako

$$P = v_0 F_v = \frac{B^2 a^2 v_0^2}{R}.$$

Komentář: Je evidentní, že výše uvedené skokové magnetické pole není fyzikálně reálné. Přechod od nenulového pole k nulovému musí být hladký, byť může být velmi strmý.

10.2 Maxwellovy rovnice a potenciály

Nyní jsme si již uvedli všechny Maxwellovy rovnice. Z historického hlediska byly vytvořeny na základě pozorovaných fyzikálních jevů, nejde o vztahy odvozené z obecnějších principů. Maxwellovy rovnice popisují provázanost elektrického a magnetického pole, které ve skutečnosti nelze uvažovat odděleně. Dochází tak k prvnímu sjednocení fyzikálních interakcí. Dále popisují vztah mezi elektrickým polem, magnetickým polem a zdrojem ve formě proudu a náboje. Tyto rovnice shrnuje tabulka 4. Další důležité rovnice uvedené v tabulce představují rovnice pro potenciály. Kromě Maxwellových rovnic a rovnic pro potenciály je uvedena v tabulce také rovnice kontinuity, kterou lze odvodit právě z Maxwellových rovnic (což dokazuje jejich fyzikální správnost) a vztahu pro Lorentzovu sílu, která popisuje působení obou zmíněných polí na částici o náboji q .

Potenciály uvedené v tabulce vypadají trochu jinak, než jsme si doposud uvedli. V předchozích kapitolách jsme definovali vektorový a skalární potenciál jako $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ a $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$.

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru			
Zdrojové rovnice		Bez-zdrojové rovnice	
Gaussův zákon	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Gaussův zákon pro magnetické pole
Rozšířený Ampérův zákon	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faradayův zákon
Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru			
Gaussův zákon	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	Gaussův zákon pro magnetické pole
Rozšířený Ampérův zákon	$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_E}{dt}$	$\oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{d\phi_B}{dt}$	Faradayův zákon
Rovnice pro potenciály			
Elektrická intenzita	$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$	$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$	Magnetická indukce
Další rovnice elektromagnetismu			
Rovnice kontinuity	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	Lorentzova síla

Tabulka 4: Maxwellovy rovnice a důležité rovnice elektromagnetismu.

Skalární potenciál jsme zavedli v případě elektrostatiky a vektorový v případě magnetostatiky. Maxwellovy rovnice jsou dynamické a závisí na čase. Proto podle nich musíme upravit i rovnice pro potenciály. Dosadíme výše uvedené potenciály do Faradayova zákona

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\varphi = 0 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Rotace gradientu potenciálu se identicky rovná nule. To by znamenalo, že magnetické pole musí být stacionární (z tohoto předpokladu jsme při zavádění těchto potenciálů vycházeli). Abychom tuto statičnost odstranili, rovnice pro potenciály musíme pozměnit. To, že magnetická indukce vypočtená z vektorového potenciálu je v pořádku, nám ukazuje Gaussova rovnice pro magnetické pole. Takže změnu provedeme u rovnice s elektrickou intenzitou. Přidejme k intenzitě nový člen, například $\vec{E} = \vec{C} - \vec{\nabla}\varphi$. Dosazením do Faradayova zákona obdržíme $\vec{\nabla} \times \vec{C} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} \Rightarrow \vec{C} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Jako důkaz správnosti nám jednoduše poslouží opět

tovné zderivování a odvození Faradayova zákona. **Potenciály** tudíž získáme v novém tvaru

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (61)$$

Jak jsme ukázali, rovnice pro potenciály (61) mohou sloužit přímo k nahrazení bezzdrojových Maxwellových rovnic.

Řešení kompletních Maxwellových rovnic s nulovým zdrojem ($\rho = 0$, $\vec{j} = \vec{0}$) popisuje elektromagnetickou vlnu (světlo) ve vakuu, která se pohybuje rychlostí c . Tato rychlost se právě rovná $c = \sqrt{1/\mu_0\varepsilon_0}$. Je velmi zajímavé, že v řešení se vyskytuje rychlost jako neměnná konstanta. Selský rozum říká, že pozorovatel, který pozoruje světlo, by měl měřit jinou rychlost než pozorovatel, jenž se vzhledem k prvnímu pozorovateli pohybuje nějakou nenulovou rychlostí. Tyto rozpory zamotaly hlavy nejslavnějším fyzikům devatenáctého století. Podařilo se je rozlousknout až ve století dvacátém slavnému německému fyzikovi Albertu Einsteinovi (1879 – 1955), který postuloval, že pro všechny pozorovatele se světlo pohybuje stejnou rychlostí, nezávisle na vzájemné rychlosti daných pozorovatelů.

10.3 Kalibrační invariance

V minulých kapitolách jsme si ukázali, že ani skalární, ani vektorový potenciál není určen jednoznačně. Uvažujme rovnici pro vektorový potenciál $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$. Jak jsme zmínili dříve, k potenciálu můžeme přičíst kalibrační funkci f tak, že výsledné magnetické pole zůstane nezměněno: $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot f$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}.$$

Elektrická intenzita závisí jak na vektorovém, tak na skalárním potenciálu $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Kalibrační funkce u vektorového potenciálu pozmění i elektrickou intenzitu. K tomu však nesmí dojít, proto kalibrace musí být provedena tak, aby \vec{E} a \vec{B} zůstaly nezměněny, poněvadž \vec{E} a \vec{B} jsou fyzikálně měřitelné veličiny. Díky tomu, že jsme přešli od statického (případně stacionárního) pole k nestatickému, můžeme uvažovat skalární potenciál ve tvaru $\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}$, kde f představuje stejnou funkci jako v případě vektorového potenciálu. S těmito kalibracemi zůstává \vec{E} i \vec{B} invariantní. To lze jednoduše ukázat:

$$-\vec{\nabla} \left(\varphi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} f) = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} f = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E}.$$

Shrneme-li výše uvedené, k potenciálům lze přičíst **kalibrační funkci** těmito způsoby

$$\varphi \rightarrow \varphi - \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \cdot f,$$

kde $f(t, x, y, z)$ označuje zcela obecnou funkci. Změnu lze provést, aniž by došlo ke změně fyzikálně měřitelných veličin.

Význam kalibrační volnosti převyšuje klasickou elektrodynamiku. Kalibrační volnost například v kvantové mechanice zodpovídá za existenci nosiče elektromagnetismu fotonu nebo za zachování elektrického náboje.

Př. 10.3.

Zadání: Uvažujte skalární potenciál ve tvaru $\varphi = Q/r$ a vektorový potenciál ve tvaru $\vec{A} = Qt\vec{r}/r^3$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ a $\vec{r} = (x, y, z)$. Zjistěte \vec{E} a \vec{B} .

Řešení: Využijeme rovnici $\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} = -\vec{r}/r^3$. Pro vektorový potenciál platí

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \left(\frac{Qt\vec{r}}{r^3} \right) = Qt\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -Qt\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \cdot \frac{1}{r} = 0.$$

Elektrická intenzita se rovná

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{Q}{r} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{Qt\vec{r}}{r^3} \right) = \frac{Q\vec{r}}{r^3} - \frac{Q\vec{r}}{r^3} = 0.$$

Komentář: Z výsledku je patrné, že při jiné kalibraci bychom mohli zvolit potenciál a vektorový potenciál ve tvaru $\varphi = 0$ a $\vec{A} = 0$, a výsledné \vec{E} a \vec{B} by zůstalo nezměněné. Kalibrační funkce f by v tomto případě odpovídala $f = -Qt/r$. Ze stejného důvodu lze potenciál z bodového zdroje zapsat pomocí pouze vektorového potenciálu jako $\vec{A} = -Qt\vec{r}/r^3$.

Př. 10.4.

Zadání: Uvažujte potenciály ve tvaru $\varphi = 0$ a $\vec{A} = (0, 0, C \ln(\rho) \sin(\omega t))$, kde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Zjistěte \vec{E} a \vec{B} .

Řešení:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -C\omega \ln(\rho) \cos(\omega t) (0, 0, 1), \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y}, -\frac{\partial A_z}{\partial x}, 0 \right) = \left(\frac{C \sin(\omega t)}{\rho^2} y, -\frac{C \sin(\omega t)}{\rho^2} x, 0 \right) = \frac{C \sin(\omega t)}{\rho^2} (y, -x, 0). \end{aligned}$$

10.4 Lorenzova kalibrační podmínka

Jak jsme uvedli výše, potenciály nejsou zcela jednoznačně určeny. Pro jejich určení se používají kalibrační podmínky. Jednu z kalibračních podmínek jsme využili pro odvození Biotova–Savartova zákona. Tato kalibrační podmínka představuje magnetostacionární podpřípad tzv. **Lorenzovy kalibrační podmínky** (rozlišujte Lorenz a Lorentz, jde o jiné osoby). Tu lze zapsat ve tvaru

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad (62)$$

kde c označuje rychlost světla ve vakuu. Ani s touto podmínkou však nemají potenciály jednoznačné určení.

Př. 10.5.

Zadání: Uvažujte stejné pole jako v předchozím příkladu, $\varphi = 0$ a $\vec{A} = (0, 0, C \ln(\rho) \sin(\omega t))$, kde $\rho^2 = x^2 + y^2$. Zjistěte, zdali splňuje Lorenzovu kalibrační podmínku.

Řešení:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0.$$

Kalibrační podmínka je splněna.

Př. 10.6.

Zadání: Uvažujte ideální nekonečně dlouhou válcovou cívku, ve které se nachází stacionární magnetické pole $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, kde B_z zůstává konstantní. Určete vektorový potenciál uvnitř cívky \vec{A} . Předpokládejte $A_x = 0$ a $A_z = 0$.

Řešení: Nenulová složka magnetické indukce je dána $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$. Uvažujeme-li $A_x = 0$, pak $A_y = B_z x + F(y, z)$. Aby se také ypsilonová složka vektoru magnetické indukce rovnala nule, musí při splnění podmínky $A_z = 0$ platit $\frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$, tedy $A_y = B_z x + F(y)$. Lorenzova kalibrační podmínka $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ upraví vektorový potenciál na $\vec{A} = (0, B_z x, 0)$.

10.5 Maxwellovy rovnice v prostředí

Maxwellovy rovnice uvedené v tabulce 4 jsou lineární diferenciální rovnice. Jak jsme však ukázali, v případě dielektrika si látka v elektrickém poli polarizací vytváří vlastní náboje a vlastní pole. Gaussův zákon (26) se tím stává (vzhledem k elektrické intenzitě) nelineární $\vec{D} = \vec{E} \varepsilon_0 + \vec{P}$.

Uvažujme homogenní a stacionární magnetické pole \vec{B}_0 . Do tohoto pole vložíme feromagnetický materiál. Ten je specifický tím, že má vlastní magnetické momenty⁷, které se při vložení do vnějšího pole uspořádají ve směru vnějšího pole. Magnetické pole zesilují. Pozorovatel v bezprostřední blízkosti feromagnetika měří pole silnější $\vec{B} = \vec{B}_0 + \mu_0 \vec{M}$, kde \vec{M} označuje **vektor magnetisace**, který je tvořený vlastními magnetickými momenty proudů \vec{j}_{mag} . Platí $\vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{j}_{\text{mag}}$.

Uvažujme Ampérův zákon v nerozšířeném tvaru $\vec{\nabla} \times \vec{B}_0 = \mu_0 \vec{j}$. Přidáme-li feromagnetikum, musíme do vztahu připsat proudovou hustotu, která vlivem vnějšího pole vzniká v látce $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_{\text{mag}}$. Zavedením **magnetické intenzity** $\mu_0 \vec{H} = \vec{B} - \mu_0 \vec{M}$ lze upravit Ampérův zákon do tvaru

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}.$$

Berme nyní v úvahu kompletní rozšířený Ampérův zákon $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. Uvažujme-li časově proměnlivé elektrické pole v látce, pak proud nábojů může popisovat jak translační pohyb nábojů, tak malý přesun nábojů způsobující polarizaci. Celkový proud bude rozšířen o \vec{j}_{pol} . Takže platí

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{pol}} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Použijeme-li definici \vec{D} a rovnici pro polarizační proud $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_{\text{pol}}$, obdržíme kompletní **Ampérův zákon pro látkové prostředí**

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (63)$$

⁷Vlastní magnetické momenty látek pochází především ze spinů (kvantově mechanická vlastnost odpovídající rotaci) nabitých částic (elektronů, kvarků) a z pohybů elektronů okolo jádra.

