Masarykova univerzita

Zuzana Došlá

Matematika pro chemiky

2. díl

Brno 2011

Recenzent: doc. RNDr. Josef Kalas, CSc.

ISBN 978-80-210-5432-5

Předmluva

Předmětem těchto skript jsou diferenciální rovnice, diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných, základy vektorové analýzy, křivkový a plošný integrál. Tyto partie patří do matematické analýzy a navazují na první díl skript obsahující diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné.

Podobně jako je tomu u prvního dílu, i tento díl je koncipována tak, aby byl srozumitelný širokému okruhu čtenářů. Pochopení jednotlivých matematických pojmů a algoritmů je ilustrováno na velkém počtu řešených příkladů a cvičeních uvedených spolu s výsledky na konci každé kapitoly. Použití matematiky pro chemiky jsme ukázali v prvním díle na jednoduchých chemických úlohách, v tomto druhém díle jej budeme ilustrovat zejména prostřednictvím fyzikálních úloh.

Primárně jsou tato skripta určena pro studenty chemie a biochemie. Věřím, že skripta budou užitečná i pro studenty jiných přírodovědných a technických oborů.

Stejně jako první díl, i tento druhý díl skript vznikl za velké pomoci Mgr. Petra Lišky, který se výrazně podílel na tvorbě příkladů, sazbě v systému LaTeX a vytvořil všechny obrázky, a kterému bych chtěla touto cestou upřímně poděkovat za spolupráci a podnětné připomínky při psaní skript.

Dále bych chtěla poděkovat recenzentovi doc. RNDr. J. Kalasovi, CSc. a kolegovi RNDr. Janu Vondrovi, PhD. za pečlivé přečtení textu a cenné připomínky a Mgr. Kamilu Babulovi za kontrolu výsledků všech cvičení.

Brno, únor 2011 Zuzana Došlá

Obsah

Kapitola 1

Diferenciální rovnice prvního řádu

Diferenciální rovnice hrají důležitou roli ve všech přírodních vědách a v technice. Popisují např. průběh chemických reakcí, růst mikroorganismů, pohyb raket.

Aplikace diferenciálních rovnic najdeme také v ekonomii a společenských vědách. Velmi často zde vystupuje jako nezávisle proměnná čas.

Obsahem této a další kapitoly je ukázat, jak se řeší nejdůležitější diferenciální rovnice. V chemii se nejčastěji setkáme s diferenciálními rovnicemi 1. řádu, konkrétně s dvěma typy těchto rovnic, rovnicemi se separovanými proměnnými a lineárními rovnicemi. Důležitým typem rovnic jsou také diferenciální rovnice 2. řádu, s kterými se zase nejčastěji setkáváme ve fyzice.

1.1 Co jsou diferenciální rovnice

Diferenciální rovnice je rovnice, v které roli neznámé hraje funkce a která zároveň obsahuje derivace hledané funkce. Například rovnice

$$\text{a)}\quad y' = y, \qquad\qquad \text{b)}\quad y'' + y = 0$$

jsou diferenciální rovnice.

Řešit diferenciální rovnici znamená nalézt všechny funkce, které jsou definované na nějakém intervalu I a vyhovují dané rovnici. Takovou funkci nazýváme *řešením diferenciální rovnice*.

Řešením první rovnice je funkce $y = \mathrm{e}^x$, protože $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$. Snadno ověříme, že řešením jsou všechny funkce tvaru $y = C\mathrm{e}^x$, kde C je libovolná konstanta.

Řešením druhé rovnice je například funkce $y = \sin x$, protože $(\sin x)'' + \sin x = 0$ pro všechna x. Řešením této rovnice je také ovšem funkce $y = \cos x$ a opět lze ověřit, že všechny funkce tvaru $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty, splňují tuto rovnici, tj. jsou jejími řešeními.

Řádem diferenciální rovnice rozumíme řád nejvyšší derivace, která se v rovnici vyskytuje. Tak například předchozí rovnice byly prvního a druhého řádu. *Obecné řešení* diferenciální rovnice prvního řádu je funkce závisející na jednom parametru C taková, že speciální volbou C lze získat každé řešení této rovnice. *Partikulární řešení* je jedno konkrétní řešení získané z obecného řešení volbou konstanty C.

Průběh nějakého skutečného jevu je popsán jediným řešením. Z množiny všech řešení určíme toto řešení zadáním *počáteční podmínky*. Úloha najít řešení diferenciální rovnice splňující danou počáteční podmínku se nazývá *počáteční úloha* (někdy také Cauchyova počáteční úloha). V praktických aplikacích hraje často roli nezávislé proměnné x čas. Je proto přirozené hledat řešení diferenciálních rovnic pro $x \geq 0$. Například, počáteční úloha

$$y' = -y, \quad y(0) = 100$$

má řešení $y = 100\mathrm{e}^{-x}$.

U rovnic druhého řádu je pro jednoznačnost řešení nutné zadat dvě počáteční podmínky. Například, počáteční úloha

$$y'' + y = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$$

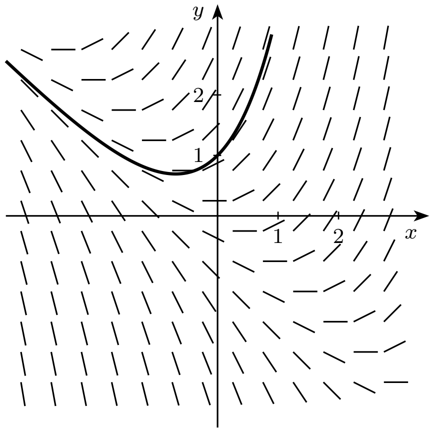
má řešení $y = \sin x$.

V mnoha případech není možné najít explicitní vyjádření hledané funkce. Naštěstí v případě, kdy je daná rovnice tvaru

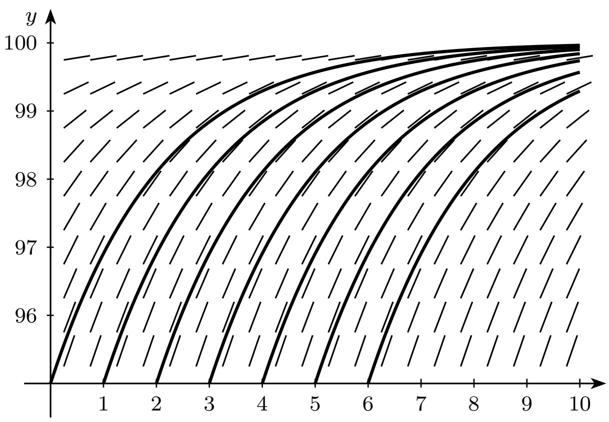
$$y' = f(x, y),$$

můžeme získat nějaké informace o hledaném řešení díky geometrické interpretaci dané rovnice.

Geometrická interpretace Diferenciální rovnice $y' = f(x, y)$ přiřazuje bodu $[x, y]$ v rovině právě jednu hodnotu $y'(x)$, neboli hodnotu derivace hledané funkce. Tuto hodnotu můžeme chápat jako směrnici přímky procházející bodem $[x, y]$. Tuto přímku obvykle znázorňujeme jako krátkou úsečkou se středem v daném bodě $[x, y]$ a směrnicí $y'(x)$. Tato úsečka se nazývá *lineární element*. Množinu všech lineárních elementů diferenciální rovnice nazýváme *směrové pole*. Graf každého řešení $\varphi(x)$ dané diferenciální rovnice, tzv. *integrální křivka*, má zřejmě tu vlastnost, že tečna v každém jeho bodě $[x, \varphi(x)]$ obsahuje příslušný lineární element. Směrové pole nám tak pomáhá zobrazit tvar hledaných integrálních křivek tím, že ukazuje směr, v kterém křivka prochází každým bodem.



(a) Směrové pole rovnice $y' = x + y$ a řešení splňující podmínku $y(0) = 1$



(b) Směrové pole rovnice $y' = \frac{1}{2}y\left(1 - \frac{1}{100}y\right)$ a řešení pro různé počáteční podmínky

Na následujících příkladech si ukážeme, jak můžeme ověřit, zda-li je nějaká funkce řešením diferenciální rovnice, případně počáteční úlohy.

Příklad 1.1. Ukažte, že funkce $y = x - \frac{1}{x}$ je řešením rovnice

$$xy' + y = 2x.$$

Řešení. Nejprve určíme derivaci zadané funkce:

$$y' = \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}.$$

Dosadíme-li do levé strany dané rovnice za y a y', dostaneme

$$xy' + y = x\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + x - \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x} + x - \frac{1}{x} = 2x.$$

Výraz na levé straně se rovná výrazu na pravé straně, funkce $y = x - \frac{1}{x}$ je proto řešením dané rovnice. ▲

Příklad 1.2. Ověřte, že funkce $y = \sin x \cos x - \cos x$ je řešením počáteční úlohy

$$y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x \qquad y(0) = -1.$$

Řešení. Podobně jako v předchozím příkladě vypočteme

$$y' = \cos x \cos x - \sin x \sin x + \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x$$

a dosadíme do levé strany rovnice za y a y'

$$\begin{aligned} y' + y\operatorname{tg} x &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x + \operatorname{tg} x(\sin x \cos x - \cos x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x + \frac{\sin x}{\cos x}(\sin x \cos x - \cos x) = \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x + \sin x + \sin^2 x - \sin x = \cos^2 x. \end{aligned}$$

Daná funkce je tak řešením zadané rovnice a zbývá ověřit, že pro ni platí i počáteční podmínka:

$$y(0) = \sin 0 \cos 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1.$$

Dohromady je tedy funkce $y = \sin x \cos x - \cos x$ řešením dané počáteční úlohy. ▲

Příklad 1.3. Ověřte, že každá funkce tvaru

$$y = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

je řešením rovnice

$$y' = xy$$

a najděte takové řešení této rovnice, které splňuje počáteční podmínku $y(0) = 5$.

