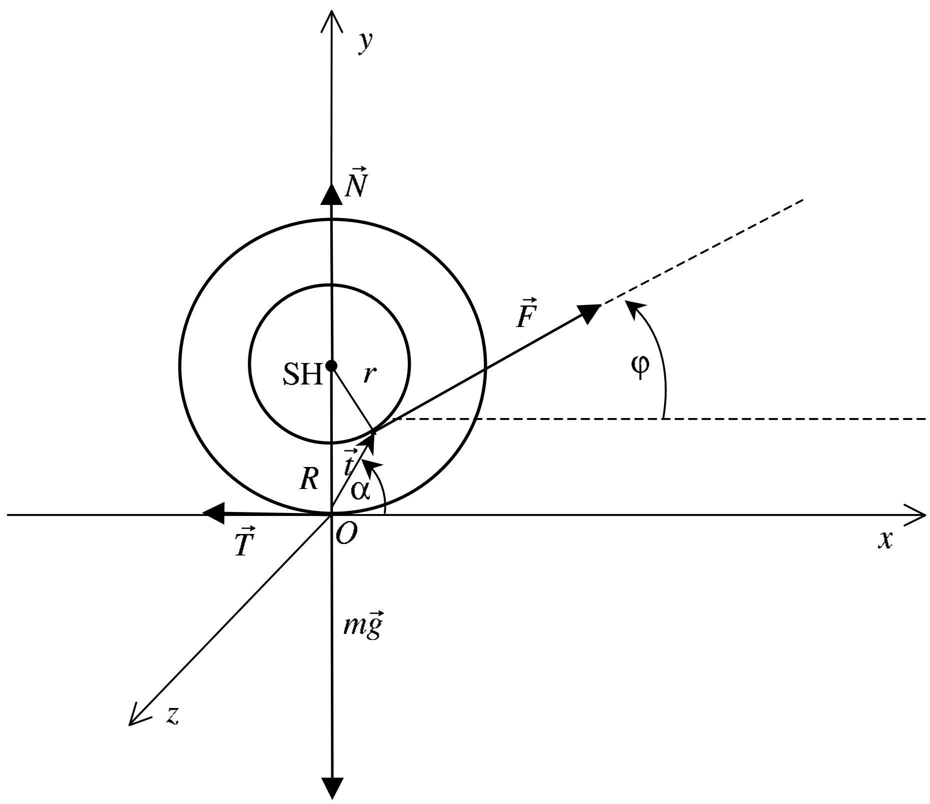
Cívka s nití

Charakteristika: Odvození pohybové rovnice a mezního úhlu odpovídajícího smýkání.
Fyzikální zákony:I. a II. impulzová věta
Potřeby:Cívka s nití.
Popis:

Cívka je tvořena dvěma kruhovými deskami o poloměru R spojenými souosým válcem o poloměru, na kterém je navinuta nit. Cívku s nití položíme na vodorovnou podložku a odvineme část nitě, za jejíž konec budeme tahat. Zjistíme, že vurčitém intevalu úhlů, který svírá nit srovinou podložky, se nit na cívku navíjí (a), vjiném intervalu se z cívky odvíjí (b). Při určitém úhlu se cívka po podložce nevalí, ale smýká.

Fyzikální interpretace:



$m\vec{g}$ - tíhová síla působící ve středu hmotnosti (SH)
$\vec{F}$ - tahová síla
$\vec{N}$ - tlaková síla podložky (působí v bodě O)
$\vec{T}$ - statická třecí síla (působí v bodě O)

obr.1

I. impulzová věta:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{T}$$

vazební podmínka:

$$\vec{a} = (a_x, 0, 0)$$

kde $\vec{a}$ je zrychlení těžiště.