Maxwellovy rovnice v prostředí vyjadřuje tabulka 5, kde μ značí konstantu, která v aproximaci vyjadřuje lineární závislost mezi magnetickou intenzitou a magnetickou indukcí pomocí

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (\vec{H} + \chi_m \vec{H}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H},$$

kde χ_m je **magnetická susceptibilita**.

Maxwellovy rovnice v prostředí			
Zdrojové rovnice		Bez-zdrojové rovnice	
Gaussův zákon	$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	Gaussův zákon pro magnetické pole
Rozšířený Ampérův zákon	$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	Faradayův zákon
Vztahy indukce a intenzity			
Elektrická intenzita	$\varepsilon_0 \vec{E} = \vec{D} - \vec{P}$	$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$	Magnetická indukce
Vztahy indukce a intenzity, lineární aproximace			
Elektrická intenzita	$\varepsilon \vec{E} = \vec{D}$	$\vec{B} = \mu \vec{H}$	Magnetická indukce

Tabulka 5: Maxwellovy rovnice v prostředí.

Je potřeba zdůraznit, že poslední řádek tabulky 5 je pouze aproximativní a platí pouze pro některé materiály, slabá pole a pole měnící se s časem velmi málo.

10.6 Energie elektromagnetického pole

10.6.1 Hustota energie elektromagnetického pole

Z minulých kapitol víme, že částice v elektrostatickém poli má potenciální energii. Elektrostatické pole vytvářejí nabitě částice a každá částice má v tomto poli vlastní potenciální energii. V případě, že bychom měli náboje pouze jednoho znaménka (kupříkladu kladného), tuto energii bychom mohli získat přesunutím náboje do větší vzdálenosti od ostatních nábojů.

Víme, že elektromagnetické pole je se svými zdroji svázáno pomocí Maxwellových rovnic. Přísluší-li energie zdrojům (hustotě náboje a proudu), pak totéž musí platit i vůči elektromagnetickému poli. Pro následující popis energie příslušející elektromagnetickému poli zavedeme **hustotu energie** w_{EM} , pro kterou platí $E_{EM} = \int_V w_{EM} dV$.

Odvození hustoty energie elektromagnetického pole lze provést za použití Maxwellových rovnic (viz tabulka 4). Po vynásobení Faradayova zákona vektorem magnetické indukce a po

vynásobením rozšířeného Ampérova zákona elektrickou intenzitou vyjde

$$\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Tyto rovnice od sebe odečteme a upravíme do tvaru

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(B^2 + \frac{E^2}{c^2} \right).$$

Na levou stranu rovnice použijeme identitu $\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E})$, jež zjednoduší rovnici na

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) = \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(B^2 + \frac{E^2}{c^2} \right).$$

Uvažujeme-li Lorentzovu sílu (46) vynásobenou vektorem rychlosti, obdržíme **výkon**

$$P = \vec{v} \cdot \vec{F} = q \vec{v} \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = q \vec{v} \cdot \vec{E}.$$

Máme-li náboj spojitý a nikoli bodový, lze výše uvedenou rovnici zapsat pomocí hustoty výkonu $P = \int p dV$.

$$\mu_0 p = \mu_0 q \vec{v} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{E}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(B^2 + \frac{E^2}{c^2} \right),$$

kde $q = \int \rho dV$ a $\vec{j} = \vec{v} \rho$. Výkon elektromagnetického pole (vztažený na jednotku objemu) je dán dvěma členy. První odpovídá divergenci Poyntingova vektoru $\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$. **Poyntingův vektor** popisuje šíření elektromagnetické energie kupříkladu elektromagnetické vlny (světla). Tento člen vyjadřuje změnu energie příchodem či odchodem elektromagnetických vln. Druhý člen popisuje časovou změnu elektrického a magnetického pole. Pokud nebudeme uvažovat příchod či odchod elektromagnetické vlny, pak výkon vypočítáme jako zápornou změnu energie v čase $P = -\frac{\partial E}{\partial t}$ nebo $p = -\frac{\partial w_{EM}}{\partial t}$. Dosazením do předešlých rovnic a odstraněním derivace získáme rovnici

$$w_{EM} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right). \quad (64)$$

Energie v daném objemu je dána objemovým integrálem.

10.6.2 Energie elektrostatického pole

Uvažujme elektrostatické pole $\vec{B} = 0$. Dále předpokládejme, že pole popisují veličiny $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$, $\rho = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$. Potenciál zvolme v nekonečnu roven nule. Uvažujeme-li celkovou elektrostatickou energii, musíme započítat celkový prostor (který je nekonečný). Výsledná energie pak vyjde

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = -\frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{E} dV.$$

Použijeme-li identitu z příkladů na doma 1.4, lze výraz upravit do podoby

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \varphi \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) dV = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV - \frac{\varepsilon_0}{2} \oint_{\partial V} \varphi \vec{E} \cdot d\vec{S},$$

kde ∂V značí hranici objemu. Uvažujeme-li objem nekonečný, integrál přechází po hranici v nekonečno, kde jsme si zvolili $\varphi = 0$. Pak i integrál přes hranici bude nulový. Výslednou **elektrostatickou energii** je možno vypočítat dvojím způsobem

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV, \quad E = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV. \quad (65)$$

Příklady k procvičení 10.1.

Uvažujte magnetický dipól v obdobném tvaru jako elektrický dipól

$$\vec{B} = K \left\langle \frac{(x-a, y, z)}{[(x-a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{(x+a, y, z)}{[(x+a)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\rangle.$$

Jaký je magnetický tok rovinnou, která je dána rovnicí $x = 0$?

Příklady k procvičení 10.2.

Uvažujte elektrické pole ve tvaru $\vec{E} = \frac{k}{\varrho^2} (y, -x, z)$, kde $\varrho^2 = x^2 + y^2$. Určete vektor magnetické indukce.

Příklady k procvičení 10.3.

Uvažujte skalární a vektorový potenciál v následujícím tvaru $\varphi = \frac{A_0}{2} \left(\frac{3}{k} - 2r^2 \right) e^{-k(r^2 + c^2 t^2)}$, $\vec{A} = A_0 \vec{r} t e^{-k(r^2 + c^2 t^2)}$. Ukažte, zdali platí Lorenzova kalibrační podmínka.

Příklady k procvičení 10.4.

Uvažujte skalární a vektorový potenciál ve tvaru $\varphi = 0$, $\vec{A} = (A_0 \sin(kz - \omega t), 0, 0)$. Vypočtěte hustotu náboje, vektory elektrické intenzity, magnetické indukce a hustotu proudu. Dále zkontrolujte platnost bez-zdrojových Maxwellových rovnic.

Příklady k procvičení 10.5.

Určete elektrostatickou energii koule o poloměru R s homogenním rozložením náboje.

Doporučená literatura

Elektrina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: str. 51-52, 64-65, 231-249, 258-271, 322-340

Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: str. 293-304, 317-330

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: str. 135-138, 272-278, 303-314, 331-332, 358-366 417-419

Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: kap. 31, 32

11 Cívky

11.1 Vlastní indukčnost

V minulých kapitolách jsme si představili Maxwellovy rovnice a pomocí nich jsme si ukázali, jak jsou provázány vektory \vec{E} a \vec{B} . Dále jsme si předvedli, že se magnetické pole vytváří okolo vodiče, jímž protéká proud. Stočením vodiče do smyček zhotovíme cívku, která se používá jako generátor magnetického pole. Dle Faradayova zákona, pokud máme časově proměnlivé magnetické pole, vzniká i elektrické smyčkové pole (vektory \vec{E} jsou tečnami k uzavřeným křivkám). Pokud napojíme cívku na střídavé napětí a vložíme do ní druhou cívku, střídavé magnetické pole v druhé cívce generuje (střídavé) indukované elektromotorické napětí. A jestliže je cívka uzavřena v obvodu, potom jí protéká i střídavý proud. Myšlenkově jsme tak sestrojili základní prvky transformátoru.

Ještě než se začneme zabývat působením jedné cívky na druhou, zastavme se na chvíli u jevu, kdy magnetické pole generované cívkou působí na cívku, jež jej generuje.

Uvažujme dlouhou cívku (solenoid), která generuje časově proměnlivé magnetické pole. Jak jsme uvedli v předchozím textu, magnetické pole (velikost vektoru magnetické indukce) uvnitř cívky lze přibližně vypočítat jako

$$B = \frac{\mu_0 I N}{l},$$

kde I značí generující proud, N určuje počet závitů cívky a l je délka cívky. Máme-li magnetické pole uvnitř cívky homogenní, tok cívkou se rovná ploše průřezu cívky vynásobené magnetickou indukcí $\phi = BS$.

Faradayův zákon říká, že indukované elektromotorické napětí na uzavřené smyčce v proměnlivém magnetickém poli se rovná záporné časové změně toku $\mathcal{E}_I = -N \frac{d\phi}{dt}$. Zdůrazněme, že samotná cívka má N závitů. To znamená, že na každý závit působí jedno $\frac{d\phi}{dt}$ (závity jsou zapojeny do série, celkové emn. na cívce je součtem emn. na každém závitě). Uvažujeme-li, že za změnou toku stojí proměnlivý proud, pak prostým dosazením do tohoto vztahu obdržíme

$$\mathcal{E}_I = -\frac{\partial I}{\partial t} \frac{\mu_0 S N^2}{l}.$$

Výrazy za derivovaným proudem jsou konstanty, které označíme L . Výsledný výraz lze zapsat ve tvaru

$$\mathcal{E}_I = -\frac{\partial I}{\partial t} L. \quad (66)$$

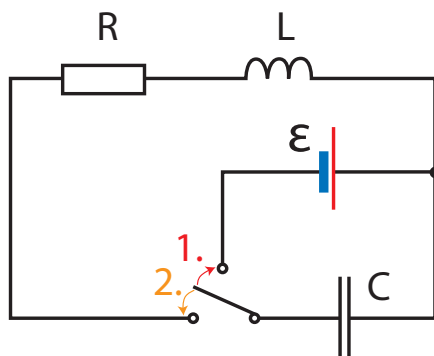
Konstanta L se nazývá **vlastní indukčnost cívky**. Pro případ dlouhého solenoidu je vlastní indukčnost cívky rovna

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}. \quad (67)$$

Jasně vidíme, že indukované elektromotorické napětí vytvořené cívkou působí proti změně protékajícího proudu. Lze hledat podobnost mezi napětím vytvářeným cívkou a úbytkem napětí na rezistoru. Indukované emn. vytvářené cívkou však není úměrné proudu jako v případě Ohmova zákona, ale jeho časové derivaci.

Př. 11.1.

Zadání: Uvažujme obvod na obrázku 59. Nejdříve obvod zapojíme tak, aby zdroj emn. nabil kondenzátor o kapacitě C (zapojení 1). Poté se přepínač přepojí tak (zapojení 2), aby v obvodu byl kondenzátor, cívka (o indukčnosti L) a rezistor (o odporu R), takzvaný LRC obvod. Jak se kondenzátor vybíjí, vytváří v obvodu proud. Jaká je časová závislost proudu na čase?



Obrázek 59: LRC obvod.

