Kokojevy

1. Landauova teorie pro feromagnet

S pomocí Landauovy teorie popište kritické chování anisotropního feromagnetu s tzv. magneticky měkkou osou, v němž muže magnetizace zaujímat pouze dvě orientace – po směru osy z a proti směru osy z. V ose z dále pusobí magnetické pole B. Landauovu volnou energii zapíšeme ve tvaru mocninného rozvoje vhodného pro případy s malou magnetizací M

$$L(T,B,M) = \sum_{n=0}^{\infty} \ln(T,B)M^n \approx l_0(T,B)+l_1(T,B)M+l_2(T,B)M^2+l_3(T,B)M^3+l_4(T,B)M^4. \tag{1}$$

Předpokládáme, že velikosti B a $T - T_c$ jsou malé (slabé pole, blízkost fázového přechodu), a máme proto

$$\ln(T,B) \approx a_n + b_n B + c_n(T - T_c). \tag{2}$$

(a) Zjednodušte uvedený rozvoj do čtvrtého řádu s využitím symetrie $L(T,-B,-M) = L(T,B,M)$.

Rozvoj do štvrtého rádu má tvar

$$\begin{aligned} L(T,B,M) = a_0 + b_0 B + c_0(T-T_c) + a_1 M + b_1 BM + c_1(T-T_c)M + a_2 M^2 + b_2 BM^2 + \\ c_2(T-T_c)M^2 + a_3 M^3 + b_3 BM^3 + c_1(T-T_c)M^3 + a_4 M^4 + b_4 BM^4 + c(T-T_c)M^4 \end{aligned} \tag{3}$$

vďaka symetrií zo zadania môžeme usúdiť, že sú pre nás dôležité len členy kde je súčin B a M v párnej (sudéj) mocnine a teda

$$L(T,B,M) = a_0+c_0(T-T_c)+b_1 BM+a_2 M^2+c_2(T-T_c)M^2+b_3 BM^3+a_4 M^4+c_4(T-T_c)M^4 \tag{4}$$

(b) Rozvažte, jaké podmínky musí splňovat zbylé koeficienty rozvoje, abychom při nulovém poli dostali řešení $M = 0$ pro $T > T_c$ a $\pm$ $M(T)$ při $T < T_c$.

Koeficienty a_0 a c_0, sú z pohľadu tejto úlohy pre nás nezaujímavé, tvoria len akýsi *bias* a nemenia tvar krivky. Takže pre $B = 0$ môžeme prepísať rovnicu pre L do tvaru

$$\begin{aligned} L(T,B,M) &= a_2 M^2 + c_2(T-T_c)M^2 + a_4 M^4 + c_4(T-T_c)M^4 = \\ &= [a_2 + c_2(T-T_c)]\, M^2 + [a_4 + c_4(T-T_c)]\, M^4 \end{aligned} \tag{5}$$

k tomu aby sme získali nami žiadaný výsledok kde pre $M = 0$ pro $T > T_c$ a $\pm$ $M(T)$ při $T < T_c$ musí prvá hraná zátvorka $[a_2 + c_2(T - T_c)]$ byť záporná a druhá hranatá zátvorka $[a_4 + c_4(T - T_c)]$ musí byť kladná.

(c) Zanedbáme koeficienty, které nehrají při fázovém přechodu významou roli. Dále určíme hodnotu koeficientu b_1 s využitím termodynamického vztahu $M = -\partial F/\partial B$. Výsledný tvar Landauovy volné energie

$$L(T,B,M) \approx -BM + c_2(T-T_c)M^2 + a_4 M^4 \tag{6}$$

použijte k výpočtu následujících veličin:

(c1) Magnetizace $M(T)$ při nulovém poli $B = 0$.

A teda stacionárne body Landauovej energie a teda magnetizácie sú

$$\frac{\partial L}{\partial M} = c_2(T-T_c)2M + 4a_4 M^3 = 0, \tag{7}$$

$$M[2c_2(T-T_c) + 4a_4 M^2] = 0 \tag{8}$$

a teda korene sú $M_1 = 0$ a $M_{2,3} = \pm\sqrt{c_2(T-T_c)/2a_4}$.

(c2) Susceptibility pre malé pole, definovanú ako

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial B}\right)_{B=0}. \tag{9}$$

K výpočtu pouťijeme pôvodný zjednodušeny tvar Landauovej voľnej energie, derivácia podľa M bude teda mať tvar

$$\frac{\partial L}{\partial M} = B + c_2(T-T_c)2M + 4a_4M^3 = 0, \tag{10}$$

a následne z tejto rovnice vyjadríme rovnicu pre B

$$B = 2c_2(T-T_c)M + 4a_4M^3. \tag{11}$$

Využijeme symetriu

$$\frac{\partial M}{\partial B} = \left(\frac{\partial B}{\partial M}\right)^{-1} \tag{12}$$

aby sme sa dostali k vyjadreniu susceptibility. Deriváciou rovnice (11) získame tak prevrátenú hodnotu susceptibility a teda

$$\frac{\partial B}{\partial M} = 2c_2(T-T_c) + 12a_4M^2 \tag{13}$$

$$\chi = \left(\frac{\partial B}{\partial M}\right)^{-1} = \left(2c_2(T-T_c) + 12a_4M^2\right)^{-1} \tag{14}$$

do tejto rovnice môžeme dopniť výsledok z predchádzajúcej časti a teda rovnicu pre $M(T)$

$$\chi = \frac{1}{2c_2(T-T_c) + 12a_4\frac{c_2(T-T_c)}{2a_4}} = -\frac{1}{4c_2(T-T_c)} \tag{15}$$

pre $T_c > T$

$$\chi = -\frac{1}{4c_2(T-T_c)} \tag{16}$$

a pre $T_c < T$

$$\chi = \frac{1}{2c_2(T-T_c)}. \tag{17}$$

(c3) Magnetizace na T_c vyvolané vnějším polem, $M(B)$ pro $T = T_c$.

Opäť využijeme vzťah pre výpočet magnetizácie

$$\frac{\partial L}{\partial M} = -B + c_2(T-T_c)2M + 4a_4M^3 = 0. \tag{18}$$

Keďže $T = T_c$ druhý člen bude nulový a teda pre M platí

$$M = \sqrt[3]{\frac{B}{4a_4}}. \tag{19}$$

(c4) Specifického tepla $c = -T(\partial^2 F/\partial T^2)_{B=0}$ v okolí fázového přechodu.

Do vzťahu doplníme opäť vzťah pre $M(T)$ a získame tak vzťah

$$L(T, B=0, M) = \frac{c_2^2}{2a_4}(T-T_c)^2 \tag{20}$$

následne už len dva krát zderivujeme podľa T, výsledné špecifické teplo teda je

$$c = -T\frac{c_2^2}{a_4}. \tag{21}$$