Řešení. Nejprve spočtěme y' s přihlédnutím k tomu, že C je konstanta

$$y' = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{x^2}{2}\right)' = Cx\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

Dosaďme za y do pravé strany rovnice

$$xy = Cx\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$$

a vidíme, že opravdu každá funkce daného tvaru je řešením rovnice. Má-li funkce splnit počáteční úlohu $y(0) = 5$, musí platit

$$C\mathrm{e}^0 = 5$$

a tedy $C = 5$. Řešením počáteční úlohy je tak funkce

$$y = 5\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}.$$

▲

Řešení nejjednodušších diferenciálních rovnic vede na úlohu nalezení primitivní funkce.

Příklad 1.4. Najděte řešení diferenciální rovnice:

a) $y' = x^3$, b) $y''' = x$.

Řešení. a) Hledaná funkce, která bude řešením rovnice, je vlastně primitivní funkce k funkci na pravé straně, proto platí

$$y = \int x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + C.$$

Řešením dané rovnice jsou tak všechny funkce tvaru $y = \frac{x^4}{4} + C$, kde $C \in \mathbb{R}$.

b) Danou rovnici můžeme řešit opakováním předchozího postupu. Postupně dostáváme

$$y'' = \int x \,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C_1,$$

$$y' = \int \left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) \mathrm{d}x = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2,$$

$$y = \int \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2\right) \mathrm{d}x = \frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Řešením této rovnice jsou všechny funkce, které dostaneme z předpisu $y = \frac{x^4}{24} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$ volbou konstant C_1, C_2 a C_3.

▲

V následujících částech ukážeme, jak se řeší dva typy diferenciálních rovnic prvního řádu: Rovnice se separovanými proměnnými a lineární rovnice. Přesto, že se jedná o jedny z nejjednodušších typů rovnic, mají, jak ukážeme na závěr této kapitoly, mnoho praktických aplikací.

1.2 Rovnice se separovanými proměnnými

Jde o rovnici tvaru

$$y' = f(x)g(y), \tag{1.1}$$

kde f a g jsou spojité funkce. Dosadíme $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ a dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y).$$

Nejprve si všimněme, že konstantní funkce určené rovnicí $g(y) = 0$ jsou řešením rovnice (1.1). Za předpokladu $g(y) \neq 0$ *separujeme* proměnné (tj. na jedné straně rovnice máme výraz pouze proměnné y a na druhé výraz pouze proměnné x)

$$\frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = f(x)\,\mathrm{d}x$$

a tuto rovnost zintegrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{g(y)} = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Nezapomeňme, že primitivní funkce se liší o konstantu, čímž dostaneme množinu řešení rovnice (1.1)! Máme-li zadanou počáteční podmínku, určíme tuto konstantu z počáteční podmínky.

Poznamenejme, že ne vždy se nám podaří z (1.2) vyjádřit explicitní tvar řešení $y = y(x)$.

Příklad 1.5. Řešte diferenciální rovnice

a) $y' = 2xy$, b) $y' = \dfrac{1}{x}(4y - 1)$.

Řešení. a) Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy,$$

a odtud za předpokladu, že $y \neq 0$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2x\,\mathrm{d}x.$$

Všimněme si přitom, že funkce $y = 0$ je řešením původní rovnice. Integrací dostáváme

$$\ln|y| = x^2 + K.$$

Pomocí pravidel pro počítání s logaritmy můžeme tento výsledek upravit

$$\ln|y| = x^2 + K = \ln \mathrm{e}^{x^2} + \ln \mathrm{e}^K = \ln \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^K$$

a po odlogaritmování

$$|y| = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{e}^K$$

a odtud

$$y = \pm \mathrm{e}^{x^2} \mathrm{e}^K.$$

Označíme-li $C = \pm \mathrm{e}^K$, kde C je kladné nebo záporné číslo, dostaneme obecné řešení tvaru

$$y = C\mathrm{e}^{x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Poznamenejme, že pro $C = 0$ je v tomto vztahu zahrnuto i řešení $y = 0$.

b) Nejprve vyšetřeme případ $4y - 1 = 0$. Vidíme, že funkce $y = \frac{1}{4}$ je řešením naší rovnice. Za předpokladu $y \neq \frac{1}{4}$ dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{4y-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

a po integraci

$$\frac{1}{4} \ln |4y - 1| = \ln |x| + \ln K,$$

kde K je kladná konstanta. Odsud užitím pravidel pro počítání s logaritmy

$$\ln |4y - 1| = \ln K^4 x^4.$$

Nahradíme-li po odlogaritmování kladnou konstantu K^4 libovolnou konstantou C, můžeme odstranit absolutní hodnoty a dostaneme

$$4y - 1 = Cx^4,$$

a odtud

$$y = \frac{1}{4} C x^4 + \frac{1}{4}.$$

Tento vztah zahrnuje i řešení $y = \frac{1}{4}$.

▲

Příklad 1.6. Řešte počáteční úlohu

a) $x + yy' = 0, \quad y(0) = 2,$ b) $(x + 1)\,\mathrm{d}y - xy\,\mathrm{d}x = 0, \quad y(0) = 1.$

Řešení. a) Rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$x + y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

separujeme proměnné a integrujeme

$$\int y\,\mathrm{d}y = -\int x\,\mathrm{d}x.$$

Dostáváme

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C.$$

Aby byla splněna počáteční podmínka $y(0) = 2$, musí platit

$$\frac{2^2}{2} = -\frac{0^2}{2} + C.$$

Odtud C = 2 a řešení rovnice dostáváme ve tvaru $x^2 + y^2 = 4$, graf řešení je část kružnice

$$y = \sqrt{4 - x^2}, \qquad x \in [-2, 2].$$

b) Separujeme proměnné a za předpokladu $y \neq 0$ máme

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{x\,\mathrm{d}x}{x+1}.$$

Funkce na pravé straně je neryze lomená funkce. Dělením ji převedeme na polynom a ryze lomenou racionální funkci a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x.$$

Dostáváme tak

$$\ln|y| = x - \ln|x+1| + C.$$

Označme $C = \ln K$, vzhledem k tomu, že platí $x = \ln \mathrm{e}^x$, dostaneme

$$\ln|y| = \ln \mathrm{e}^x - \ln|x+1| + \ln K, \qquad K > 0$$

a užitím pravidel pro počítání s logaritmy

$$\ln|y| = \ln \frac{K\mathrm{e}^x}{|x+1|}.$$

Nyní můžeme odlogaritmovat a uvážíme-li novou konstantu $K^\star \in \mathbb{R}$, můžeme vynechat absolutní hodnoty, dostaneme tak řešení dané rovnice ve tvaru

$$y = \frac{K^\star \mathrm{e}^x}{x+1}.$$

Toto řešení obsahuje i řešení $y = 0$. Aby byla splněna počáteční podmínka musí platit

$$1 = \frac{K^\star \mathrm{e}^0}{0+1} \Rightarrow K^\star = 1.$$

Řešením počáteční úlohy je funkce $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}$.

▲

1.3 Lineární diferenciální rovnice

Jde o rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = f(x), \tag{1.3}$$

kde p a f jsou spojité funkce. Je-li $f(x) \equiv 0$, nazývá se rovnice (1.3) *homogenní*. V opačném případě, tj. $f(x) \not\equiv 0$, se nazývá *nehomogenní*.

Předepíšeme-li počáteční podmínku, pak má lineární rovnice (1.3) právě jedno řešení a to existuje na celém intervalu, kde jsou funkce p, f spojité.

▷ **Homogenní rovnice.** Uvažujme rovnici

$$y' + p(x)y = 0. \tag{1.4}$$

Tato rovnice má vždy tzv. *triviální řešení* $y \equiv 0$. Jde o rovnici se separovanými proměnnými a její obecné řešení najdeme tak, že separujeme proměnné a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\ln|y| = -\int p(x)\,\mathrm{d}x + k.$$

Po odlogaritmování dostaneme

$$|y| = \mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x + K} = \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{K} = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \quad (C = \mathrm{e}^{K} > 0).$$

Odstraníme-li absolutní hodnotu a uvážíme-li také triviální řešení $y \equiv 0$, dostaneme obecné řešení homogenní rovnice

$$y = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x}, \qquad (C \text{ je libovolná konstanta}).$$

Odtud je vidět, že netriviální řešení je buď kladné nebo záporné, nikdy neprotne osu x.

$\triangleright$ **Nehomogenní rovnice.** Pro řešení rovnice (1.3) použijeme následující větu:

Věta 1.7. *Nechť $y_0(x)$ je obecné řešení homogenní rovnice* (1.4)*, tj.*

$$y_0 = C\mathrm{e}^{-\int p(x)\,\mathrm{d}x},$$

a $y_p(x)$ je partikulární řešení nehomogenní rovnice (1.3)*. Pak obecné řešení této nehomogenní rovnice je*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Vidíme, že obecné řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice je složeno z obecného řešení příslušné homogenní rovnice a nějakého partikulárního řešení nehomogenní rovnice. Jelikož homogenní rovnici řešit umíme, zbývá tedy vyřešit úlohu, jak nalézt partikulární (tj. jedno konkrétní) řešení nehomogenní rovnice.

Použijeme tzv. *metodu variace konstanty*. Vyjdeme z řešení homogenní rovnice, nahradíme konstantu C vhodnou funkcí $C(x)$ (odtud název variace konstanty) a hledáme řešení ve tvaru

$$y_p(x) = C(x)y_0(x) = C(x)\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}.$$

Potřebujeme tedy určit neznámou funkci $C(x)$. Vypočteme y_p' (jako derivaci součinu):

$$y_p'(x) = C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x).$$

Dosadíme y_p, y_p' do (1.3) za y, y' a dostaneme tak

$$C'(x)y_0(x) + C(x)y_0'(x) + p(x)C(x)y_0(x) = f(x).$$

Protože y_0 je řešení homogenní rovnice, máme z (1.4) vztah $y_0' = -p(x)y_0$ a dosazením do předchozí rovnice dostaneme

$$C'(x)y_0(x) = f(x),$$

odkud plyne

$$C(x) = \int \frac{f(x)}{y_0(x)} \mathrm{d}x.$$

Shrneme-li celý postup, spočívá v těchto krocích:

(1) určíme obecné řešení y_0 homogenní rovnice

(2) určíme partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice metodou variace konstanty

(3) obecné řešení y nehomogenní rovnice je součet řešení z kroků (1) a (2), tj. $y = y_0 + y_p$.