Řešení: Kondenzátor v obvodu funguje jako zdroj napětí, označme $U_C = Q/C$ (v čase $t_0 = 0$ je $Q = Q_0$). Naopak rezistor $U_R = -RI$ a cívka $U_L = -L \frac{\partial I}{\partial t}$ způsobují v tomto případě úbytek napětí, proto jsme zvolili znaménko mínus. Projdeme-li celou smyčkou, je součet všech napětí nulový

$$U_C + U_L + U_R = 0 \Rightarrow \frac{Q}{C} - L \frac{\partial I}{\partial t} - RI = 0.$$

Na počátku máme kondenzátor nabitý. Proud začne odvádět náboj z kondenzátoru. Čím bude větší proud, tím bude větší i úbytek náboje na kondenzátoru $I = -\frac{\partial Q}{\partial t}$

$$\frac{Q}{C} + L \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R \frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \Rightarrow Q + LC \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + CR \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Pro nalezení přesného řešení použijeme substituci

$$Q = ye^{ct} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} e^{ct} + yce^{ct}, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} e^{ct} + 2 \frac{\partial y}{\partial t} ce^{ct} + yc^2 e^{ct}.$$

S touto substitucí se výše uvedená diferenciální rovnice změní na

$$ye^{ct} + LC \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} e^{ct} + LC 2 \frac{\partial y}{\partial t} ce^{ct} + LC yc^2 e^{ct} + CR \frac{\partial y}{\partial t} e^{ct} + CR yce^{ct} = 0.$$

Každý člen této rovnice podělíme výrazem e^{ct} . Přerováním členů obdržíme

$$y (1 + CRc + LCc^2) + \frac{\partial y}{\partial t} (LC2c + CR) + LC \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

Pokud si zvolíme $c = -R/2L$, obdržíme již známou diferenciální rovnici

$$y \left(1 - \frac{R^2 C}{4L} \right) + LC \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

jejíž řešení se rovná

$$y = A \cos(\omega t + \varphi), \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}.$$

Z počátečních podmínek zjistíme integrační konstanty A, φ . Na počátku uvažujeme kondenzátor nabitý nábojem Q_0 a proud je nulový $I_0 = 0$. Výsledné řešení zapíšeme ve tvaru

$$Q_0 = A \cos(\varphi), \quad \tan(\varphi) = \frac{c}{\omega} \Rightarrow Q = Q_0 e^{-\frac{Rt}{2L}} \frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\cos(\varphi)}, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}, \quad \varphi = \arctan\left(-\frac{R}{2L\omega}\right).$$

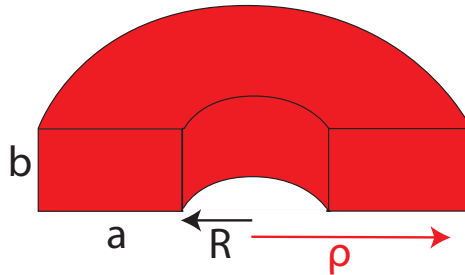
Komentář: Uvažujeme-li odpor nulový, je nulová i konstanta c a $\omega = \frac{1}{LC}$. Řešení přepíšeme do tvaru

$$Q = Q_0 \cos(\omega t).$$

Náboje se přelévají z jedné desky kondenzátoru na druhou. Jakmile cívkou protéká proud, cívka se jej snaží udržet, a tím nabíjí desky kondenzátoru, dokud náboje Q na jedné a $-Q$ na druhé desce nedosáhnou maxima. Náboj je tak periodickou (cosinovou) funkcí času. Přidáme-li do obvodu rezistor (prakticky reálný případ), bude se maximální výchylka snižovat exponenciálně v čase.

Př. 11.2.

Zadání: Uvažujte cívku tvaru toroidu, jež má průřez tvaru obdélníku. Vypočtěte vlastní indukčnost cívky.



Obrázek 60: Toroidální cívka s obdélníkovým průřezem.

Řešení: Magnetickou indukci uvnitř cívky určíme dle Ampérova zákona $B2\pi\rho = N\mu_0 I$, kde N značí počet závitů, I je proud protékající cívku, ρ označuje vzdálenost od osy a B je velikost magnetické indukce. Magnetický tok protékající jedním závitkem pak vypočteme $\phi = \int B dS = \int B d\rho dz$, kde $z \in (0; b)$ a $\rho \in (R; R + a)$. Integrál zjistíme ze vztahu

$$\phi = \int \frac{N\mu_0 I}{2\pi\rho} d\rho dz = \frac{N\mu_0 I}{2\pi} z \Big|_0^b \ln \rho \Big|_R^{R+a} = \frac{N\mu_0 I b}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

Podle vztahu pro tok všemi N závity $N \frac{d\phi}{dt} = L \frac{\partial I}{\partial t}$ lze odvodit

$$L = \frac{N^2 \mu_0 b}{2\pi} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right).$$

Př. 11.3.

Zadání: Uvažujte obvod s cívku o indukčnosti L a rezistorem s odporem R . Na počátku je proud cívku a rezistorem I_0 . Vypočtete časový vývoj proudu a práci magnetického pole cívky, kterou vykoná předtím, než proud klesne na nulu.

Řešení: Máme jednoduchý obvod obsahující pouze cívku a rezistor, například ve formě žárovky. Pokud na počátku prochází cívku proud I_0 , pak rezistor způsobuje úbytek napětí $U = RI$, který snižuje proud. Cívka vytváří indukované emn. $\mathcal{E}_I = -L \frac{\partial I}{\partial t}$, které míří proti změně proudu, a proto proud okamžitě neklesne na nulu. Z výše uvedeného jednoduše zjistíme

$$U - \mathcal{E}_I = 0 \Rightarrow RI + L \frac{\partial I}{\partial t} = 0 \Rightarrow I = I_0 e^{-\frac{Rt}{L}}.$$

Proud v čase exponenciálně klesá.

Žárovka (rezistor) svítí, jestliže jí teče proud. Taková žárovka má jistě výkon a do svého okolí uvolňuje energii.

Jak jsme již dříve uvedli, výkon žárovky (lépe příkon) lze vypočítat jako násobek proudu a napětí $P = UI$. Zdrojem napětí je v tomto případě cívka, tedy $P = -LI \frac{\partial I}{\partial t}$. Práci z výkonu obdržíme právě jako jeho časový integrál

$$W = \int P dt = - \int LI \frac{\partial I}{\partial t} dt = -L \int_{I_0}^0 I dI = L \int_0^{I_0} I dI = \frac{1}{2} LI_0^2.$$

Meze integrálu jsme zvolili tak, aby na začátku byl proud nenulový a na konci nulový.

Př. 11.4.

Zadání: Uvažujme dlouhý solenoid. Vypočtete hustotu energie magnetického pole uvnitř tohoto solenoidu. Srovnejte s hustotou energie elektrického pole mezi deskami kondenzátoru.

Řešení: Magnetické pole uvnitř dlouhé cívky v úseku o délce l vyjádříme pomocí vztahu $B = \frac{NI\mu_0}{l}$, kde N značí počet závitů v cívice o délce l . Pole je uvnitř cívky homogenní. Objem uvnitř cívky (nikoli celkový, ale pouze dílčí) získáme ze vztahu $V = lS$. Pro dlouhou cívku je indukčnost cívky dána rovnicí (67). Hustotu energie cívky, kterou protéká proud, vypočteme

$$w_M = \frac{E_M}{V} = \frac{1}{2} \frac{LI^2}{V} = \frac{1}{2} \frac{\mu_0 S N^2}{l} \frac{\left(\frac{lB}{N\mu_0} \right)^2}{Sl} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

V případě deskového kondenzátoru energii získáme ze vztahu $E_E = \frac{1}{2}CU^2$. Kapacitu deskového kondenzátoru vypočteme $C = \frac{S\varepsilon_0}{d}$ (viz rovnice (22)). Napětí mezi deskami určíme vztahem $U = dE$. Objem mezi deskami zjistíme ze vztahu $V = Sd$. Hustotu energie vyjádříme:

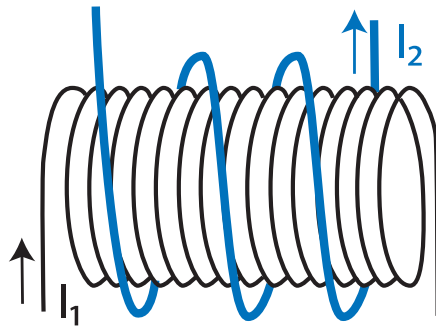
$$w_E = \frac{1}{2} \frac{S\varepsilon_0 (dE)^2}{d Sd} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2}.$$

Výsledná hustota energie je funkce pouze elektrického a magnetického pole, případně příslušných konstant, pro které platí $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$. Sečteme-li oba výsledky, obdržíme známý vztah z předešlé kapitoly (64) pro hustotu energie elektromagnetického pole

$$w_{EM} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right).$$

11.2 Vzájemná indukčnost

Uvažujme dvě cívky. Cívka 1 je dlouhý solenoid, kterou ovinuje kratší cívka 2 (viz obrázek 61).



Obrázek 61: Dvě cívky vložené do sebe.

Nechť cívkou 1 o délce l_1 a počtu závitů N_1 protéká proud I_1 . Ten tvoří magnetické pole uvnitř této cívky o velikosti $B_1 = \mu_0 I_1 \frac{N_1}{l_1}$. Je-li cívka 1 dostatečně dlouhá, je pole mimo ni malé. Celkový magnetický tok cívkou 2 (tok každým závitěm) se pak rovná $\phi_2 = S_1 N_2 B_1$, kde N_2 určuje počet závitů druhé cívky, S_1 značí plochu řezu první cívky. Ve vztahu pro tok jsme použili S_1 , protože magnetické pole B_1 je vně cívky 1 zanedbatelné oproti poli uvnitř. Tok cívkou 2 je úměrný počtu závitů. Indukované elektromotorické napětí na druhé cívce se z Faradayova zákona rovná

$$\mathcal{E}_{I_2} = -\frac{d\phi_2}{dt} = -\frac{\mu_0 S_1 N_1 N_2}{l_1} \frac{\partial I_1}{\partial t}.$$

Na cívce 2 se vytváří indukované emn., které závisí na časové změně proudu. Veličiny uvedené před časovou derivací jsou všechny konstanty týkající se obou cívek a dají se vyjádřit souhrnně pomocí veličiny, jež se nazývá **vzájemná indukčnost** M_{21} , tedy

$$\mathcal{E}_{I_2} = -M_{21} \frac{\partial I_1}{\partial t}.$$

Pokud cívku 2 napojíme na střídavý zdroj napětí, jenž generuje proud, pak cívku 1 prochází magnetický tok a následně v ní generuje indukované emn. Vzhledem ke konstrukci dvou cívek z obrázku 61 je následující výpočet obtížnější než v prvním případě, kde můžeme užít řadu aproximací. Uvažujeme-li vzájemnou indukčnost, výsledek se shoduje

$$\mathcal{E}_{I1} = -M_{12} \frac{\partial I_2}{\partial t}.$$

Pomocí vektorového potenciálu dokážeme, že $M_{12} = M_{21}$.

Uvažujme obecně dvě cívky libovolného tvaru, které vytvářejí magnetické pole popsané vektory \vec{A} a \vec{B} , kde $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$. Jak víme z Faradayova zákona, indukované emn. na cívce je záporná derivace magnetického toku. Uvažujme nehomogenní magnetické pole, tok vypočteme integrálem magnetické indukce přes plochu všech závitů

$$\mathcal{E}_{I1} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \int (\nabla \times \vec{A}_2) \cdot d\vec{S}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A}_2 \cdot d\vec{r}_1.$$

Použitím rovnice (56) obdržíme

$$\mathcal{E}_{I1} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint \vec{A}_2 \cdot d\vec{r}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint \int \frac{\vec{j}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} dV_2 \cdot d\vec{r}_1 = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \oint \oint \frac{I_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1.$$

Uvažujeme-li, že smyčka se nerozvětjuje a její tvar se v čase nemění, můžeme proud vytknout

$$\mathcal{E}_{I1} = -\frac{\partial I_2}{\partial t} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1 = -\frac{\partial I_2}{\partial t} M_{12}.$$

Záměnou $1 \longleftrightarrow 2$ obdržíme

$$\mathcal{E}_{I2} = -\frac{\partial I_1}{\partial t} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 = -\frac{\partial I_1}{\partial t} M_{21}.$$

Vidíme, že integrály jsou stejné

$$M_{21} = M_{12} = M = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1. \quad (68)$$

Indukované elektromotorické napětí se rovná

$$\mathcal{E}_{I1} = -M \frac{\partial I_2}{\partial t}. \quad (69)$$

Použitím tohoto vztahu a integrálního tvaru Faradayova zákona (60) lze odvodit rovnici pro tok magnetického pole, které vytváří cívka 1 a prochází cívku 2, ve tvaru

$$\phi_{21} = MI_1. \quad (70)$$

Tok ϕ_{21} je obecně jiný než tok ϕ_{12} .

