Kolektivní a kooperativní jevy – 2. sada příkladů

1. Kritická hustota proudu v tenké supravodivé vrstvě

Určete kritickou hustotu proudu v tenké supravodivé vrstvě tloušťky d, která je mnohem menší než koherenční délka ξ a hloubka vniku λ. Kritická hustota proudu j_c je definována tak, že pro $j < j_c$ ($j > j_c$) se vrstva nachází v supravodivém (normálním) stavu. Tloušťka vrstvy je mnohem menší než ξ, proto můžeme ψ považovat za konstantní. Zapište odpovídající GL rovnice a ukažte, že mají netriviální řešení pro

$$j < j_c = \frac{2\sqrt{2}B_c}{3\sqrt{3}\mu_0\lambda}\ .$$

2. Supravodivá vrstva na dielektrickém válci, kvantování magnetického toku

Uvažujte o tenké supravodivé vrstvě tloušťky $d \ll \xi, \lambda$ nanesené na dielektrickém válci o poloměru R. Při pokojové teplotě je válec umístěn do homogenního magnetického pole rovnoběžného s osou válce, poté je ochlazen pod T_c a magnetické pole je vypnuto. Ukažte, že výsledný magnetický tok válcem je kvantován a jeho možné hodnoty jsou

$$\Phi = n\Phi_0 \left(1 + \frac{2\lambda^2}{Rd}\frac{1}{|\psi_0|^2}\right)^{-1}\ .$$

Nápověda: Pracujte ve válcových souřadnicích a předpokládejte řešení ve tvaru $\psi(\boldsymbol{r}) = f(r)\,\mathrm{e}^{in\vartheta}$, kde $f(r)$ je reálná funkce, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = A(r)\,\boldsymbol{e}_\vartheta$, kde $\boldsymbol{e}_\vartheta$ je jednotkový vektor odpovídající souřadnici ϑ, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = j(r)\,\boldsymbol{e}_\vartheta$. Dále $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} = (0, 0, B_z)$, odkud plyne $B_z = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rA)}{\mathrm{d}r}$, $A(r) = \frac{1}{r}\int_0^r B_z(r')\,r'\,\mathrm{d}\,r'$. Ukažte, že GL rovnice přejdou na

$$\xi^2\left[\left(\frac{n}{r} + \frac{2e}{\hbar}A\right)^2 f - \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right)\right] - f + f^3 = 0\ ,$$

$$\mu_0 j = \frac{\hbar f^2}{2e\lambda^2}\frac{n}{r} - \frac{f^2}{\lambda^2}A\ .$$

Zanedbejte závislost $j(r)$ na r, $j(r) = j_0$. Rovnici pro proudovou hustotu integrujte podél kružnice o poloměru R, použijte výsledek integrace a vztah mezi j_0 a B_z uvnitř válce vyplývající z Maxwellovy rovnice $\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{j}$.

3. Struktura víru v supravodiči typu II

Najděte řešení GL rovnic pro supravodivý vír nesoucí elementární kvantum magnetického toku. Využijte přitom tvar rovnic z předchozího příkladu a aplikujte okrajové podmínky: $\psi(0) = 0$ (v počátku je potlačena supravodivost), $\psi \to 1$ pro $r \to \infty$, $B_z \to 0$ pro $r \to \infty$. Úplné řešení lze provést pouze numericky, analyticky můžeme stanovit:
(a) řešení rovnic v blízkosti počátku
(b) řešení druhé rovnice v limitě $\lambda \gg \xi$.
Nápověda: (a) Funkce $A(r)$ a $f(r)$ rozviňte v mocninné řady v okolí počátku a rozvažte, jaké členy se v rozvoji uplatní. Určete koeficienty u prvních dvou nenulových členů rozvoje funkce f. (b) V tomto případě máme $f \approx 1$. Na rovnici pro proudovou hustotu zapůsobte operátorem rotace a obdržíte tak rovnice pro $B_z(r)$. Ukažte, že jejím řešením je Hankelova funkce komplexního argumentu a magnetické pole je možné zapsat ve tvaru

$$B_z(r) = \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right)$$

s asymptotickým vyjádřením

$$B_z(r) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{r}}\,\mathrm{e}^{-r/\lambda} \qquad \text{pro} \quad r \to \infty$$

a rozvojem v okolí počátku

$$B_z(r) \approx \frac{\Phi_0}{2\pi\lambda^2}\left(\ln\frac{\lambda}{r} + 0.12\right) \qquad \text{pro} \quad r \to 0\ .$$

Odhadněte na základě tohoto výsledku $B_z(0)$.

4. Dolní kritické pole H_{c1} v supravodičích typu II

Odhadněte Landauovu volnou energii Gibbsova typu pro supravodič s jedním vírem nesoucím magnetický tok Φ_0 a pro supravodič bez víru. Předpokládejte přitom, že $\lambda \gg \xi$ a radiální část ψ je přibližně rovna jedné. Ukažte na základě tohoto výsledku, že v supravodiči typu II vznikají víry od hodnoty H_{c1} intenzity vnějšího pole přibližně rovné

$$\mu_0 H_{c1} \approx \frac{\Phi_0}{4\pi\lambda^2}\ln\frac{\lambda}{\xi}\ .$$