Je-li zadaná počáteční podmínka, určíme konstantu a najdeme jediné řešení počáteční úlohy.

Příklad 1.8. Najděte obecné řešení rovnice

$$\text{a)} \quad y' = 2y + x, \qquad\qquad \text{b)} \quad y' + 2xy = x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Řešení. a) Krok 1: Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$y' = 2y.$$

Jde o rovnici se separovanými proměnnými a proto

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int 2\,\mathrm{d}x.$$

Odtud $\ln|y| = 2x + K$ a po odlogaritmování a odstranění absolutní hodnoty dostáváme obecné řešení homogenní rovnice

$$y_0 = C\mathrm{e}^{2x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2: Najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y_p = C(x)\mathrm{e}^{2x}$. Vypočteme $y_p' = C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x}$ a dosadíme za y a y' do původní rovnice

$$C'(x)\mathrm{e}^{2x} + 2C(x)\mathrm{e}^{2x} = 2C(x)\mathrm{e}^{2x} + x$$

a odtud

$$C'(x) = x\mathrm{e}^{-2x}.$$

Metodou per partes vypočítáme

$$C(x) = \int x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má proto tvar

$$y_p = C(x)\mathrm{e}^{2x} = \left(-\frac{x}{2}\mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right)\mathrm{e}^{2x} = -\frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

Krok 3: Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C\mathrm{e}^{2x} - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}.$$

b) Postupujeme podobně jako v předchozím příkladě.
Krok 1. Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$y' + 2xy = 0.$$

Opět jde o rovnici se separovanými proměnnými

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int 2x \,\mathrm{d}x.$$

a odtud

$$\ln|y| = -x^2 + K$$

a po odlogaritmování a odstranění absolutní hodnoty dostaneme obecné řešení homogenní rovnice

$$y_0 = C\mathrm{e}^{-x^2}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2. Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y_p = C(x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Vypočteme $y_p' = C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2}$ a dosadíme do rovnice

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x^2} - 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} + 2xC(x)\mathrm{e}^{-x^2} = x\mathrm{e}^{-x^2}$$

a odtud

$$C'(x) = x$$

a po zintegrování

$$C(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má proto tvar

$$y_p = C(x)\mathrm{e}^{-x^2} = \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Krok 3. Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C\mathrm{e}^{-x^2} + \frac{x^2}{2}\mathrm{e}^{-x^2} = \left(C + \frac{x^2}{2}\right)\mathrm{e}^{-x^2}.$$

▲

Příklad 1.9. Řešte počáteční úlohu

a) $x^3y' - 2x^2y = 4, \quad y(1) = -2,$ b) $y'(x^2+1) + 2xy = \dfrac{2x}{x^2+1}, \quad y(0) = -1.$

Řešení. a) Rovnici upravme do tvaru

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{4}{x^3}.$$

Jedná se o lineární rovnici.

Krok 1: Řešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y' = \frac{2y}{x}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x}.$$

Odtud

$$\ln|y| = 2\ln|x| + K = \ln x^2 + K$$

a odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty dostaneme

$$y_0 = Cx^2, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2: Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude tvaru $y_p = C(x)x^2$. Vypočteme y_p', dosadíme do rovnice a dostaneme

$$C'(x) = \frac{4}{x^5}$$

a po zintegrování

$$C(x) = -\frac{1}{x^4}.$$

Partikulární řešení je

$$y_p = C(x)x^2 = -\frac{1}{x^4}x^2 = -\frac{1}{x^2}.$$

Krok 3: Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = Cx^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Dosadíme počáteční podmínku a dostáváme

$$-2 = C - 1$$

a odtud $C = -1$. Řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = -x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

b) Postupujme obdobně jako v předchozích příkladech. Rovnici upravíme do tvaru

$$y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{2x}{(x^2+1)^2}.$$

Jedná se opět lineární rovnici.
Krok 1: Vyřešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y' = -\frac{2x}{x^2+1}y.$$

Jde o rovnici se separovanými proměnnými, dostáváme tak

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{-2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x.$$

Odtud

$$\ln|y| = -\ln(x^2+1) + K = \ln(x^2+1)^{-1} + K$$

odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty dostaneme

$$y_0 = \frac{C}{x^2+1}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Krok 2: Partikulární řešení nehomogenní rovnice bude tvaru $y_p = \frac{C(x)}{x^2+1}$. Vypočteme

$$y_p' = \frac{C'(x)(x^2+1) - 2xC(x)}{(x^2+1)^2},$$

dosadíme do rovnice a dostaneme

$$C'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

a po zintegrování

$$C(x) = \ln(x^2+1).$$

Partikulární řešení je

$$y_p = \frac{C(x)}{(x^2+1)} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

Krok 3: Obecné řešení nehomogenní rovnice má tvar

$$y = \frac{C}{x^2+1} + \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} = \frac{C+\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

Dosadíme počáteční podmínku a dostáváme

$$-1 = \frac{C+0}{0+1},$$

odtud $C = -1$. Řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = \frac{-1+\ln(x^2+1)}{x^2+1}.$$

▲

Poznámka 1.10. Kromě *metody variace konstanty* můžeme použít i *metodu integračního faktoru*. Máme-li nehomogenní lineární rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = f(x)$$

můžeme ji řešit tak, že obě strany vynásobíme výrazem $I(x) = \mathrm{e}^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$, tzv. *integračním faktorem*, a poté zintegrujeme.

Například pro rovnici

$$y' + 3x^2y = 6x^2$$

je integrační faktor výraz

$$I(x) = \mathrm{e}^{\int 3x^2\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{x^3}.$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice výrazem e^{x^3} dostaneme

$$\mathrm{e}^{x^3}y' + 3x^2\mathrm{e}^{x^3}y = 6x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

Všimněme si, že na levé straně stojí rozepsaná derivace součinu. Rovnici lze proto upravit do tvaru

$$\left(\mathrm{e}^{x^3}y\right)' = 6x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

Nyní můžeme obě strany zintegrovat

$$\mathrm{e}^{x^3}y = \int 6x^2\mathrm{e}^{x^3}\,\mathrm{d}x.$$

Integrál na pravé straně vypočteme pomocí substituce $t = x^3, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{3x^2}$. Dostaneme

$$\mathrm{e}^{x^3}y = 2\mathrm{e}^{x^3} + C$$

a odtud

$$y = 2 + C\mathrm{e}^{-x^3}.$$

Ještě poznamenejme, že obě metody jsou ekvivalentní a vedou na výpočet stejných integrálů.

1.4 Aplikace diferenciálních rovnic prvního řádu

Příklad 1.11. (*Model radioaktivního rozpadu*) Uvažme radioaktivní atomy v nějakém izotopu chemického prvku a označme jejich počet v závislosti na čase $N(t)$. Radioaktivita je přirozený nebo uměle navozený samovolný rozpad atomového jádra provázený vysíláním radioaktivního záření. Ernest Rutherford ukázal, že rychlost rozpadu (tedy vlastně změna počtu atomů) je přímo úměrná počtu atomů příslušného prvku. Tento proces můžeme proto popsat diferenciální rovnicí

$$N' = -\lambda N,$$

kde $\lambda > 0$ je tzv. přeměnová konstanta. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, kterou můžeme doplnit o počáteční podmínku $N(0) = N_0$, tj. že v jistém čase, v kterém započalo měření byl počet atomů N_0. Rovnici upravíme

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\lambda N$$

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\lambda\,\mathrm{d}t$$

a integrujeme

$$\int \frac{\mathrm{d}N}{N} = \int -\lambda\,\mathrm{d}t.$$

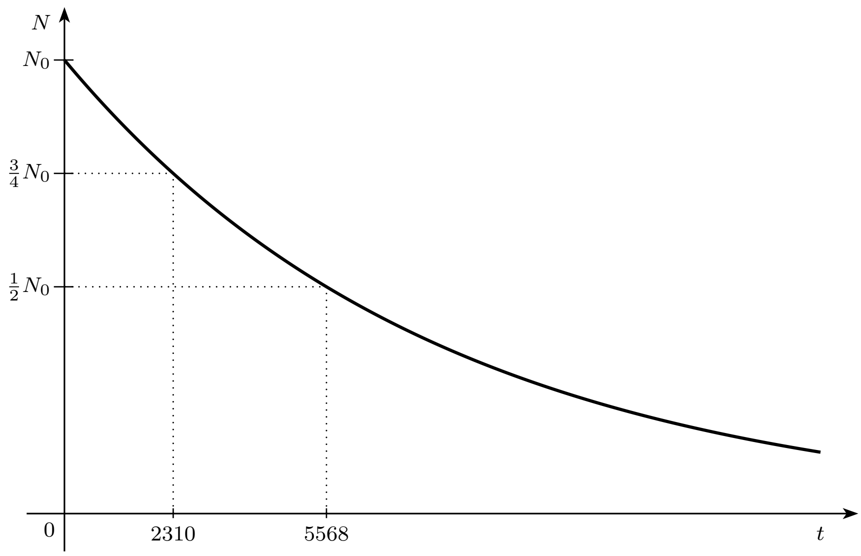
Odtud dostaneme řešení

$$N(t) = K\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Aby byla splněna počáteční podmínka musí platit $N_0 = K\mathrm{e}^0$ a řešení počáteční úlohy je tak tvaru
$$N(t) = N_0\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Pomocí tohoto výsledku můžeme řešit např. následující úlohu:

Poločas rozpadu radioaktivního izotopu uhlíku $^{14}\mathrm{C}$ *je 5568 let (tj. počáteční množství se za tuto dobu zmenší na polovinu). Určete, za jak dlouho se počáteční množství sníží o 25 %.*



Řešení. Dosadíme-li do předchozího vztahu $N(t) = \frac{1}{2}N_0$ a $t = 5568$, dostáváme
$$\frac{1}{2}N_0 = N_0\mathrm{e}^{-5568\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-5568\lambda}$$
a po zlogaritmování
$$-\ln 2 = -5568\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{\ln 2}{5568}.$$
Pro hledaný čas t za který se množství sníží o 25 % proto platí:
$$\frac{3}{4}N_0 = N_0\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{5568}t} \Rightarrow t = -\frac{5568\ln\frac{3}{4}}{\ln 2} \doteq 2310 \text{ let}.$$

Počáteční množství izotopu uhlíku $^{14}\mathrm{C}$ se sníží o čtvrtinu za 2310 let. ▲

Příklad 1.12. (*Smíchávání*)

a) Nádrž obsahuje 20 kg soli rozpuštěné v 5000 l vody. Solný roztok obsahující 0,03 kg soli na litr přitéká do nádrže rychlostí 25 l/min. Směs v nádrži je rovnoměrně promíchána a vytéká z ní stejnou rychlostí. Jaké množství soli zůstane v nádrži po 30 minutách?