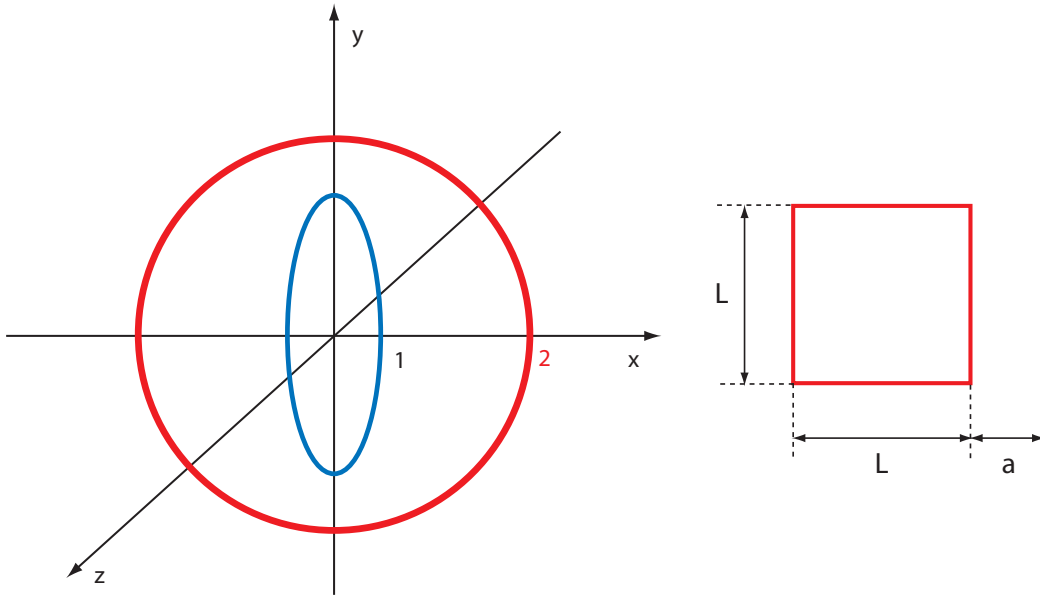
Př. 11.5.

Zadání: Uvažujte dlouhý solenoid. Uvnitř solenoidu visí kruhová smyčka, normála k rovině smyčky je natočená o úhel ϑ oproti ose solenoidu. Zjistěte vzájemnou indukčnost M .

Řešení: Magnetické pole uvnitř solenoidu je homogenní. Je-li smyčka natočená o úhel ϑ , pak smyčkou protéká tok magnetického pole $\phi = BS \cos \vartheta$, kde B značí velikost magnetické indukce uvnitř solenoidu a S označuje plochu kruhové smyčky. Uvažujeme-li délkovou hustotu závitů η , pak magnetickou indukci vyjádříme $B = \mu_0 \eta I$. Indukované emn. na smyčce je dáno Faradayovým zákonem $\mathcal{E}_I = -\frac{d\phi}{dt} = -\mu_0 \eta S \cos \vartheta \frac{\partial I}{\partial t}$. Porovnáním s rovnicí (69) jednoduše zjistíme, že indukčnost se rovná $M = \mu_0 \eta S \cos \vartheta$.

Př. 11.6.

Zadání: Vypočítejte vzájemnou indukčnost dvou na sebe kolmých soustředných proudových kruhových smyček (viz obrázek 62 a)).



Obrázek 62: a) Dvě kolmé soustředné smyčky. b) Čtvercová smyčka a vodič.

Řešení: Pro vyřešení tohoto příkladu použijeme rovnici (68). Polohové vektory smyček uvažujme ve tvaru $\vec{r}_1 = (R_1 \cos \varphi_1, R_1 \sin \varphi_1, 0)$ a $\vec{r}_2 = (0, R_2 \cos \varphi_2, R_2 \sin \varphi_2)$. Dosazením do rovnice (68) obdržíme

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{(-R_1 \sin \varphi_1, R_1 \cos \varphi_1, 0) \cdot (0, -R_2 \sin \varphi_2, R_2 \cos \varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2}{\left[(R_1 \cos \varphi_1)^2 + (R_1 \sin \varphi_1 - R_2 \cos \varphi_2)^2 + (R_2 \sin \varphi_2)^2 \right]^{1/2}} = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{-R_1 R_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 d\varphi_1 d\varphi_2}{\left[R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \right]^{1/2}} = |R_1 \sin \varphi_1 = u, R_2 \cos \varphi_2 = v| = \\
 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{dudv}{\left[R_1^2 + R_2^2 - 2uv \right]^{1/2}} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left[R_1^2 + R_2^2 - 2uv \right]^{1/2} \frac{dv}{v} \Big|_{\varphi_1=0}^{\varphi_1=2\pi} = \\
 &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \left[R_1^2 + R_2^2 - 2vR_1 \sin \varphi_1 \right]^{1/2} \frac{dv}{v} \Big|_0^{2\pi} = 0.
 \end{aligned}$$

Př. 11.7.

Zadání: Uvažujte čtvercovou smyčku v blízkosti nekonečně dlouhého lineárního vodiče ležící v jedné rovině. Spočítejte vzájemnou indukčnost. Délku hrany čtverce uvažujte L a vzdálenost od vodiče a (viz obrázek 62 b)).

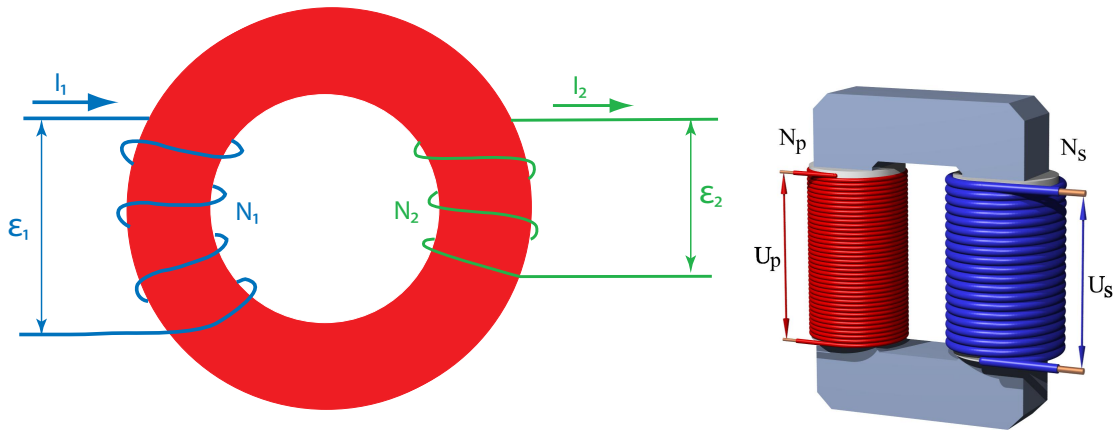
Řešení: Víme, že magnetické pole v blízkosti vodiče se rovná $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Dle obrázku uvažujeme $r = x$. Tok čtvercovou smyčkou je pak

$$\phi = \int B dS = \int_0^L \int_a^{L+a} B dx dy = L \int_a^{L+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \frac{L\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{L+a}{a}.$$

Vzájemná indukčnost se za použití rovnice (70) rovná $M = \frac{L\mu_0}{2\pi} \ln \frac{L+a}{a}$.

11.3 Transformátor

Uvažujme feromagnetikum (látku, jež zesiluje magnetické pole) toroidálního tvaru o obvodu l . Feromagnetikum jsme použili proto, aby vzniklé magnetické indukční čáry zůstaly uzavřené uvnitř něj. Feromagnetikum má relativní permeabilitu $\mu_r \gg 1$. Toroid obmotáme dvěma vodiči, kterými protékají proudy I_1 a I_2 ⁸.



Obrázek 63: Transformátor.

Uvažujme ideální transformátor $\mu_r \rightarrow \infty$, který pracuje beze ztrát a bez rozptylu. Počet závitů transformátoru předpokládejme N_1 a N_2 . Dle Ampérova zákona se magnetické pole uvnitř feromagnetického toroidu vypočte z rovnice

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu (N_1 I_1 + N_2 I_2).$$

Magnetický tok pak vyjádříme vztahem $\phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$.

Uvažujme, že první cívka je připojena ke zdroji střídavého elektromotorického napětí \mathcal{E}_1 a na koncích druhé cívky lze měřit časově závislé napětí \mathcal{E}_2 . Oba obvody lze, dle druhého Kirchhoffova zákona, popsat ve tvaru

$$\mathcal{E}_1 - \frac{d\phi}{dt} N_1 = 0, \quad \mathcal{E}_2 - \frac{d\phi}{dt} N_2 = 0.$$

⁸V literatuře lze najít označení pro střídavé proudy, které jsou potřebné pro fungování transformátoru, malým písmenem i .

Pokud první rovnici vynásobíme N_2 a druhou N_1 a odečteme je od sebe, obdržíme rovnici $\mathcal{E}_1 N_2 - \mathcal{E}_2 N_1 = 0$. Úpravou získáme známý vztah pro transformaci napětí transformátorem

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (71)$$

Transformátor přeměňuje napětí, a to tak, že primární obvod připojíme na zdroj střídavého napětí a v sekundárním obvodu se vytváří napětí jiné (buď vyšší nebo nižší - podle počtu závitů). Aby nedošlo ke špatnému pochopení, je třeba uvést, že tímto způsobem však rozhodně nelze zvyšovat výkon zdroje, zvyšuje se pouze napětí. Navíc tento princip nefunguje pro transformaci stejnosměrného napětí, ale pouze střídavého.

Mějme jednoduchý obvod se střídavým zdrojem napětí a rezistorem. Uvažujeme-li emn. ve tvaru $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \cos(\omega t)$, pak **okamžitý výkon** bude $P = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2 \cos^2(\omega t)}{R}$. Časovou

střední hodnotu jednoduše vypočteme jako $\langle P \rangle = \frac{\int_0^T P dt}{T} = \frac{\mathcal{E}_{\max}^2}{2R}$. Zavedeme-li efektivní proud

$I_{\text{ef}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ a emn. $\mathcal{E}_{\text{ef}} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}}$, pak $\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_{\text{ef}}^2}{R} = \mathcal{E}_{\text{ef}} I_{\text{ef}}$. V případě transformátoru se **průměrný výkon** zachovává, platí $\mathcal{E}_{1\text{ef}} I_{1\text{ef}} = \mathcal{E}_{2\text{ef}} I_{2\text{ef}}$. Z výpočtu vidíme, že pokud transformátor v sekundárním obvodu oproti primárnímu má větší napětí, proud protékající sekundárním obvodem je menší než v primárním. Toho se využívá v energetice, aby se zamezilo ztrátám při přenosu energie na velké vzdálenosti. Napětí v těchto vodičích je vysoké, ale proud je malý, ztráta na dlouhém vodiči o odporu R se pak vypočte (za dobu, jež je řádově větší jak perioda střídavého napětí) $\Delta E = \Delta t I_{\max}^2 \frac{R}{2}$.

Příklady k procvičení 11.1.

Uvažujte zapojení z obrázku 62 b). Nejvzdálenější strana čtverce od vodiče je fixovaná a stává se tak osou otáčení čtverce. Zjistěte, jaký náboj proteče čtvercovou smyčkou, je-li její odpor R . Vodičem protéká proud I a smyčka se otočí o 180° .

Příklady k procvičení 11.2.

