Komplexní čísla – definice a algebraický tvar

Definice komplexních čísel

Těleso komplexních čísel $\mathbb{C}$: Množina uspořádaných dvojic reálných čísel $z = (x,y)$ s definovanými operacemi sčítání a násobení:

- $z \in \mathbb{C}$: $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ … $x = \mathrm{Re}(z)$ je **reálná část**, $y = \mathrm{Im}(z)$ je **imaginární část**
- **sčítání** $(x,y) + (a,b) = (x+a, y+b)$
- **násobení** $(x,y) \cdot (a,b) = (xa - yb, xb + ya)$
- **nulový prvek** $(0,0)$, **jednotkový prvek** $(1, 0)$
- množina komplexních čísel **není uspořádaná**
- **imaginární jednotka** $i=(0,1)$ je kořenem rovnice $i^2+1=0$, tedy $i^2=-1$, aneb $i = \sqrt{-1}$
- čísla $(a,0)$ jsou **reálná čísla**, čísla $(0,b)$ jsou **ryze imaginární**

Algebraický tvar (zápis) komplexních čísel

Aby se nám zápis (x,y) nepletl s 2D vektory, používáme častěji následující zápis:

- $z = (x,y) \longrightarrow z = x + i\,y = x + y\,i$
- **sčítání** $z_1 + z_2 = (x+yi) + (a+bi) = (x+a) + (y+b)i$
- **násobení** $z_1 \cdot z_2 = (x+yi) \cdot (a+bi) = \ldots = (xa-yb) + (xb+ya)i$ … využijeme $i^2=-1$
- **komplexně sdružené číslo** je definováno $z^* = a - bi$

Důsledky:

- **opačný prvek** k prvku z je $-z = -a - bi$
- **absolutní hodnota** komplexního čísla je $|z| = \sqrt{(z \cdot z^*)} = \ldots = \sqrt{(a^2+b^2)}$ … reálné číslo
- **inverzní prvek** k prvku z je $1/z = z^* / (z \cdot z^*) = z^* / |z|^2 = (1/|z|^2) \cdot z^* = \ldots$
- **kvadratická rovnice** má v množině komplexních čísel dva kořeny
- **polynomická rovnice** (polynom $p_n(x)=0$, polynom stupně n), má n kořenů

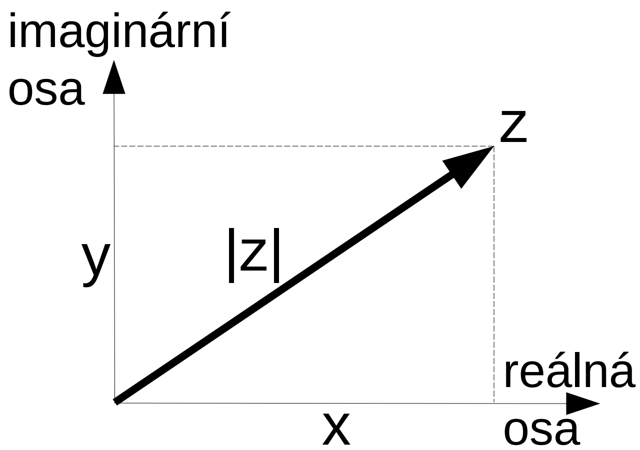
Komplexní čísla – goniometrický a exponencielní tvar

Goniometrický tvar (zápis)

Dvojice reálných čísel: velikost a úhel:

- $z \in \mathbb{C}$: $z = (x,y) = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$
- $|z| = x^2 + y^2$
- $\tan\varphi = y/x$ … srovnej atan(y/x), atan2(y,x)
- násobení: použití vzorečků pro součet cos, sin

Geometrická reprezentace v Gaussově rovině



Exponencielní tvar (zápis) komplexních čísel

Zápis:

- $z = (x, y) = x + y\,i = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi} = |z| \cdot \exp(i\varphi)$
- komplexně sdružené číslo $z^* = |z|\, e^{-i\varphi} = |z| \exp(-i\varphi)$
- imaginární jednotka $i = (0,1) = \exp(-i\,\pi/2) = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = i$

Praktické důsledky:

- snadné derivování a integrování
- snadný a přehledný zápis některých vzorců
- lze odvodit některé vzorečky pro siny a kosiny
- fyzikální aplikace: periodické děje, tlumení, absorbce, …

Goniometrické vzorce

Procvičit goniometrické funkce:

- radiány vs stupně:

  2π rad = 360° (= 400 grad)

  úhlové minuty 60‘ = 1°, úhlové vteřiny 60“ = 1‘

  1 rad = …, 1 mrad = …
- sin/cos 30°,45°,60°; sin/cos π/4, π/3, π/2, π
- cos (α ± β) = …
- sin (α ± β) = …
- cos α ± cos β =
- sin α ± sin β =
- cos 2α =
- sin 2α =
- první a druhé derivace sin(x), cos(x), tan(x) podle x
- …

Posloupnosti a řady, jejich součty, polynomy

- zadaná posloupnost prvků $\{a_k\}$ … aritmetická posloupnost, harmonická, geometrická, …
- pro některé z nich existuje součet pro *k* od *n* do *m*, resp. do nekonečna
- **mocninná řada** $$q(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$
- **polynom** řádu *n*: $$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Taylorův rozvoj

- vyjádření funkce $f(x)$ mocninnou řadou (nebo polynomem) kolem nějakého vhodného bodu x_0; zapíšeme-li n-tou derivace $f(x)$ v bodě x_0 jako $f^{(n)}(x_0)$, pak

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

- **aproximace funkce:** vezmu jen několik prvních členů

- **linearizace funkce:** vezmu jen nultý a první člen, tedy konstantní a lineární člen

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

- analyticky neřešitelné (či nesnadno řešitelné) problémy se ve fyzice často **linearizují**

- **příklady:**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\sin(x) \approx x$$

$$(1+x)^n \approx 1 + nx \quad \rightarrow \quad n = \frac{1}{2}: \ \sqrt{1+x} \approx \ldots, \quad n = -1: \ \left(\frac{1}{1+x}\right) \approx \ldots$$