Řešení. Označme $y(t)$ množství soli v nádrži po t minutách. Víme, že $y(0) = 20$ a chceme zjistit $y(30)$. Sestavme proto diferenciální rovnici, kterou bude $y(t)$ splňovat. Zcela jistě pro změnu množství soli platí

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\text{přítok}) - (\text{odtok}),$$

kde přítokem myslíme množství soli, která se dostane do nádrže a odtokem množství, které z nádrže odejde. Ze zadání úlohy máme

$$(\text{přítok}) = \left(0{,}03\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}\right)\left(25\,\frac{\text{l}}{\text{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Nádrž stále obsahuje 5000 l roztoku, proto koncentrace v čase t je $\frac{y(t)}{5000}$ kg/l. Jelikož roztok odtéká rychlostí 25 l/min, dostáváme

$$(\text{odtok}) = \left(\frac{y(t)}{5000}\,\frac{\text{kg}}{\text{l}}\right)\left(25\,\frac{\text{l}}{\text{min}}\right) = \frac{y(t)}{200}\,\frac{\text{kg}}{\text{min}}.$$

Máme tak rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}75 - \frac{y(t)}{200} = \frac{150 - y(t)}{200},$$

což je rovnice se separovanými proměnnými, kterou umíme řešit. Úpravou a integrováním dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{150 - y} = \int \frac{\mathrm{d}t}{200}$$

$$-\ln|150 - y| = \frac{t}{200} + C.$$

Protože má být splněna počáteční podmínka $y(0) = 20$, máme $-\ln 130 = C$ a tak

$$\ln|150 - y| = \ln 130 - \frac{t}{200}$$

$$\ln|150 - y| = \ln 130 - \ln \mathrm{e}^{\frac{t}{200}}$$

a odlogaritmováním dostaneme řešení dané počáteční úlohy ve tvaru

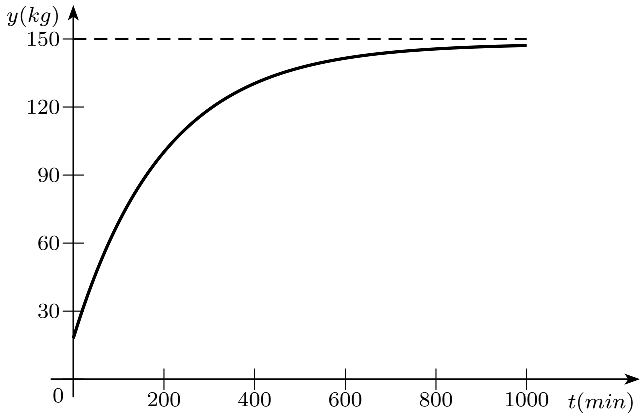
$$y(t) = 150 - 130\mathrm{e}^{-\frac{t}{200}}.$$

Množství soli v nádrži po 30 minutách je

$$y(30) = 150 - 130\mathrm{e}^{-\frac{30}{200}} \doteq 38{,}1\,\text{kg}.$$

▲

b) Jak se změní řešení úlohy, jestliže bude směs vytékat rychlostí 20 l za minutu?



Obrázek 1.1: Graf řešení $y(t) = 150 - 130\mathrm{e}^{-\frac{t}{200}}$

Řešení. Vyjdeme ze stejné rovnice

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (\text{přítok}) - (\text{odtok}),$$

kde pro přítok bude výraz stejný

$$(\text{přítok}) = \left(0{,}03\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\right)\left(25\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right) = 0{,}75\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

Nyní není ovšem množství roztoku v nádrži konstantní, nýbrž platí, že nádrž obsahuje v čase t zřejmě $5000 + (25 - 20)t$ litrů roztoku a proto koncentrace v tomto okamžiku bude

$$\frac{y(t)}{5000 + 5t}.$$

Pro odtok tak dostáváme

$$(\text{odtok}) = \left(\frac{y(t)}{5000 + 5t}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{l}}\right)\left(20\,\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{min}}\right) = \frac{4y(t)}{1000 + t}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{min}}.$$

Máme tak rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0{,}75 - \frac{4y(t)}{1000 + t}, \quad y(0) = 20,$$

což je nehomogenní lineární rovnice prvního řádu. Nejprve řešme homogenní rovnici

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{4y}{1000 + t}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{4\,\mathrm{d}t}{1000 + t}$$

a po integraci dostaneme

$$\ln|y| = -4\ln(1000 + t) + K.$$

Odlogaritmováním a odstraněním absolutní hodnoty dostáváme

$$y_0 = \frac{C}{(1000 + t)^4}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice najdeme ve tvaru

$$y_p(t) = \frac{C(t)}{(1000+t)^4}.$$

Pak

$$y_p'(t) = \frac{C'(t)(1000+t)^4 - 4C(t)(1000+t)^3}{(1000+t)^8}$$

a po dosazení do rovnice dostáváme

$$C'(t) = 0{,}75(1000+t)^4,$$

odkud

$$C(t) = 0{,}15(1000+t)^5.$$

Partikulární řešení je proto

$$y_p(t) = \frac{0{,}15(1000+t)^5}{(1000+t)^4} = 0{,}15(1000+t)$$

a obecné řešení rovnice je

$$y(t) = \frac{C}{(1000+t)^4} + 0{,}15(1000+t).$$

Dosadíme-li počáteční podmínku $y(0) = 20$, dostaneme

$$20 = \frac{C}{1000^4} + 150$$

a odtud

$$C = -130 \cdot 1000^4.$$

Množství soli je proto dáno funkcí

$$y(t) = 0{,}15(1000+t) - \frac{130 \cdot 1000^4}{(1000+t)^4}$$

a platí

$$y(30) = 0{,}15 \cdot 1030 - \frac{130 \cdot 1000^4}{1030^4} \approx 39\,\mathrm{kg}.$$

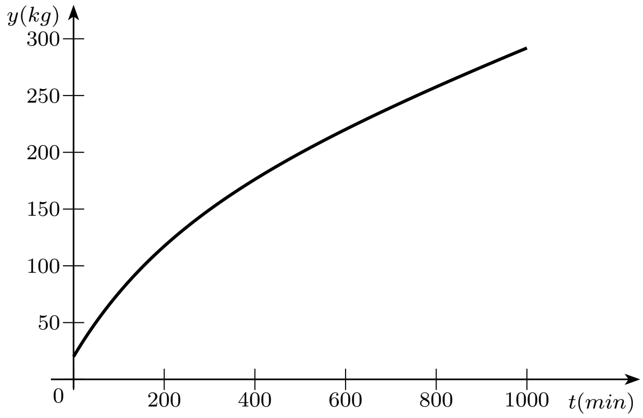
▲

Příklad 1.13. (*Rychlost chemické reakce*) Při jednoduché chemické reakci jednotlivé molekuly dvou reaktantů A a B vytvoří molekulu produktu C:

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} \longrightarrow \mathrm{C}.$$

V roce 1864 objevili Cato Maximilian Guldberg a Peter Waage, že rychlost této reakce je přímo úměrná součinu okamžitých koncentrací, neboli

$$\frac{\mathrm{d}[\mathrm{C}]}{\mathrm{d}t} = k[\mathrm{A}][\mathrm{B}].$$



Obrázek 1.2: Graf řešení $y(t) = 0{,}15(1000 + t) - \frac{130 \cdot 1000^4}{(1000+t)^4}$

a) Odvoďte diferenciální rovnici popisující změnu koncentrace vzniklé látky.
b) Pomocí této rovnice určete rychlost reakce za předpokladu, že počáteční koncentrace obou látek byla shodná.

Řešení. a) Označme $x(t)$, resp. $y(t)$, koncentrace (v molech na litr) v čase t látky A, resp. látky B. Nechť $a = x(0) > 0$, $b = y(0) > 0$ jsou počáteční koncentrace obou látek a $z(t)$ značí úbytek obou látek.