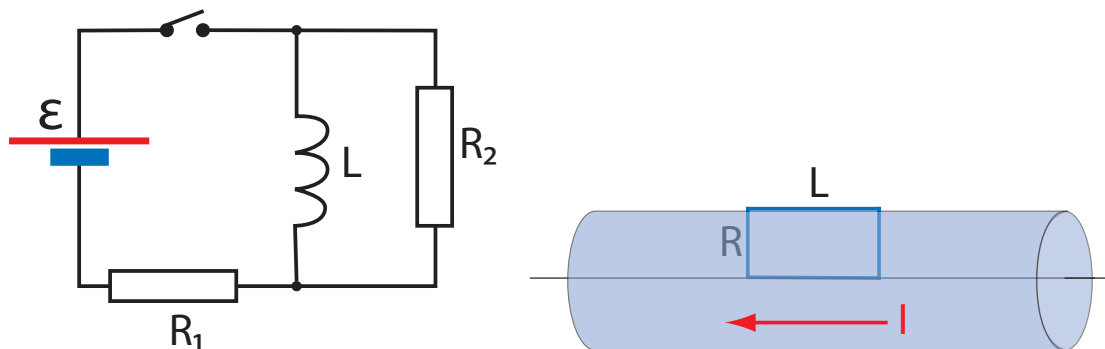
Uvažujte kruhovou smyčku o poloměru R_1 . Na ose smyčky ve vzdálenosti $d \gg R_1$ se nachází druhá kruhová smyčka o poloměru $R_2 \ll R_1$. Osy smyček jsou totožné. Určete vzájemnou indukčnost.

Příklady k procvičení 11.3.

Uvažujte obvod s rezistory R_1 , R_2 , zdrojem emn. \mathcal{E} a cívkou L (viz zapojení na obrázku 64 a)). Uvažujte, že na počátku je obvod zapojený po dostatečně dlouhou dobu. Poté spínač vypneme, jak je zakresleno v obrázku. Jaký náboj po vypnutí spínače proteče rezistorem R_2 ?

Příklady k procvičení 11.4.

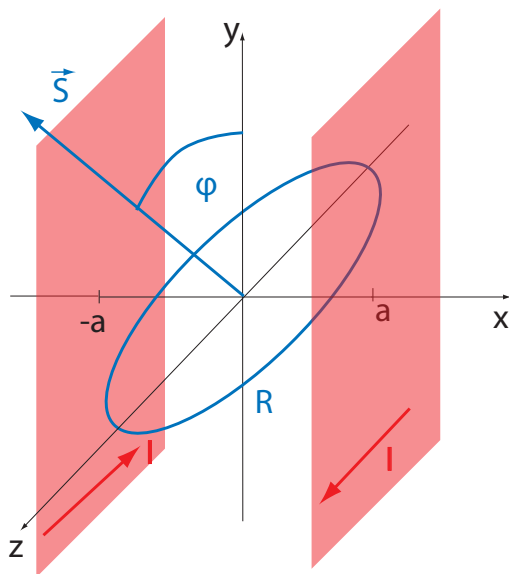
Uvažujte nekonečně dlouhý vodič válcového tvaru o poloměru R , kterým protéká proud I . Hustota proudu ve vodiči je homogenní. Jaký je magnetický tok obdélníkem o stranách R a L (viz obrázek 64 b)).



Obrázek 64: a) Obvod s cívkou a rezistory. b) Drátek ve vodiči.

Příklady k procvičení 11.5.

Uvažujte dvě nekonečně velké rovnoběžné desky, rovnoběžné s rovinou yz , procházející body $x = \pm a$. Těmito deskami protéká proud ve směru $\pm z$ (jednou v kladném a druhou v záporném směru). Délková hustota proudu je i (proud je $I = iL$). Mezi deskami se nachází vodivá kruhová smyčka o poloměru R (viz obrázek 65). Rovina smyčky svírá úhel φ s rovinou xz a je kolmá na rovinu xy . Určete magnetický tok procházející smyčkou.



Obrázek 65: Vodivá smyčka mezi proudovými deskami.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: *str. 271-295*

Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: *str. 304-308*

Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: *str. 314-328*

Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: *podkapitoly 31.7-31.9, 31.12, kap. 33*

12 Střídavé obvody

12.1 Komplexní čísla

V této kapitole se budeme zabývat střídavými obvody obsahujícími rezistory, cívky a kondenzátory. V minulé kapitole jsme vypočítali proud protékající obvodem LRC. Zjistili jsme, že tento obvod má vlastní frekvenci střídavého proudu. Uvažujeme-li, že do obvodu zapojíme zdroj střídavého napětí s jinou frekvencí, proud v obvodu se po čase přizpůsobí frekvenci zdroje. Jde-li však o frekvence blízké, hodnota maximálního proudu se zvyšuje a říkáme, že obvod je v **rezonanci**.

Pro periodické funkce jsme zvyklí používat $\cos x$ a $\sin x$. Tyto funkce můžeme zapsat pomocí imaginárních čísel v exponenciálním zápisu

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Z této rovnice vyjádříme

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Tento zápis periodických funkcí se hojně využívá ve fyzice. Uvažujeme-li například střídavé napětí ve tvaru $U = \tilde{U}e^{i\omega t}$, kde $\tilde{U} = U_R + iU_I$, skutečné napětí vyjadřuje pouze jeho reálná část, konkrétně $U = U_R \cos(\omega t) - U_I \sin(\omega t)$. Fázový posun lze do tohoto výrazu vložit buď posunutím $\omega t \rightarrow \omega t + \varphi$, nebo ekvivalentně použitím komplexního \tilde{U} . Maximální napětí potom odpovídá velikosti \tilde{U} , tedy $|\tilde{U}| = \sqrt{U_R^2 + U_I^2}$.

Uvažujme reálné \tilde{U} , jež určuje maximální hodnotu napětí (nezávislé na čase). Pak

$$U = \tilde{U}e^{i(\omega t + \varphi)} = \tilde{U}e^{i\omega t}e^{i\varphi} = (\tilde{U} \cos \varphi + i\tilde{U} \sin \varphi)e^{i\omega t} = \tilde{U}'e^{i\omega t},$$

kde \tilde{U}' představuje již komplexní veličinu. Máme na výběr pro popis fázového posunu: buď pomocí úhlu φ , nebo komplexního \tilde{U} .

Př. 12.1.

Zadání: Najděte komplexní číslo $\tilde{a} = i + \sqrt{3}$ ve tvaru $\tilde{a} = Ae^{i\varphi}$, kde φ a A jsou reálná čísla.

Řešení: Tvar $\tilde{a} = Ae^{i\varphi}$ můžeme přepsat do podoby $\tilde{a} = A(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Víme-li, že platí $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, pak se velikost komplexního čísla rovná $A = (1^2 + \sqrt{3}^2)^{1/2} = 2$.

Dále lze zapsat rovnost

$$\tilde{a} = i + \sqrt{3} = 2(\cos \varphi + i \sin \varphi) \Rightarrow \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Výsledek vyjádříme ve tvaru $\tilde{a} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Komentář: Polární zápis je vhodný pro násobení komplexních čísel. Uvažujme dvě komplexní čísla $\tilde{a}_1 = A_1e^{i\varphi_1}$ a $\tilde{a}_2 = A_2e^{i\varphi_2}$. Jejich násobek je $\tilde{a}_1\tilde{a}_2 = A_1A_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$.

Př. 12.2.

Zadání: Uvažujte dvě komplexní čísla $\tilde{a}_1 = R_1 + iI_1$ a $\tilde{a}_2 = R_2 + iI_2$. Najděte jejich podíl $\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2}$. (R a I v tomto případě neznačí odpor a proud, ale imaginární a reálnou část komplexního čísla.)

Řešení:

$$\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} = \frac{R_1 + iI_1}{R_2 + iI_2} = \frac{R_1 + iI_1}{R_2 + iI_2} \cdot \frac{R_2 - iI_2}{R_2 - iI_2} = \frac{R_1R_2 + I_1I_2 + i(I_1R_2 - I_2R_1)}{R_2^2 + I_2^2}.$$

Komentář: V polárním zápisu se výsledek o poznání zjednoduší

$$\frac{\tilde{a}_1}{\tilde{a}_2} = \frac{A_1}{A_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Př. 12.3.

Zadání: Dokažte, že součin velikostí dvou komplexních čísel se rovná velikosti součinu dvou komplexních čísel.

Řešení: Mějme dvě komplexní čísla $\tilde{a}_1 = R_1 + iI_1$ a $\tilde{a}_2 = R_2 + iI_2$. Složky komplexních čísel můžeme uvažovat jako složky dvojrozměrného vektoru, pro velikosti tudíž platí $|\tilde{a}|^2 = R^2 + I^2$. Součin dvou komplexních čísel lze zapsat jako

$$\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 = (R_1 + iI_1)(R_2 + iI_2) = R_1R_2 - I_1I_2 + i(R_1I_2 + I_1R_2).$$

Kvadrát velikosti tohoto komplexního čísla je

$$|\tilde{a}_1 \tilde{a}_2|^2 = (R_1R_2 - I_1I_2)^2 + (R_1I_2 + I_1R_2)^2 = R_1^2R_2^2 + I_1^2I_2^2 + R_1^2I_2^2 + I_1^2R_2^2 = |\tilde{a}_1|^2 |\tilde{a}_2|^2.$$

Velikosti splňují vztah

$$|\tilde{a}_1 \tilde{a}_2| = |\tilde{a}_1| |\tilde{a}_2|,$$

což bylo vidět i v komentáři k příkladu 12.1.

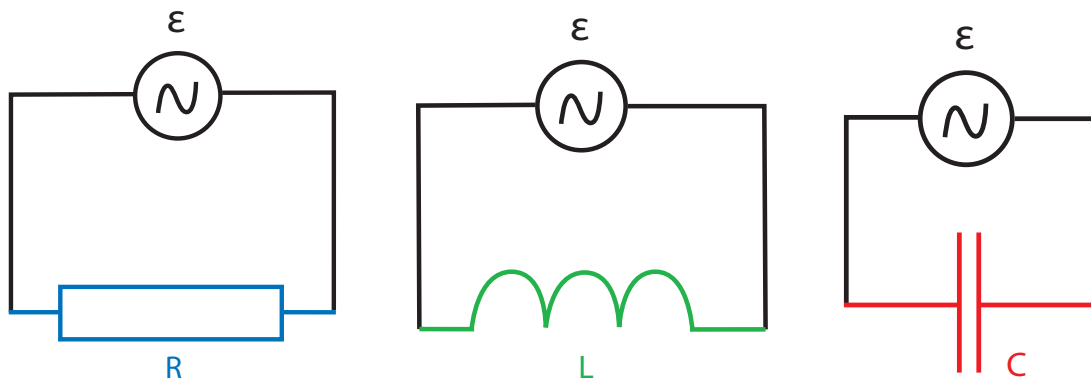
12.2 Základní prvky střídavých obvodů

Uvažujme jednoduchý obvod obsahující zdroj střídavého elektromotorického napětí a rezistor (viz obrázek 66 a)). Sestavme dle druhého Kirchhoffova zákona rovnici pro tento obvod: $\mathcal{E} - RI = 0$. Elektromotorické napětí na střídavém zdroji uvažujeme $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t}$. Pro splnění rovnice musí i proud záviset na čase jako

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = e^{i\omega t} \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{R} = e^{i\omega t} \tilde{I}.$$

Vidíme, že proud nemá vzhledem k emn. žádný fázový posun (odpor je veličina reálná), je ve stejné fázi.

Ve střídavých obvodech se odpor rezistoru značí \tilde{Z}_R a nazývá se **rezistance**.



Obrázek 66: a) Rezistor b) cívka c) kondenzátor ve střídavém obvodu.

Uvažujme jednoduchý obvod obsahující zdroj střídavého elektromotorického napětí a cívku (viz obrázek 66 b)). Sestavme dle druhého Kirchhoffova zákona rovnici pro tento obvod $\mathcal{E} - L \frac{\partial I}{\partial t} = 0$. Z této rovnice lze jednoduše vyjádřit proud jako

$$I = \int \frac{\mathcal{E}}{L} dt = \int \frac{\tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t}}{L} dt = \frac{\tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t}}{i\omega L} = \frac{\mathcal{E}}{i\omega L} = \frac{\mathcal{E}}{\tilde{Z}_L},$$

kde $\tilde{Z}_L = i\omega L$ se nazývá **induktance**. V případě, kdy do obvodu zapojíme cívku, proud v obvodu již zjevně nebude ve stejné fázi jako emn. Pokud napětí má reálnou část $\cos(\omega t)$, pak proud má reálnou část $\sin(\omega t)$. Obě veličiny jsou od sebe posunuty o $\pi/2$. Elektromotorické napětí tak předchází proud o čtvrt periody.