x:

$$ma_x = F\cos\varphi + T_x \tag{1}$$

y:

$$0 = -mg + N + F\sin\varphi$$

II. impulzová věta:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_F + \vec{M}_T$$

$$\vec{\varepsilon} = (0, 0, \varepsilon_z)$$

$$J\varepsilon_z = Fr + T_x R \tag{2}$$

vazební podmínka (valení bez prokluzu):

$$a = \varepsilon R a_x = -\varepsilon_z R \tag{3}$$

(a) Nit se na cívku navíjí:

$$a_x = a, \varepsilon_z = -\varepsilon$$

Dosazením do (1) a (2) získáme:

$$m\varepsilon R = F\cos\varphi + T_x - J\varepsilon = Fr + T_x R \tag{4}$$

Řešením soustavy rovnic (4) dostáváme:

$$\varepsilon = \frac{F(R\cos\varphi - r)}{mR^2 + J} \tag{5}$$

$$a = \frac{FR(R\cos\varphi - r)}{mR^2 + J}$$

$$T_x = -F\frac{J\cos\varphi + mrR}{mR^2 + J}$$

Podmínky pro situaci (a) jsou splněny pro $\varepsilon > 0$,tj.

$$\cos\varphi > \frac{r}{R} \tag{6}$$

(b) nit se z cívky odvíjí:

$$a_x = -a, \varepsilon_z = \varepsilon$$

Dosazením do (1) a (2) získáme:

$$-m\varepsilon R = F\cos\varphi + T_x J\varepsilon = Fr + T_x R \tag{7}$$

Řešením rovnic (7) dostaneme:

$$\varepsilon = \frac{F(r - R\cos\varphi)}{mR^2 + J} \tag{8}$$

$$a = \frac{FR(r - R\cos\varphi)}{mR^2 + J}$$

$$T_x = -F\frac{J\cos\varphi + mrR}{mR^2 + J}$$

Situace (b) nastává pro $\varepsilon > 0$, tj.

$$\cos\varphi < \frac{r}{R} \tag{9}$$

(c) Mezní situce nastává pro:

$$\cos\varphi = \frac{r}{R},$$

pak

$$\varepsilon = 0, a = 0$$

Valení vzhledem k okamžité ose otáčení: Jednodušší možnost vysvětlení průběhu experimentu představuje formulace II. impulzové věty vzhledem k okamžité ose otáčení dané spojnicí dvou bodů dotyku cívky s podložkou.

Pro moment síly, kterou táhneme za nit, platí:

$$\vec{M} = \vec{t} \times \vec{F}$$

(momenty ostatních sil vzhledem k bodu O jsou nulové) odtud:

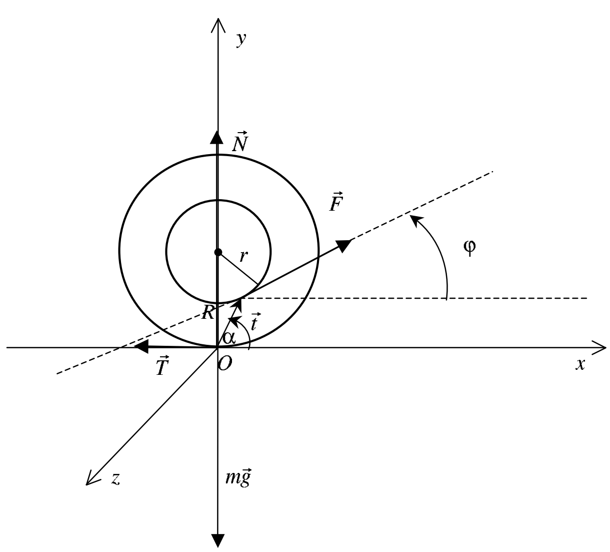
$$J^{'}\varepsilon = tF\sin(\alpha - \varphi),$$
$$J^{'} = J + mR^2$$

(Steinerova věta)

Užitím vět o trojúhelnících dostáváme pro ϵ stejné výrazy jako v (5) a (8). Pro $\alpha > \varphi$ (obr.2) je moment $\vec{M}$ nesouhlasně rovnoběžný s osou z a nit se na cívku navíjí. Pro $\alpha < \varphi$ je $\vec{M}$ souhlasně rovnoběžný s osou z , nit se odvíjí. Pro $\alpha = \varphi$ prochází vektrová přímka síly $\vec{F}$ vztažným bodem O a $\vec{M} = \vec{0}$. Nastává mezní situace. Podmínku pro mezní úhel získáme jednoduchou geometrickou úvahou pro případ, kdy $\vec{t} \parallel \vec{F}$. Dostaneme, stejně jako v předchozím, vztah:

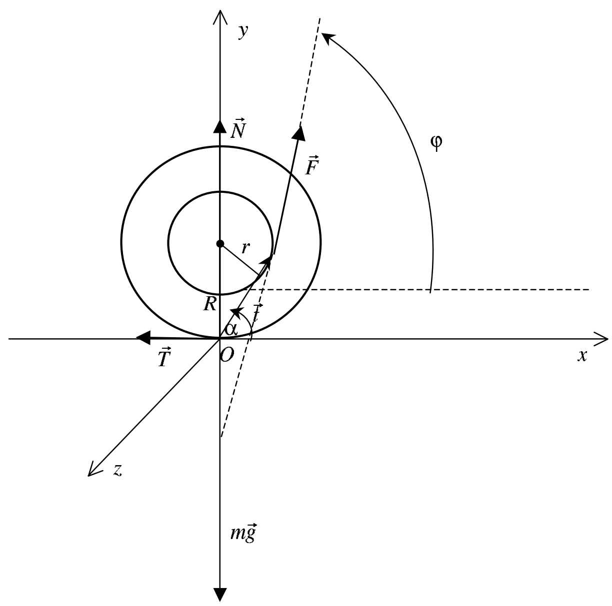
$$\cos\varphi = \frac{r}{R}$$

(a)



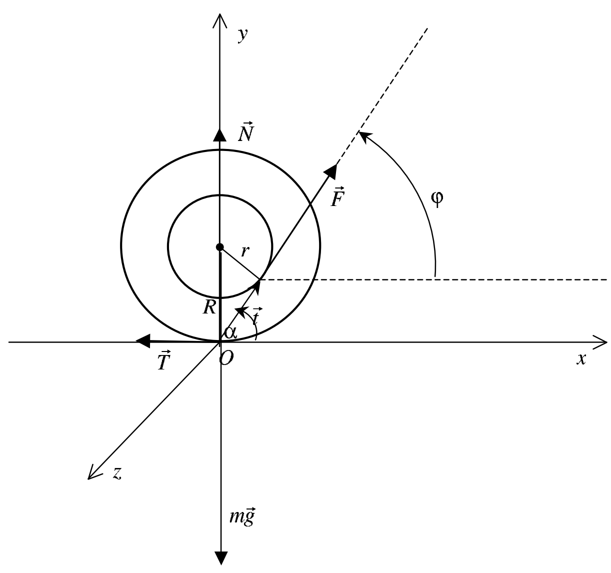
obr.2

(b)



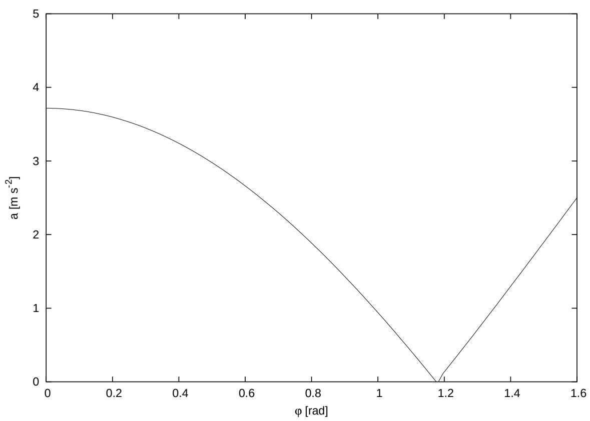
obr.3

(c)



obr.4

Pro ukázku uvádíme graf závislosti velikosti translačního zrychlení těžiště na úhlu φ, který svírá nit s vodorovnou podložkou pro hodnoty: $r = 5cm; R = 13cm; m = 1.2kg; J = 0.0077kgm^2; F = 10N$


a [m s^-2]
φ [rad]
0
1
2
3
4
5
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6