Vzhledem k tomu, že spolu kombinujeme vždy jednu a jednu molekulu látek A a B a vzniká jedna molekula látky C, platí

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Přitom pro samotný úbytek $z(t)$ koncentrace látky A, resp. látky B, platí

$$z(t) = a - x(t), \qquad \text{resp.} \qquad z(t) = b - y(t).$$

Ze zadání víme, že

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = kx(t)y(t)$$

a po dosazení za $x(t)$ a $y(t)$ dostáváme diferenciální rovnici

$$z' = k(z - a)(z - b), \qquad z(0) = 0.$$

b) Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými a navíc předpokládáme, že $a = b$. Úpravou a integrováním dostáváme

$$\int \frac{\mathrm{d}z}{(z-a)^2} = \int k \, \mathrm{d}t,$$

$$-\frac{1}{z-a} = kt + c.$$

Odtud

$$z = -\frac{1}{kt+c} + a. \tag{1.5}$$

Z počáteční podmínky dostaneme

$$0 = -\frac{1}{0+c} + a,$$

tedy

$$c = \frac{1}{a}.$$

Dosazením do (1.5) a úpravou získáme řešení

$$z(t) = \frac{a^2kt}{akt+1}.$$

Pro rychlost reakce pak dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{a^2k}{(akt+1)^2}.$$

▲

Příklad 1.14. (*Model růstu populace*) Předpokládejme, že rychlost růstu nějaké populace je přímo úměrná její velikosti. To je rozumný předpoklad například pro populace bakterií nebo zvířat v ideálních podmínkách (dostatek potravy, absence predátorů, odolnost vůči nemocem, nelimitované prostředí). Je-li t čas a P je počet jedinců v populaci v čase t, dostaneme pro rychlost růstu populace

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP,$$

kde k je kladná konstanta. Podle tohoto modelu by populace rostla stále rychleji a až do nekonečna. Bylo by tedy jistě rozumné tento model přiblížit realitě například tak, že bychom reflektovali omezené možnosti daného prostředí. Mnoho populací se začne rozrůstat exponenciálně, ale jakmile se počet jedinců přiblíží nosné kapacitě K prostředí (tj. nějaké maximální hodnotě, kterou je dané prostředí schopno uživit) růst se zpomalí, případně velikost populace začne klesat pokud její velikost tuto hodnotu překročí. Pro takovýto model máme tedy tyto předpoklady

- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} \approx kP$ pro malá P, tj. ze začátku populace roste přímo úměrně svojí velikosti
- $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} < 0$, jestliže $P > K$, tj. velikost populace se zmenšuje, jestliže počet jedinců přesáhne kapacitu prostředí.

Oba předpoklady splňuje rovnice

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = kP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \tag{1.6}$$

která se nazývá *logistická diferenciální rovnice*. Doplňme tuto rovnici o počáteční podmínku $P(0) = P_0$ a vyřešme ji.

Řešení. Jedná se o rovnici se separovanými proměnnými, upravme ji a integrujme

$$\int \frac{K}{P(K-P)}\,\mathrm{d}P = \int k\,\mathrm{d}t.$$

Integrál na levé straně rovnice můžeme rozložit na parciální zlomky a dostáváme tak

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K-P}\right)\mathrm{d}P = \int k\,\mathrm{d}t$$

$$\ln|P| - \ln|K - P| = kt + C.$$

Upravíme a odlogaritmujeme

$$\left|\frac{K-P}{P}\right| = \mathrm{e}^{-kt-C}.$$

Označíme-li kladnou konstantu $\mathrm{e}^{-C} = A$ a budeme předpokládat, že $A \in \mathbb{R}$, můžeme odstranit absolutní hodnotu

$$\frac{K-P}{P} = A\mathrm{e}^{-kt}.$$

Odtud vyjádříme funkci $P = P(t)$ a dostaneme tak obecné řešení rovnice (1.6)

$$P(t) = \frac{K}{1 + A\mathrm{e}^{-kt}}.$$

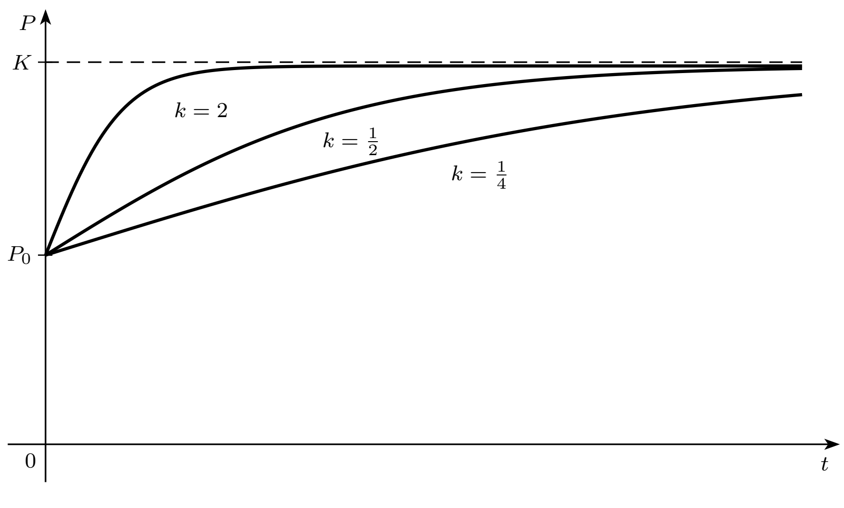
Z počáteční podmínky platí

$$P_0 = \frac{K}{1 + A\mathrm{e}^{0}},$$

odkud

$$A = \frac{K - P_0}{P_0}.$$

▲



Obrázek 1.3: Model růstu populace pro různé volby k

1.5 Numerické řešení počáteční úlohy

V mnoha případech nejsme schopni danou diferenciální rovnici přímo vyřešit a musíme se spokojit pouze s přibližným řešením, kterého můžeme dosáhnout pomocí tzv. *numerických metod*. Nejjednodušší metodou numerického řešení počáteční úlohy je *Eulerova metoda*. Základní myšlenkou této metody je aproximace řešení lomenou čarou.

Uvažujme počáteční úlohu

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Chceme nalézt přibližné řešení $y(x)$ pro $x \in [x_0, x_0{+}a]$. Postupujeme tak, že interval rozdělíme na n podintervalů délky h_i. Dostaneme tak dělicí body

$$x_1 = x_0 + h_1, \quad x_2 = x_1 + h_2, \quad \dots, \quad x_n = x_{n-1} + h_n = x_0 + a,$$

kde $h_1 + h_2 + \cdots + h_n = a$. Vypočteme $y_0' = f(x_0, y_0)$ a položíme

$$y_1 = y_0 + h_1 y_0' = y_0 + h_1 f(x_0, y_0).$$

Podobně určíme $y_2 = y_1 + h_2 f(x_1, y_1)$ atd. a dostaneme přibližné řešení

$$y(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i) \quad \text{pro} \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \quad (i = 0, 1, \dots, n-1).$$

Nejjednodušším způsobem dělení intervalu je použití stejně vzdálených dělicích bodů. V tomto případě můžeme Eulerovu metodu popsat následovně:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + h f(x_i, y_i), \qquad i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Příklad 1.15. Pomocí Eulerova algoritmu určete přibližné řešení počáteční úlohy

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1 \tag{1.7}$$

s krokem $h = 0{,}1$. Porovnejte tento výsledek s přesným řešením.

Řešení. Máme dáno $h = 0{,}1$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ a $f(x, y) = x + y$. Podle předchozího postupu tak dostáváme

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1(0 + 1) = 1,1, \\ y_2 &= y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1(0,1 + 1,1) = 1,22, \\ y_3 &= y_2 + hf(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1(0,2 + 1,22) = 1,362. \end{aligned}$$

Tedy hodnota řešení v bodě $x = 0{,}3$ je $y(0,3) \approx 1,362$. Pokračovaním v podobných výpočtech dostaneme další hodnoty:

i	x_i	y_i	i	x_i	y_i
1	0,1	1,100000	6	0,6	1,943122
2	0,2	1,220000	7	0,7	2,197434
3	0,3	1,362000	8	0,8	2,487178
4	0,4	1,528200	9	0,9	2,815895
5	0,5	1,721020	10	1,0	3,187485

Přibližné řešení počáteční úlohy (1.7) na intervalu $[0,1]$ je lomená čára spojující body $[x_i, y_i]$ z předchozí tabulky. Jelikož se jedná o lineární rovnici, můžeme najít přesné řešení, kterým je funkce

$$y(x) = 2\mathrm{e}^x - x - 1.$$

Porovnáme-li hodnotu tohoto řešení v bodě $x = 1$, tj. $y(1) = 2\mathrm{e} - 2 \approx 3{,}436564$ s řešením pomocí Eulerova algoritmu $y(1) = 3{,}187485$, dostaneme rozdíl 0,249079. ▲

Poznámka 1.16. a) Při použití Eulerovy metody se dopouštíme chyby, která je přímo úměrná velikosti dělicího intervalu, nejjednodušší cestou ke zpřesnění je tak zmenšení dělicího intervalu. Vliv velikosti kroku h na řešení předchozího příkladu v $x = 1$ je vidět v následující tabulce.

Velikost h	Hodnota $y(1)$
$0,500$	$2,500000$
$0,250$	$2,882813$
$0,100$	$3,187485$
$0,050$	$3,306595$
$0,020$	$3,383176$
$0,010$	$3,409628$
$0,005$	$3,423034$
$0,001$	$3,433848$

b) Nelze jednoduše říci, jak velká je chyba, které se dopouštíme při použití Eulerovy metody, snadno však můžeme poznat, zda-li naše přibližné řešení leží pod nebo nad skutečným řešením v okolí uzlového bodu. Dá se ukázat, že v případě, kdy je řešení konvexní (konkávní) v okolí uzlového bodu, pak naše přibližné řešení leží v okolí tohoto bodu pod (nad) skutečným řešením. O tom, zda-li je řešení konvexní nebo konkávní, se můžeme přesvědčit přímo ze zadání.

Cvičení

1. Rozhodněte, zda je funkce řešením dané diferenciální rovnice:

   a) $y = \frac{1}{x+C}$, $\quad y' = -y^2$,   b) $y = \mathrm{e}^{-t} + t\mathrm{e}^{-t}$, $\quad y'' + 2y' + y = 0$,

   c) $y = \frac{1}{\sqrt{C-x^2}}$, $\quad y' = xy^3$,   d) $y = \frac{1+C\mathrm{e}^t}{1-C\mathrm{e}^t}$, $\quad y' = \frac{1}{2}(y^2-1)$.

   Pro rovnice z části c) a d) najděte funkce, které vyhovují počáteční podmínce $y(0) = 2$.

2. Řešte rovnice se separovanými proměnnými:

   a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$,   b) $2y - x^3y' = 0$,

   c) $1 + y^2 + xyy' = 0$,   d) $y + xy + xy' - xyy' = 0$,

   e) $xyy' = 1 - x^2$,   f) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{t\mathrm{e}^t}{y\sqrt{1+y^2}}$.