Mějme jednoduchý obvod obsahující zdroj střídavého elektromotorického napětí a kondenzátor (viz obrázek 66 c)). Sestavme dle druhého Kirchhoffova zákona rovnici pro tento obvod $\mathcal{E} - \frac{Q}{C} = 0$. Z této rovnice snadno vyjádříme proud jako

$$I = \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial(\mathcal{E}C)}{\partial t} = \frac{\partial(\tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t} C)}{\partial t} = i\omega \tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t} C = i\omega \mathcal{E} C = \frac{\mathcal{E}}{\tilde{Z}_C},$$

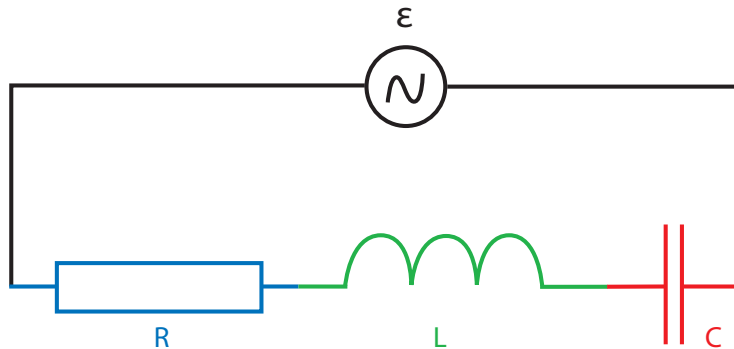
kde $\tilde{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}$ a nazývá se **kapacitance**. Jestliže reálné napětí je funkcí $\cos(\omega t)$, pak proud je zase funkcí $-\sin(\omega t)$. Proud předchází elektromotorické napětí o $\pi/2$.

12.3 Zapojení RLC prvku ve střídavém obvodu

S veličinami rezistance, induktance a kapacitance se ve střídavém obvodu pracuje obdobným způsobem jako s odporem v klasickém obvodu. Uvažujme sériové zapojení RLC ve střídavém obvodu (viz obrázek 67).

V případě tří sériově zapojených rezistorů je výsledný odpor dán prostým součtem jednotlivých odporů. Stejným způsobem budeme postupovat, i když odpory nahradí rezistance, induktance a kapacitance

$$\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}} e^{i\omega t} = (\tilde{Z}_R + \tilde{Z}_L + \tilde{Z}_C) I = \tilde{Z} I = \tilde{Z} \tilde{I} e^{i\omega t} \Rightarrow \tilde{\mathcal{E}} = \tilde{Z} \tilde{I}.$$



Obrázek 67: Sériové RLC ve střídavém obvodu.

Veličina \tilde{Z} se nazývá **impedance**. V případě sériového LCR zapojení pro impedanci platí $\tilde{Z} = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$. V předešlém příkladu jsme ukázali, že velikost součinu komplexních čísel se rovná součinu velikostí komplexních čísel. Díky této znalosti a použitím maximálního proudu $|\tilde{I}|$ v obvodu a maximálního emn. $|\tilde{\mathcal{E}}|$ získáme

$$|\tilde{\mathcal{E}}| = |\tilde{Z}| |\tilde{I}| \Rightarrow |\tilde{Z}|^2 = R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2.$$

Tento výraz lze zobecnit přechodem od elektromotorického napětí ke klasickému napětí na svorkách soustavy. Lze uvažovat pozměněný Ohmův zákon, kdy okamžité napětí a proud vystřídají maximální napětí a proud a kde na místo odporu použijeme velikost impedance.

Př. 12.4.

Zadání: Vypočtete obvod, ve kterém je RLC zapojeno paralelně.

Řešení: Pro paralelní zapojení platí

$$\frac{1}{\tilde{Z}} = \frac{1}{\tilde{Z}_R} + \frac{1}{\tilde{Z}_L} + \frac{1}{\tilde{Z}_C} = \frac{\tilde{Z}_R \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_L \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_R \tilde{Z}_L}{\tilde{Z}_R \tilde{Z}_L \tilde{Z}_C} \Rightarrow \tilde{Z} = \frac{\tilde{Z}_R \tilde{Z}_L \tilde{Z}_C}{\tilde{Z}_R \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_L \tilde{Z}_C + \tilde{Z}_R \tilde{Z}_L}.$$

Dosazením za \tilde{Z}_R , \tilde{Z}_L a \tilde{Z}_C obdržíme

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \frac{R \frac{L}{C}}{\frac{L}{C} + iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)} = \frac{R \frac{L}{C}}{\left[\frac{L}{C} + iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} \cdot \frac{\left[\frac{L}{C} - iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[\frac{L}{C} - iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]} = \\ &= \frac{R \frac{L}{C} \left[\frac{L}{C} - iR \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right]}{\left[\frac{L^2}{C^2} + R^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]}. \end{aligned}$$

Velikost impedance je

$$|\tilde{Z}| = \frac{R \frac{L}{C}}{\left[\frac{L^2}{C^2} + R^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{1/2}}.$$

Fázové posunutí určíme z rovnice z rovnice $e^{i\varphi} = \frac{\tilde{Z}}{|\tilde{Z}|} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{R \tilde{Z}}{|\tilde{Z}|}$, $\sin \varphi = \frac{I \tilde{Z}}{|\tilde{Z}|}$.

12.4 Řešení diferenciální rovnice pro střídavé obvody

V předešlém textu jsme tvrdili, že frekvence střídavého obvodu se po čase ustálí na frekvenci střídavého napětí zdroje. Toto tvrzení není zřejmé a je potřeba jej matematicky obhájit. Uvažujme opět zapojení z obrázku 67. Každou složku obvodu si lze představit jako člen v diferenciální rovnici. Z předešlé sekce vyplývá tvar této diferenciální rovnice

$$\mathcal{E} = L \frac{\partial I}{\partial t} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow \mathcal{E} = L \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + R \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q}{C}.$$

Pro jednoduchost uvažujme, že sepnutí střídavého zdroje elektromotorického napětí načasujeme tak, aby platilo

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t).$$

Výše uvedená diferenciální rovnice je ekvivalentní diferenciální rovnici nuceného harmonického oscilátoru

$$\ddot{x} + k_1 \dot{x} + k_2 x = k_3 \cos(\omega t), \quad (72)$$

kde x je výchylka harmonického oscilátoru od rovnovážné polohy, k_1 je součinitel útlumu podělený hmotností oscilátoru (konstanta zodpovídající za tlumení oscilátoru), k_2 je tuhost pružiny podělená hmotností oscilátoru, k_3 je amplituda budící síly podělená hmotností oscilátoru a tečky nad x označují derivace podle času. V podobném duchu lze uvažovat i zapojení střídavého obvodu. Cívka odpovídá v obvodu za setrvačnost (zachování původního proudu), rezistor způsobuje útlum proudícího náboje, kondenzátor vybíjením vytváří proud (je ekvivalentní pružině, která působí proti výchylce) a zdroj elektromotorického napětí odpovídá vnější síle budící kmity. V obvodu LCR platí $k_1 = R/L$, $k_2 = 1/(CL)$ a $k_3 = \mathcal{E}_0/L$.

V rovnici (72) je x jedinou neznámou funkcí, závisující na čase t a nacházející se v rovnici (72) v lineárním tvaru. Uvažujme nejprve homogenní diferenciální rovnici ve tvaru

$$\ddot{x}_1 + k_1 \dot{x}_1 + k_2 x_1 = 0. \quad (73)$$

Tato rovnice lze upravit substitucí $x_1 = y e^{-\lambda t}$

$$[\ddot{y} + (k_1 - 2\lambda) \dot{y} + (k_2 - k_1 \lambda + \lambda^2) y] e^{-\lambda t} = 0.$$

Vynásobením $e^{\lambda t}$ a zvolením $\lambda = k_1/2$ obdržíme

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0,$$

kde $\omega_0^2 = k_2 - k_1^2/4$. Výše uvedená rovnice je rovnice harmonického oscilátoru. Vynásobením \dot{y} obdržíme

$$\dot{y} \ddot{y} + \omega_0^2 y \dot{y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (\dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2) \dot{} = 0 \Rightarrow \dot{y}^2 + \omega_0^2 y^2 = \omega_0^2 c^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \omega_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{c^2 - y^2}} = \int \omega_0 dt \Rightarrow \arcsin\left(\frac{y}{c}\right) = \omega_0 t + \varphi_0 \Rightarrow y = c \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Zpětným dosazením obdržíme řešení lineární homogenní diferenciální rovnice druhého řádu

$$x_1 = ce^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

kde c a φ jsou integrační konstanty. Uvažujme, že sečteme rovnice (72) a (73)

$$(\ddot{x} + \ddot{x}_1) + k_1(\dot{x} + \dot{x}_1) + k_2(x + x_1) = k_3 \cos(\omega t).$$

Všimněme si, že pokud tento vztah upravíme pomocí transformace $x + x_1 \rightarrow x$ obdržíme původní rovnici (72) a to i přes to, že funkce x_1 v sobě obsahuje maximální počet (dvě) integračních konstant. Najdeme-li tedy libovolné řešení pro x splňující rovnici (72), získáme tak po sečtení řešení z rovnice (73) zcela obecné řešení rovnice (72).

Funkce kosinus lze rozepsat $\cos(\omega t) = (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$. Přemýšlivého čtenáře napadne, že řešení pro funkci x může být ve tvaru

$$x = A_+ e^{i\omega t} + A_- e^{-i\omega t},$$

kde A_+ a A_- jsou zatím neurčené komplexní konstanty. Dosazením obdržíme

$$A_+ e^{i\omega t} (k_2 + ik_1\omega - \omega^2) + A_- e^{-i\omega t} (k_2 - ik_1\omega - \omega^2) = k_3 (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2.$$

Vyjádřením pro členy $e^{i\omega t}$ a $e^{-i\omega t}$ obdržíme vztahy pro konstanty A_+ a A_-

$$A_+ = \frac{1}{2} k_3 \left[\frac{(k_2 - \omega^2) - i(k_1\omega)}{(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2} \right], \quad A_- = \frac{1}{2} k_3 \left[\frac{(k_2 - \omega^2) + i(k_1\omega)}{(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2} \right].$$

Zpětným dosazením obdržíme

$$x = k_3 \frac{(k_2 - \omega^2) \cos(\omega t) + k_1\omega \sin(\omega t)}{(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2}. \quad (74)$$

Z tohoto řešení je možné určit amplitudu

$$A = \frac{k_3}{(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2} \left[(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2 \right]^{1/2} = \frac{k_3}{\left[(k_2 - \omega^2)^2 + (k_1\omega)^2 \right]^{1/2}}$$

a fázi kmitání

$$\operatorname{tg}(\varphi) = -\frac{k_1\omega}{(k_2 - \omega^2)}.$$

Rovnici (74) lze tedy přepsat do tvaru

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (75)$$

Přičtením řešení z homogenní rovnice k rovnici (75) obdržíme obecné řešení diferenciální rovnice (72) ve tvaru

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) + ce^{-\lambda t} \sin(\omega_0 t + \varphi_0). \quad (76)$$

Z výsledku je patrné, že v závislosti na počátečních podmínkách náboj nejprve osciluje částečně s vlastní frekvencí ω_0 a částečně s frekvencí vynucenou ω . Vlivem nenulového λ , které je úměrné odporu obvodu (ten je vždy nenulový), amplituda vlastní oscilace exponenciálně klesá a v obvodu se stává dominantní oscilace nucená. Po určité době vlastní oscilace zcela vymizí a obvod se ustálí na průběhu popsaném rovnicí (74), respektive (75).

Příklady k procvičení 12.1.

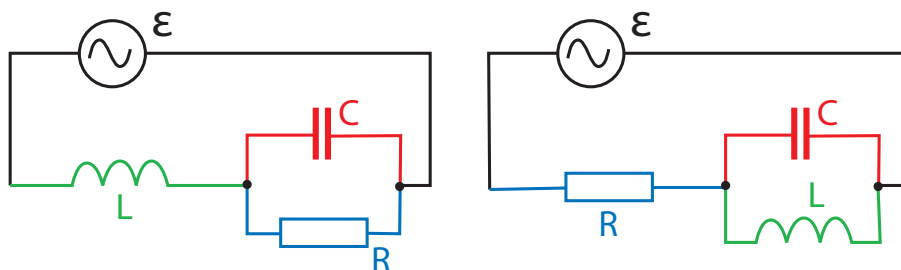
Upravte a vypočtete velikost komplexních čísel: $\tilde{a} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} + \frac{1}{i+1}$, $\tilde{b} = \frac{1}{i} + \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i+1}$.

Příklady k procvičení 12.2.

Najděte komplexní číslo $\tilde{a} = 2i$ ve tvaru $Ae^{i\varphi}$.

Příklady k procvičení 12.3.

Uvažujte střídavý obvod z prvního obrázku 68, kde R je odpor rezistoru, L indukčnost cívky, C kapacita kondenzátoru a ω frekvence střídavého zdroje. Vypočtete reálnou a imaginární část impedance tohoto zapojení.



Obrázek 68: Střídavé obvody.

Příklady k procvičení 12.4.

Uvažujte střídavý obvod z druhého obrázku 68, kde R je odpor rezistoru, L indukčnost cívky, C kapacita kondenzátoru a ω frekvence střídavého zdroje. Vypočtete reálnou a imaginární část impedance tohoto zapojení.

Příklady k procvičení 12.5.

Uvažujte paralelně zapojenou cívku o indukčnosti L a rezistor o odporu R . K této soustavě je v uzavřeném obvodu do série zapojený ampérmetr o zanedbatelném odporu a zdroj střídavého napětí \mathcal{E} . Z ampérmetru je zřejmé, že ve chvíli kdy je proud maximální, napětí na zdroji nabývá hodnoty jedné poloviny maximální hodnoty. Určete frekvenci zdroje napětí.

Doporučená literatura

Elektřina a magnetismus (Sedlák, Štoll), 2002: str. 497-524
Feynmanovy přednášky z fyziky 1, 2000: str. 302-306, 309-317, 339-342
Feynmanovy přednášky z fyziky 2, 2001: str. 300-304, 389-407
Elektromagnetismus (Andrej Tirpák), 1999: str. 422-430
Fyzika (Halliday, Resnick, Walker), 2000: kap. 33

Čtvrtsemestrální písemná práce č. 4.

1. Určete elektrické napětí (jako funkci času) indukované na vodivém kroužku o poloměru $r = R/2$ nalézajícím se uvnitř dlouhé cívky (o ploše průřezu $S = \pi R^2$ a počtu závitů N a na délce L), kterou protéká elektrický proud $I = I_0 \sin(\omega t)$. Rovina kroužku je kolmá na magnetické pole v cívce. V oblasti uvnitř cívky uvažujte vakuum. Určete vzájemnou indukčnost.
2. Uvažujte jednoduchý obvod bez rezistoru, který obsahuje pouze cívku a kondenzátor (sériově zapojené). Uvažujte, že v čase $t = 0$ je na kondenzátoru náboj Q a proud protékající obvodem je roven nule $I = 0$. Jaký bude další časový průběh náboje a proudu v obvodu? Vypočtete a nakreslete časovou závislost I a Q na t .
3. Uvažujte vektorový potenciál ve tvaru $\vec{A} = K \sin(\omega t) (0, \frac{z}{r^2}, -\frac{y}{r^2})$, kde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Vypočtete vektor magnetické indukce \vec{B} . Veličiny ω a K jsou konstanty.
4. Určete vektor elektrické intenzity \vec{E} , víte-li, že skalární potenciál φ se rovná nule a vektorový potenciál \vec{A} je stejný jako v předešlém případě.

Zkoušková písemná práce

1. Prostor mezi elektrodami válcového kondenzátoru s poloměry R_1 a R_2 ($R_1 < R_2$) je vyplněn elektrickým nábojem s konstantní objemovou hustotou ρ . Vnitřní elektroda kondenzátoru je uzemněna a vnější elektroda je na potenciálu U . Určete rozložení potenciálu a intenzity elektrického pole uvnitř kondenzátoru.
2. Vypočítejte indukci magnetického pole uprostřed závitů ve tvaru čtverce o straně a , kterým prochází proud I .
3. Kondenzátor kapacity C byl připojen ke zdroji konstantního napětí U přes odpor R . Spočítejte náboj na kondenzátoru a nabíjecí proud v závislosti na čase.
4. Vodivá kruhová smyčka o poloměru r_0 je umístěna do homogenního magnetického pole intenzity H . Indukční čáry magnetického pole jsou kolmé na rovinu vodiče. Odpor vodiče je R . Jak velký náboj proteče průřezem vodiče v průběhu jeho otočení o 90° ? Osa otáčení vodiče leží v rovině smyčky.
5. Čtvercová smyčka o straně a je nabitá konstantní lineární hustotou náboje τ . Vypočítejte intenzitu elektrického pole na ose smyčky.

Může se hodit:

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$$

13 Stručný přehled vybraných klíčových vzorců

V této kapitole si stručně uvedeme základní vztahy, které byly uvedeny v těchto skriptech. Uvedeny jsou některé (nikoli všechny) klíčové vzorce. Pro úspěšné absolvování předmětu je nutná jejich znalost.

Coulombův zákon

$$\vec{F}_1 = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\vec{F}_2.$$

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru

$$\begin{aligned}\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \\ \oint \vec{B} \cdot d\vec{r} &= \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi_E}{\partial t}, \quad \oint \vec{E} \cdot d\vec{r} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t}.\end{aligned}$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0.$$

Lorentzova síla

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Lorentzova síla působící na element vodiče

$$d\vec{F} = Id\vec{r} \times \vec{B}.$$

Rovnice pro potenciály

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Řešení skalárního potenciálu pro statické elektrické pole

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + K.$$

Řešení vektorového potenciálu pro statické magnetické pole

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

Řešení elektrické intenzity pro statické elektrické pole

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') dQ}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Řešení magnetické indukce pro stacionární magnetické pole

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I(\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Řešení potenciálu a napětí z elektrické intenzity

$$\varphi = - \int_{\vec{A}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad U = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Kapacita kondenzátoru

$$C = \frac{Q}{U}.$$

Kapacita deskového kondenzátoru

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}.$$

Úbytek napětí na cívce (aplikace Faradayova zákona)

$$U = -L \frac{\partial I}{\partial t} = -\frac{d\phi_B}{dt}.$$

Vlastní indukčnost dlouhého solenoidu

$$L = \frac{\mu_0 S N^2}{l}.$$

Vzájemná indukčnost

$$U_1 = M \frac{\partial I_2}{\partial t}, \quad M = -\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} d\vec{r}_2 \cdot d\vec{r}_1.$$

Hustota elektromagnetické energie

$$w_{EM} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E^2}{c^2} + B^2 \right).$$

Elektrostatická energie

$$E = \frac{\varepsilon_0}{2} \int_V E^2 dV, \quad E = \frac{1}{2} \int_V \varphi \rho dV.$$

Transformace proudu a napětí na transformátoru

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Rezistance, indukance, kapacitance

$$Z_R = R, \quad Z_L = i\omega L, \quad Z_C = -\frac{i}{\omega C}.$$

Řešení příkladů k procvičení

$$1.1: \frac{\partial f_1}{\partial t} = 0, \frac{\partial f_1}{\partial x} = 1, \frac{\partial f_1}{\partial y} = 2y, \frac{\partial f_1}{\partial z} = 3z^2, \\ \frac{\partial f_2}{\partial t} = c \sin(xyz), \frac{\partial f_2}{\partial x} = ctyz \cos(xyz), \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = ctxz \cos(xyz), \frac{\partial f_2}{\partial z} = ctxy \cos(xyz), \\ \frac{\partial f_3}{\partial t} = -c \frac{\sin(ct)}{r^2}, \frac{\partial f_3}{\partial x} = -2x \frac{\cos(ct)}{r^4}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial y} = -2y \frac{\cos(ct)}{r^4}, \frac{\partial f_3}{\partial z} = -2z \frac{\cos(ct)}{r^4}.$$

$$1.2: \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0, \vec{\nabla} \times \vec{V} = (0, 0, 2\omega).$$

1.3: Bez komentáře.

1.4: Bez komentáře.

1.5: Závisejí na křivce, pole není konzervativní. Pro případ přímky $\vec{r} = (t, t, t)$ spojující body $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 1)$ je integrál roven $I = \frac{1}{2}$.

$$2.1: \frac{F_Q}{F_G} = -2, 27 \cdot 10^{39}.$$

$$2.2: \vec{E} = (0, 0, E_z), \\ E_z = \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{z\tau R}{2\epsilon_0(z^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$2.3: \vec{E} = \left[0, 0, \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)\right].$$

$$2.4: \vec{E} = (0, 0, 0).$$

$$2.5: \vec{E} = \left(0, 0, \frac{2a\tau z}{\pi\epsilon_0(a^2+z^2)\sqrt{2a^2+z^2}}\right).$$

$$3.1: \text{ a) } \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{a+\sqrt{a^2+y^2}}{-a+\sqrt{a^2+y^2}} \right|, y \in \mathfrak{R} - \{0\},$$

$$\text{ b) } \varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|, x \in (-\infty; -a),$$

$$\varphi = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right|, x \in (a; \infty).$$

$$3.2: \varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{z^2+R^2} - z \right).$$

$$3.3: \varphi_{r \leq R_1} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} (R_2^2 - R_1^2), \\ \varphi_{R_1 \leq r \leq R_2} = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left(R_2^2 - \frac{r^2}{3} - \frac{2R_1^3}{3r} \right),$$

$$\varphi_{r \geq R_2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0 r} (R_2^3 - R_1^3).$$

Grafy viz obrázek 69.