3. Řešte dané počáteční úlohy:

   a) $\frac{y}{y'} - x = 0, \quad y(1) = 1,$ b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 + 1, \quad y(1) = 0,$

   c) $xy' + y = y^2, \quad y(-1) = \frac{1}{2},$ d) $\sin y \cos x \mathrm{d}y = \cos y \sin x \mathrm{d}x, \quad y(0) = \frac{\pi}{4},$

   e) $2(1 + \mathrm{e}^x)yy' = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0,$ f) $y \ln y + xy' = 0, \quad y(1) = 1.$

4. Řešte lineární rovnice:

   a) $y' + 2y = 4x,$ b) $y' + 3x^2y = 6x^2,$

   c) $y' + 2y = 2\mathrm{e}^x,$ d) $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2,$

   e) $y' + 4x^3y = x^2\mathrm{e}^{-x^4},$ f) $y'\mathrm{e}^{x^2} + 2xy\mathrm{e}^{x^2} = \cos x.$

5. Řešte počáteční úlohu:

   a) $xy' + y - \mathrm{e}^x = 0, \quad y(1) = 0,$ b) $2xy' + x^2 - 6y = 0, \quad y(1) = 1,$

   c) $y' + y = x + \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 0,$ d) $xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y(1) = 0.$

6. Mějme tzv. monomolekulární reakci prvního řádu. Je to reakce typu $\mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{X}$, které se zúčastňují molekuly jedné látky a jejíž rychlost je přímo úměrná množství látky (např. inverze cukru, rozpad kysličníku dusičnatého). Vypočtěte množství vznikající látky v čase t a určete, k jaké hodnotě se blíží pro $t \to \infty$.

7. Je experimentálně dokázáno, že rychlost reakce $H_2 + Br_2 \longrightarrow 2HBr$ se řídí rovnicí
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x)(b - x)^{\frac{1}{2}},$$
kde $x = [\mathrm{HBr}]$, $a = [H_2]$ a $b = [Br_2]$. Najděte funkci $x(t)$ v případě, že koncentrace obou vstupních látek jsou shodné a víte-li, že $x(0) = 0$.

8. Roztok glukózy je nitrožilně podáván do krevního oběhu konstantní rychlostí r. Jak je glukóza přidávána, tak se mění na další látky a ubývá v krvi rychlostí, která je úměrná její koncentraci. Proto je model pro koncentraci $C = C(t)$ roztoku glukózy v krevním oběhu popsán diferenciální rovnicí:
$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = r - kC,$$
kde k je nějaká kladná konstanta. Řešením rovnice najděte funkci $C(t)$ víte-li, že $C(0) = C_0$.

Výsledky:

1. a) ano, b) ano, c) ano, $y = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - x^2}}$, d) ano, $y = \frac{3+\mathrm{e}^t}{3-\mathrm{e}^t}$
2. a) $y = -\frac{1}{x+C}$ a $y = 0$, b) $y = C\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$, c) $C = (y^2+1)x^2$, d) $\ln|xy| + x - y = C$, e) $y^2 = -x^2 + 2\ln|x| + C$, f) $y^2 = \sqrt[3]{9(t\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^t + C)^2} - 1$.
3. a) $y = x$, b) $y = \mathrm{tg}\,(x-1)$, c) $y = \frac{1}{1-x}$, d) $\sqrt{2}\cos y = \cos x$, e) $y^2 = \ln(\mathrm{e}^x + 1)$, f) $y = 1$.
4. a) $y = C\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1$, b) $y = C\mathrm{e}^{-x^3} + 2$, c) $y = C\mathrm{e}^{-2x} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^x$, d) $y = (C+x)(1+x^2)$, e) $y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)\mathrm{e}^{-x^4}$, f) $y = (\sin x + C)\mathrm{e}^{-x^2}$.
5. a) $y = \frac{\mathrm{e}^x + 1 - \mathrm{e}}{x}$, b) $y = \frac{1}{2}(x^2 + x^3)$, c) $y = x - 1 + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$, d) $y = \frac{x}{x+1}(x - 1 + \ln|x|)$.
6. Návod: Je-li množství dané látky a a množství vznikající látky $x(t)$ v čase t, dostaneme pro funkci $x(t)$ rovnici:
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a-x) \qquad (k > 0),$$
kde k je rychlostní konstanta a $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ je rychlost vzniku látky.
Výsledek: Množství vznikající látky je $x = a(1 - \mathrm{e}^{-kt})$, pro $t \to \infty$ je $x \to a$.
7. $x(t) = a - \frac{4}{(kt + \frac{2}{\sqrt{a}})^2}$
8. $C(t) = (C_0 - \frac{r}{k})\mathrm{e}^{-kt} + \frac{r}{k}$

Kapitola 2

Diferenciální rovnice druhého řádu

Dalším důležitým typem diferenciálních rovnic jsou lineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{2.1}$$

kde p, q jsou reálná čísla a $f(x)$ je spojitá funkce. Je-li $f(x) \equiv 0$ (říkáme, že je identicky rovna nule), nazývá se rovnice (2.1) *homogenní.* V opačném případě, tj. $f(x) \not\equiv 0$, se nazývá *nehomogenní.* S těmito rovnicemi se často setkáváme například při použití druhého Newtonova zákona.

Příklad 2.1. Rovnice

$$\text{a)} \quad y'' = y, \qquad \text{b)} \quad y'' + y = 0, \qquad \text{c)} \quad y'' = 0$$

jsou diferenciální rovnice druhého řádu.

V případě a) je řešením funkce $y = \mathrm{e}^x$, ale také funkce $y = \mathrm{e}^{-x}$. Navíc můžeme ověřit, že všechny funkce tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$, kde C_1, C_2 jsou libovolné konstanty, jsou řešeními této rovnice.

V případě b) je řešením rovnice například funkce $y = \sin x$, protože $(\sin x)'' + \sin x = 0$ pro všechna x. Podobně řešením této rovnice je také funkce $y = \cos x$ a opět lze ověřit, že všechny funkce tvaru $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$ jsou jejími řešeními.

V případě c) můžeme rovnici řešit postupnou integrací: Integrací rovnice $(y')' = 0$ plyne $y'(x) = C_1$ a odtud další integrací dostaneme $y(x) = C_1 x + C_2$, kde C_1, C_2 jsou konstanty.

2.1 Počáteční úloha

Podobně jako u diferenciálních rovnic prvního řádu potřebujeme v praktických úlohách nalézt řešení diferenciální rovnice pro $x \geq 0$, které splňuje dané počáteční podmínky.

K tomu, aby měla rovnice (2.1) právě jedno řešení, je třeba předepsat dvě počáteční podmínky

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1.$$

Příklad 2.2. Řešte počáteční úlohu

$$\text{a)} \quad y'' = \mathrm{e}^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \qquad \text{b)} \quad y'' = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1.$$

Řešení. a) Postupně dostáváme

$$y' = \int \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1,$$

$$y = \int (\mathrm{e}^x + C_1)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C_1 x + C_2.$$

Řešením naší rovnice bez počáteční podmínky jsou všechny funkce, které dostaneme z předpisu $y = \mathrm{e}^x + C_1 x + C_2$ volbou konstant C_1 a C_2.
Hledáme-li řešení, které splňuje počáteční podmínky $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, spočteme $y' = \mathrm{e}^x + C_1$ a dosadíme za proměnné x a y do funkčního předpisu a do předpisu pro první derivaci funkce:

$$1 = \mathrm{e}^0 + 0 \cdot C_1 + C_2, \qquad 0 = \mathrm{e}^0 + C_1.$$

Odtud $C_2 = 0$ a $C_1 = -1$ a řešením počáteční úlohy je funkce $y = \mathrm{e}^x - x$.
b) Postupujeme obdobně jako v předchozím případě

$$y' = \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C_1,$$

$$y = \int (\sin x + C_1)\,\mathrm{d}x = -\cos x + C_1 x + C_2.$$

Proto řešením rovnice bez počáteční podmínky jsou všechny funkce, které dostaneme z předpisu $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ volbou konstant C_1 a C_2.
Máme-li nalézt řešení počáteční úlohy, tak podobně jako v předchozím případě, dosadíme do funkčního předpisu a do předpisu pro první derivaci:

$$1 = -\cos 0 + 0 \cdot C_1 + C_2, \qquad 1 = \sin 0 + C_1.$$

Odtud dostáváme $C_1 = 1$ a $C_2 = 2$. Řešením počáteční úlohy je funkce

$$y = -\cos x + x + 2.$$

▲

2.2 Homogenní rovnice

Uvažujme rovnici (2.1), kde $f(x) \equiv 0$, tj. rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.2}$$

kde p, q jsou reálná čísla.
▷ **Vlastnosti homogenní rovnice.**
Jsou-li dvě funkce y_1, y_2 řešením rovnice (2.2), pak je také funkce $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ řešením této rovnice. Právě pro tuto vlastnost se rovnice (2.1) nazývá *lineární diferenciální rovnice.*
Dvě řešení y_1, y_2 rovnice (2.2) jsou *lineárně nezávislá*, jestliže determinant

$$w(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový, tj. $w(x) \neq 0$. Tento determinant se nazývá *wronskián*. Dá se ukázat, že wronskián dvou řešení je buď identicky nula nebo je různý od nuly pro všechna x. Je-li $p = 0$, pak $w(x)$ je konstanta.

Jsou-li funkce y_1, y_2 lineárně nezávislá řešení rovnice (2.2), pak libovolné řešení této rovnice dostaneme lineární kombinací těchto řešení, tj.

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Toto řešení nazýváme *obecné řešení* rovnice (2.2).

Příklad 2.3. Ověřte, že následující funkce jsou lineárně nezávislé

$$\text{a)} \quad \mathrm{e}^x \quad \text{a} \quad \mathrm{e}^{-x}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \cos x \quad \text{a} \quad \sin x.$$

Řešení. a) Vypočteme wronskián těchto funkcí. Dostaneme

$$w(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{-x} \\ \mathrm{e}^x & -\mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = -\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = -2 \neq 0.$$

V úvodu jsme ukázali, že funkce $y_1 = \mathrm{e}^x$ a $y_2 = \mathrm{e}^{-x}$ jsou řešeními rovnice $y'' - y = 0$. Protože jejich wronskián je různý od nuly, jsou tato řešení dokonce lineárně nezávislá řešení této rovnice a tvoří tak její obecné řešení tvaru $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$.

b) Wronskián těchto funkcí je

$$w(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Jelikož je wronskián různý od nuly, jedná se o lineárně nezávislé funkce.

▲

▷ **Nalezení řešení homogenní rovnice.**

Řešení rovnice (2.2) hledáme ve tvaru $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$, kde λ je vhodné číslo. Vypočteme

$$y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}, \quad y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x},$$

a dosadíme do rovnice (2.2)

$$\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + p\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} + q\mathrm{e}^{\lambda x} = 0.$$

Protože $\mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$, musí λ splňovat rovnici

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{2.3}$$

Tato kvadratická rovnice se nazývá *charakteristická rovnice* diferenciální rovnice (2.2).

Mohou nastat tyto případy:

(1) Kvadratická rovnice má *dva reálné různé kořeny* λ_1, λ_2. Pak řešením homogenní rovnice jsou funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$

a obecné řešení je
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}. \tag{2.4}$$

(2) Kvadratická rovnice má *jeden dvojnásobný kořen* λ. Pak řešením homogenní rovnice jsou funkce
$$y_1 = e^{\lambda x}, \quad y_2 = x e^{\lambda x}$$
a obecné řešení je
$$y = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}. \tag{2.5}$$

(3) Kvadratická rovnice má *dva komplexně sdružené kořeny* $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$. Pak řešením homogenní rovnice je například funkce
$$y = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x},$$
která je komplexní funkcí. Použijeme-li Eulerův vztah
$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \sin\beta x,$$
dostaneme řešení homogenní rovnice ve tvaru
$$y = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) = e^{\alpha x}\cos\beta x + i e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
Lze ukázat, že tato funkce je řešením homogenní rovnice (2.2) právě tehdy, když je řešením této rovnice reálná a imaginární část této funkce. Proto řešením homogenní rovnice jsou funkce
$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x.$$
Obecné řešení pak je
$$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x. \tag{2.6}$$
Všimněme si, že stejný výsledek dostaneme i pro druhý kořen $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Příklad 2.4. Řešte následující homogenní rovnice

a) $y'' + y' - 6y = 0$ b) $y'' - y' = 0$

c) $y'' + 2y' + 1 = 0$ d) $y'' - 4y' + 85y = 0$

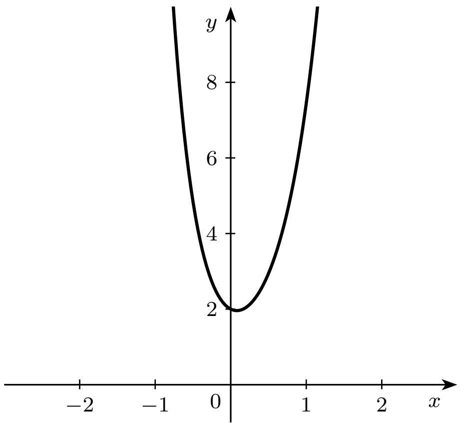
Řešení. a) Napíšeme charakteristickou rovnici
$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Její kořeny jsou
$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}, \quad \text{tj.} \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3.$$

Oba kořeny jsou reálné a jednoduché, každému proto přísluší jedno řešení
$$y_1 = e^{2x}, \qquad y_2 = e^{-3x}$$

a obecné řešení je pak
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

Zvolíme-li $C_1 = C_2 = 1$, dostaneme řešení $y = e^{2x} + e^{-3x}$, které je znázorněno na obrázku 2.1.



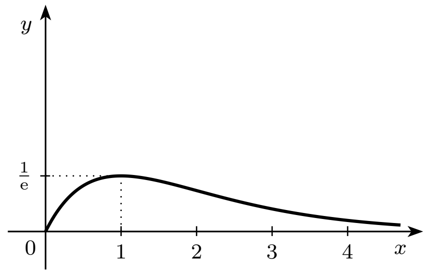
Obrázek 2.1: Řešení rovnice $y'' + y' - 6 = 0$ s volbou $C_1 = C_2 = 1$

b) Charakteristická rovnice je
$$\lambda^2 - \lambda = 0$$
$$\lambda(\lambda - 1) = 0.$$
Její kořeny jsou $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$. Oba jsou jednoduché a reálné, řešením jsou funkce
$$y_1 = \mathrm{e}^{0x} = 1 \qquad y_2 = \mathrm{e}^x$$
a obecné řešení rovnice je tak tvaru
$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^x.$$

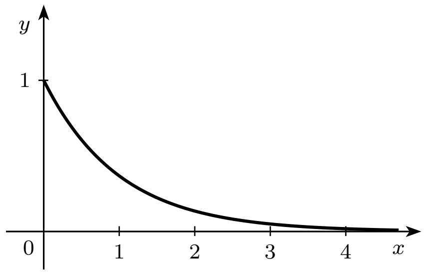
c) Charakteristická rovnice je
$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$$
$$(\lambda + 1)^2 = 0$$
a má jeden dvojnásobný kořen $\lambda_{1,2} = -1$, kterému odpovídá dvojice řešení
$$y_1 = \mathrm{e}^{-x} \qquad y_2 = x\mathrm{e}^{-x}.$$
Tyto funkce jsou pro $x \geq 0$ znázorněny na obrázku 2.2. Obecné řešení rovnice je tvaru
$$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x}.$$

d) Charakteristická rovnice je
$$\lambda^2 - 4\lambda + 85 = 0.$$
Její kořeny jsou
$$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 340}}{2} = \frac{4 \pm 18i}{2} = 2 \pm 9i.$$
K této dvojici komplexně sdružených kořenů ($\alpha = 2, \beta = 9$) přísluší řešení
$$y_1 = \mathrm{e}^{2x}\cos 9x \qquad y_2 = \mathrm{e}^{2x}\sin 9x.$$
Funkce $y = \mathrm{e}^{2x}\sin 9x$ je znázorněna na obrázku 2.3. Obecné řešení je
$$y = C_1\mathrm{e}^{2x}\cos 9x + C_2\mathrm{e}^{2x}\sin 9x.$$

▲



(a) Řešení $y = x\mathrm{e}^{-x}$



(b) Řešení $y = \mathrm{e}^{-x}$

Obrázek 2.2: Různá řešení rovnice $y'' + 2y' + 1 = 0$

Příklad 2.5. Napište lineární diferenciální rovnici druhého řádu, která má řešení

a) $y_1 = e^{2x}, \quad y_2 = e^{-3x}$; b) $y_1 = e^x \sin x$.

Řešení. a) Z podoby řešení plyne, že charakteristická rovnice hledané diferenciální rovnice musí mít za kořeny čísla $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = -3$. Charakteristická rovnice je tak například rovnice tvaru

$$(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0.$$

Tato rovnice je příslušná diferenciální rovnici

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

b) Z tvaru řešení plyne, že charakteristická rovnice musí mít kořen $\lambda_1 = 1 + i$. Jelikož se jedná o kvadratickou rovnici s reálnými koeficienty, druhé řešení musí být komplexně sdružené, proto $\lambda_2 = 1 - i$. Dostáváme tak charakteristickou rovnici tvaru

$$(\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = 0.$$

Roznásobením, případně úpravou podle vzorce $a^2 - b^2$, a využitím $i^2 = -1$ dostaneme

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

Tato rovnice je příslušná diferenciální rovnici

$$y'' - 2y' + 2 = 0.$$

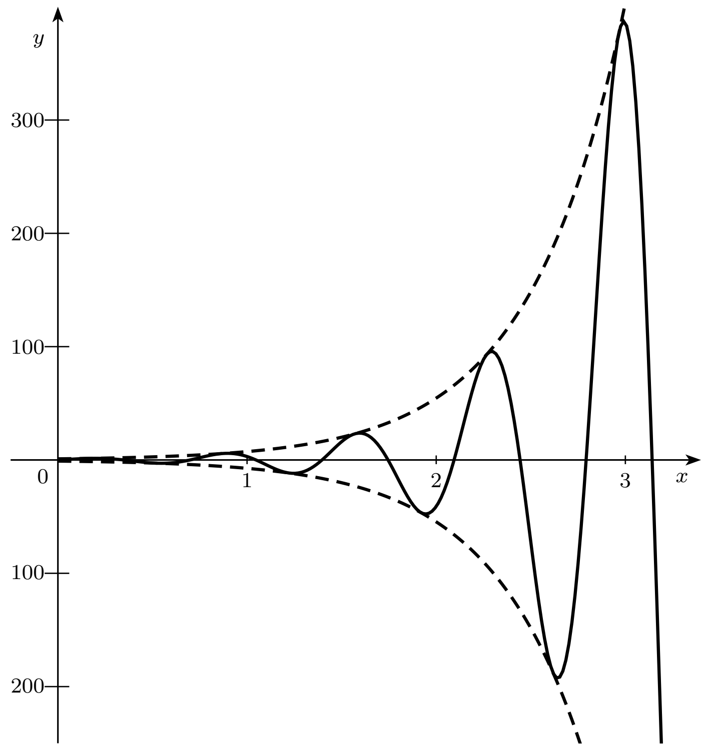
▲

2.3 Nehomogenní rovnice

Uvažujme nehomogenní diferenciální rovnici

$$y'' + py' + qy = f(x). \tag{2.7}$$

Podobně jako u diferenciální rovnice prvního řádu platí následující věta:



Obrázek 2.3: Graf funkce $y = \mathrm{e}^{2x} \sin 9x$

Věta 2.6. *Nechť* $y_0(x)$ *je obecné řešení homogenní rovnice* (2.2) *a* $y_p(x)$ *je partikulární řešení nehomogenní rovnice* (2.7). *Pak obecné řešení této nehomogenní rovnice je*