3.4: Bez komentáře.

$$3.5: \vec{E} = 2kc\vec{r}e^{-cr^2}, \rho = 2\epsilon_0 kce^{-cr^2} (3 - 2cr^2).$$

$$4.1: \varphi_{r \leq R} = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (R^2 - \frac{r^2}{3}), \varphi_{r \geq R} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Grafy viz obrázek 70.

$$4.2: \varphi_{r \leq R} = -\frac{r^2 \rho}{4\epsilon_0}, \varphi_{r \geq R} = -\frac{R^2 \rho}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{r}{R} \right) - \frac{R^2 \rho}{4\epsilon_0}.$$

Grafy viz obrázek 71.

$$4.3: \text{tg}(\varphi) = \frac{Q\sigma}{2\epsilon_0 mg}.$$

$$4.4: \vec{E}_{r \geq R_2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{[x^2+y^2+z^2]^{\frac{3}{2}}}, \vec{E}_{R_2 \geq r \geq R_1} = \vec{0}, \\ \vec{E}_{r \leq R_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}.$$

$$\left\{ \frac{(x, y, z - z_1)}{[x^2+y^2+(z-z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} - \frac{\frac{R_1}{z_1} (x, y, z - \frac{R_1^2}{z_1})}{[x^2+y^2+(\frac{z-R_1^2}{z_1})^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

$$4.5: \varphi_{r \geq R} = \frac{kR^4}{4r\epsilon_0}, \varphi_{r \leq R} = \frac{kR^3}{3\epsilon_0} - \frac{kr^3}{12\epsilon_0}.$$

$$5.1: C = \frac{\pi R^2 \epsilon_0}{R+2a-[R^2+(2a)^2]^{1/2}}.$$

$$5.2: C = 2\pi R \epsilon_0.$$

$$5.3: C_c = \frac{2}{5} C.$$

$$5.4: C_c = C.$$

$$5.5: M = \frac{R^2 \epsilon_0 U^2}{4d}.$$

$$6.1: C = 4\pi\epsilon_0 \epsilon_r \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

$$6.2: h = \frac{\epsilon_0 \mathcal{E}^2 (\epsilon_r - 1)}{2d^2 \rho g}.$$

$$6.3: h = \frac{\epsilon_0 U^2 (\epsilon_r - 1)}{\ln(R_2/R_1) \rho g (R_2^2 - R_1^2)}.$$

$$6.4: C = \frac{S(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{l \ln(\epsilon_1/\epsilon_2)}.$$

$$6.5: C = \frac{4\pi\alpha}{R_2 - R_1}.$$

$$7.1: I = \frac{2\pi R \mathcal{E}}{\rho}.$$

$$7.2: I = \frac{2\pi \mathcal{E} L}{\rho \ln(R_2/R_1)}.$$

$$7.3: Q = \mathcal{E}C \left(1 - e^{-\frac{t}{CR}}\right), I = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{CR}}.$$

$$7.4: I = \frac{\mathcal{E}}{6R} \left(3 + e^{-\frac{2t}{3CR}}\right).$$

$$7.5: C_c = \frac{6}{5}C.$$

$$8.1: B_{r < R} = \frac{\mu_0 k r^2}{3}, B_{r > R} = \frac{\mu_0 k R^3}{3r}.$$

$$8.2: B_{r < R} = \frac{\mu_0 \omega \varrho_0 (R^2 - r^2)}{2}.$$

$$8.3: B_{r < R} = \mu_0 \omega k \left[\frac{R^3}{6} + r^2 \left(\frac{r}{3} - \frac{R}{2} \right) \right].$$

$$8.4: B_{r < a} = \frac{1}{2} \mu_0 j (2r - a), B_{r > a} = \frac{1}{2} \mu_0 j a.$$

$$8.5: \vec{B}_{z > 0} = \left(0, -\frac{i\mu_0}{2}, 0\right),$$

$$\vec{B}_{z < 0} = \left(0, \frac{i\mu_0}{2}, 0\right).$$

$$9.1: \vec{B} = (0, 0, 0).$$

$$9.2: \vec{A} = (0, 0, 0).$$

$$9.3: \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \ln(x^2 + y^2) (0, 0, 1).$$

$$9.4: \vec{B} = \frac{4\mu_0 I a^2}{\pi(4z^2 + a^2)\sqrt{2a^2 + 4z^2}} (0, 0, 1).$$

$$9.5: \vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \left[\frac{R^2 + 2z^2}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 2z \right] (0, 0, 1).$$

$$10.1: \phi_B = -4\pi K.$$

$$10.2: \vec{B} = \frac{2ktz}{\varrho^4} (y, -x, 0) + \vec{f}(x, y, z),$$

kde pro \vec{f} platí $\vec{\nabla} \cdot \vec{f} = 0$.

10.3: Podmínka je splněna.

10.4: Bezzdrojové Maxwellovy rovnice platí pro libovolně zvolené potenciály. Hledané veličiny jsou: $\vec{E} = (A_0 \omega \cos(kz - \omega t), 0, 0)$, $\vec{B} = (0, A_0 k \cos(kz - \omega t), 0)$, $\varrho = 0$, $\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \left(A_0 \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \sin(kz - \omega t), 0, 0 \right)$.
Poznámka: Vektorový potenciál popisuje rovinnou vlnu, pokud $k = \pm \frac{\omega}{c}$.

$$10.5: E = \frac{3Q^2}{20\pi R \varepsilon_0}.$$

$$11.1: Q = \frac{\mu_0 I L}{2\pi R} \ln\left(\frac{2L+a}{a}\right).$$

$$11.2: M = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$11.3: Q = \frac{\mathcal{E}L}{R_1 R_2}.$$

$$11.4: \phi = \frac{\mu_0 L}{4\pi} I.$$

$$11.5: \phi = \pi R^2 \mu_0 i \cos \varphi.$$

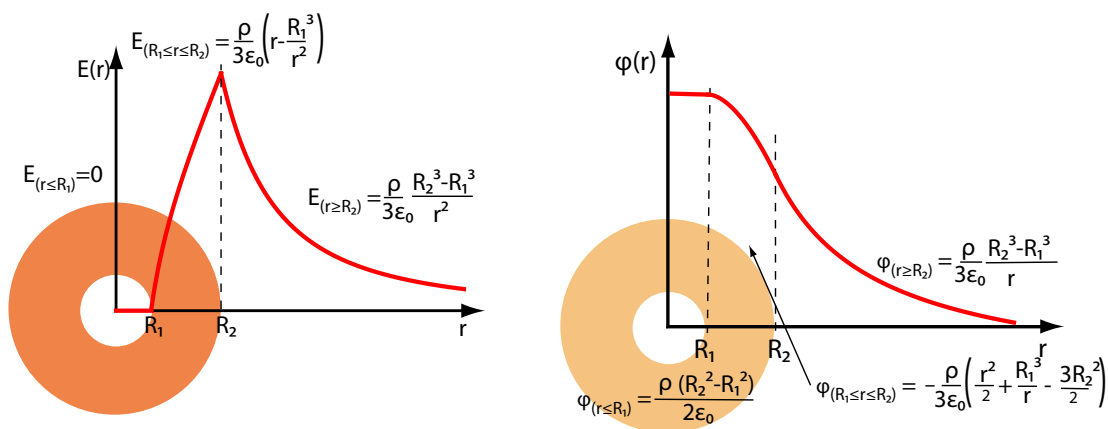
$$12.1: \tilde{a} = -2i, |a| = 2, \tilde{b} = -1 - i, |b| = \sqrt{2}.$$

$$12.2: \tilde{a} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

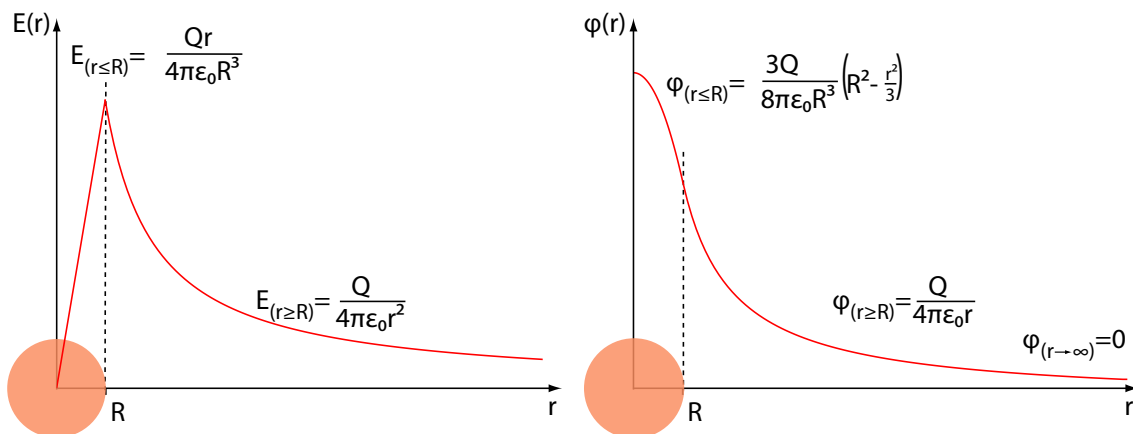
$$12.3: Z_R = \frac{R}{R^2 \omega^2 C^2 + 1}, Z_I = \omega L - \frac{R^2 \omega C}{R^2 \omega^2 C^2 + 1}.$$

$$12.4: Z_R = R, Z_I = -\frac{L\omega}{\omega^2 LC - 1}.$$

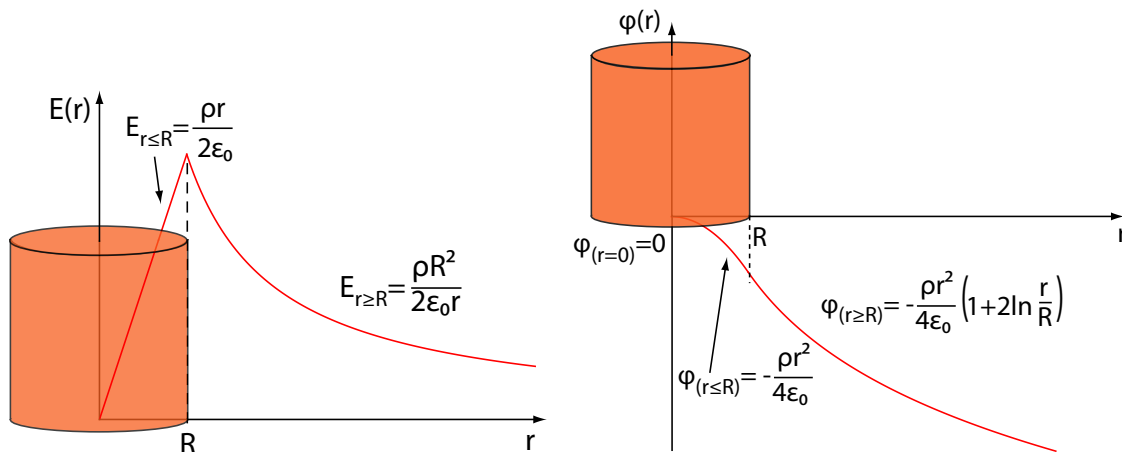
$$12.5: \omega = \frac{R}{\sqrt{3}L}.$$



Obrázek 69: Velikost elektrické intenzity a potenciál v blízkosti nabitě kulové slupky.



Obrázek 70: Velikost elektrické intenzity a potenciál v blízkosti homogenně nabitě koule.



Obrázek 71: Velikost elektrické intenzity a potenciál v blízkosti nabitěho válce.

Reference

- [1] D. Halliday, R. Resnick, and J. Walker. *Fyzika: část 3: Elektrina a magnetismus. Vysokoškolská učebnice obecné fyziky*. Překlady vysokoškolských učebnic. VUTIUM ; Prometheus, 2000.
- [2] R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, and I. Štoll. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 2/3*. Number sv. 2 in Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady. Fragment, 2001.
- [3] A. Tirpák and Matematicko fyzikálna fakulta UK Bratislava. *Elektromagnetizmus*. Polygrafia SAV, 1999.
- [4] B. Sedlák and I. Štoll. *Elektrina a magnetismus*. Academia, 2002.
- [5] R.P. Feynman, R.B. Leighton, and M. Sands. *Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*. Number sv. 1 in Feynmanovy přednášky z fyziky s řešenými příklady. Fragment, 2000.

Reference obrázků

Obrázek 1: Vektorové pole rychlosti větru.

Zdroj: <http://www.gliding.cz/meteo/Mapy/vitr.gif>

Obrázek 4: Působení elektrostatického pole.

Zdroj: <https://www.flickr.com/photos/njorthr/4030750472/>

<https://www.amycleaning.co.uk/blog/wp-content/uploads/2012/10/static-force1.jpg>

Obrázek 44: (Ne)působení magnetického pole.

Zdroj: <http://news.sohu.com/20111216/n329199245.shtml>

<http://www.dama.cz/zabava/sileny-svet-kuriozit-a-rekordu-20430>

Obrázek 45 a): Působení magnetického pole na železné piliny.

Zdroj: <http://www.energeticforum.com/renewable-energy/13446-magnetic-field-around-wire-harvestable-free-energy.html>

Obrázek 46: Elektrony a pozitrony v magnetickém poli

Zdroj: <http://fanda.nova.cz/clanek/hi-tech/obrazem-takhle-vypadal-velky-tresk.html>

Obrázek 50: Magnetické pole v blízkosti reálných cívek

Zdroj: <http://www.astrolife.cz/?p=11944>

<http://basharspacetimeantenna.files.wordpress.com/2011/03/magnetic-field-in-a-straight-coil-of-wire.gif?w=455&h=257>

Obrázek 63 b): Transformátor.

Zdroj: <http://sv.wikipedia.org/wiki/Transformator#/media/File:Transformator-1-1.png>