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x).$$

Otázkou tedy je, jak najdeme partikulární řešení nehomogenní rovnice. Univerzální metodou je metoda variace konstanty, která je však u rovnic druhého řádu složitější (podrobnosti viz [7]). Ve speciálních případech, kde je funkce $f(x)$ „jednoduchá“, je výhodná metoda neurčitých koeficientů, kdy hledáme řešení v předepsaném tvaru. Ukažme si dva případy:

1) Funkce $f(x)$ je polynom stupně n.
   a) Jestliže číslo $\lambda = 0$ není kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Tyto koeficienty určíme dosazením tohoto polynomu a jeho derivací do rovnice.
   b) Jestliže číslo $\lambda = 0$ je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = xQ(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty.
   c) Jestliže číslo $\lambda = 0$ je dvojnásobným kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = x^2 Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Všimněme si, že tato situace nastane právě, když $p = q = 0$ v (2.1) a řešení této rovnice vede na dvojnásobnou integraci funkce $f(x)$.
2) Funkce $f(x) = P(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $P(x)$ je polynom stupně n.

a) Jestliže číslo α není kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Tyto koeficienty určíme dosazením tohoto polynomu a jeho derivací do rovnice.

b) Jestliže číslo α je jednoduchým kořenem charakteristické rovnice (2.3), pak má nehomogenní rovnice partikulární řešení tvaru $y_0 = xQ(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$, kde $Q(x)$ je polynom stupně n s neznámými koeficienty. Podobně pro dvojnásobný kořen uvažujeme řešení $y_0 = x^2Q(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$

Příklad 2.7. Najděte obecné řešení rovnice

a) $y'' - 2y' + 2y = 2x$ b) $y'' - y' = 2(1 - x)$

c) $2y'' + y' - y = 2\mathrm{e}^x$ d) $y'' - 3y' + 2y = x\mathrm{e}^{-x}$

Řešení. a) Homogenní rovnice je

$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Příslušná charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

má dvojici komplexních kořenů $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Obecné řešení homogenní rovnice je tak

$$y_0 = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right).$$

Jelikož 0 není kořenem charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení $y_p(x)$ ve tvaru $y_p(x) = P(x)$, kde $P(x)$ je polynom stejného stupně jako polynom na pravé straně nehomogenní rovnice, proto platí

$$y_p(x) = Ax + B, \qquad y_p'(x) = A, \qquad y_p''(x) = 0.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$0 - 2A + 2(Ax + B) = 2x$$

$$2Ax - 2A + 2B = 2x.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 dostaneme $A = 1$ a $B = 1$. Odtud $y_p(x) = x + 1$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = \mathrm{e}^x \left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + x + 1.$$

b) Homogenní rovnice je

$$y'' - y' = 0$$

K ní příslušná charakteristická rovnice má tvar

$$\lambda^2 - \lambda = 0.$$

Tato rovnice má dva reálné jednoduché kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 1$. Obecné řešení homogenní rovnice je tak

$$y_0 = C_1 + C_2\mathrm{e}^x.$$

Jelikož je $\lambda = 0$ je jednoduchý kořen charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru $y_p(x) = xP(x)$, kde $P(x)$ je polynom stejného stupně jako polynom na pravé straně nehomogenní rovnice, proto platí

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx, \qquad y_p'(x) = 2Ax + B, \qquad y_p''(x) = 2A.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$2A - (2Ax + B) = -2x + 2$$

$$-2Ax + 2A - B = -2x + 2.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 dostaneme $A = 1$ a $B = 0$. Odtud $y_p(x) = x^2$. Obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C_1 + C_2\mathrm{e}^x + x^2.$$

c) Příslušná homogenní rovnice je

$$2y'' + y' - y = 0.$$

Její charakteristická rovnice má tvar

$$2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0,$$

a kořeny jsou $\lambda_1 = -1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{2}$. Obecné řešení homogenní rovnice je proto

$$y_0 = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}.$$

Protože číslo $\lambda = 1$ není kořen charakteristické rovnice, předpokládáme partikulární řešení ve tvaru $y(x) = A\mathrm{e}^x$. Platí

$$y_p(x) = A\mathrm{e}^x, \qquad y_p'(x) = A\mathrm{e}^x, \qquad y_p''(x) = A\mathrm{e}^x.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$2A\mathrm{e}^x + A\mathrm{e}^x - A\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x$$

$$2A\mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^x.$$

Vidíme, že $A = 1$, odtud $y_p(x) = \mathrm{e}^x$ a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + \mathrm{e}^x.$$

d) Homogenní rovnice je tvaru

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

příslušná charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

a má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice je proto

$$y_0 = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x}.$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha = -1$ není řešením charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení $y_p(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{-x}$. Platí

$$y_p(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{-x},$$

$$y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-x} - (Ax + B)\mathrm{e}^{-x} = (-Ax + A - B)\mathrm{e}^{-x},$$

$$y_p''(x) = -A\mathrm{e}^{-x} - (-Ax + A - B)\mathrm{e}^{-x} = (Ax - 2A + B)\mathrm{e}^{-x}.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$(Ax - 2A + B)\mathrm{e}^{-x} - 3(-Ax + A - B)\mathrm{e}^{-x} + 2(Ax + B)\mathrm{e}^{-x} = x\mathrm{e}^{-x}$$

a po úpravě

$$6Ax - 5A + 6B = x.$$

Porovnáním koeficientů u x^1 a x^0 dostaneme $A = \frac{1}{6}$ a $B = \frac{5}{36}$. Odtud

$$y_p(x) = \frac{1}{36}(6x + 5)\mathrm{e}^{-x}$$

a obecné řešení nehomogenní rovnice je

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \frac{1}{36}(6x + 5)\mathrm{e}^{-x}.$$

▲

Příklad 2.8. Najděte řešení počáteční úlohy

a) $y'' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \ y'(0) = 1$ b) $y'' - 3y' + 2y = 3\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1$

Řešení. a) Charakteristická rovnice je tvaru

$$\lambda^2 - 4 = 0$$

a její kořeny jsou $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Obecné řešení je tak

$$y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

Abychom mohli dosadit počáteční podmínky spočítáme

$$y' = 2C_1 \mathrm{e}^{2x} - 2C_2 \mathrm{e}^{-2x}.$$

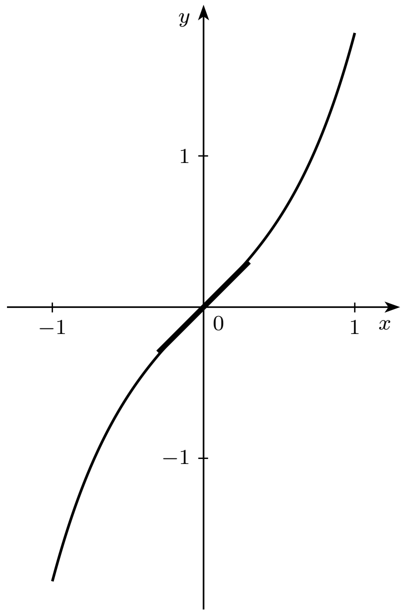
Dosadíme počáteční podmínky a dostaneme soustavu rovnic

$$0 = C_1 + C_2 \qquad 1 = 2C_1 - 2C_2,$$

jejíž řešení je $C_1 = \frac{1}{4}$ a $C_2 = -\frac{1}{4}$. Řešením počáteční úlohy je tak funkce

$$y = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}.$$

Graf tohoto řešení včetně znázornění počáteční podmínky je na obrázku 2.4.



Obrázek 2.4: Graf funkce $y = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}$

b) Nejprve určeme obecné řešení homogenní rovnice

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Její charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 2$. Obecné řešení homogenní rovnice je

$$y_0 = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

Protože $\alpha = 2$ je řešením charakteristické rovnice, hledáme partikulární řešení nehomogenní rovnice ve tvaru $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$. Platí

$$y_p'(x) = A\mathrm{e}^{2x} + 2Ax\mathrm{e}^{2x} = (A\ + 2Ax)\mathrm{e}^{2x}, \quad y_p''(x) = 2A\mathrm{e}^{2x} + 2(A + 2Ax)\mathrm{e}^{2x}.$$

Funkci $y_p(x)$ a její derivace dosadíme do nehomogenní rovnice a dostáváme

$$4A\mathrm{e}^{2x} + 4Ax\mathrm{e}^{2x} - 3(A + 2Ax)\mathrm{e}^{2x} + 2Ax\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x}$$

a po roznásobení a sečtení

$$A\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x}.$$

Odtud vidíme, že $A = 3$, a proto $y_p(x) = 3x\mathrm{e}^{2x}$. Obecné řešení nehomogenní rovnice pak je

$$y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + 3x\mathrm{e}^{2x}.$$

Nyní vypočítáme

$$y' = C_1\mathrm{e}^{x} + 2C_2\mathrm{e}^{2x} + 3\mathrm{e}^{2x} + 6x\mathrm{e}^{2x}$$

a dosadíme počáteční podmínky

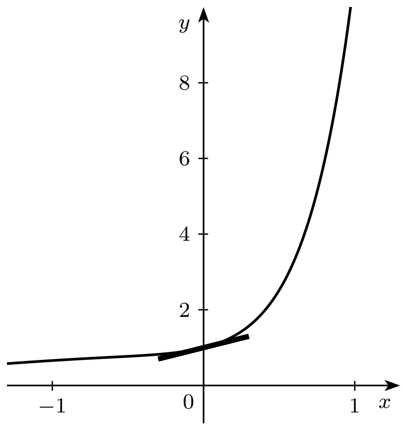
$$1 = C_1 e^0 + C_2 e^0 + 0, \quad \text{tj.} \quad C_1 + C_2 = 1,$$

$$1 = C_1 e^0 + 2C_2 e^0 + 3e^0 + 0, \quad \text{tj.} \quad C_1 + 2C_2 = -2.$$

Řešení této soustavy rovnic je $C_1 = 4$ a $C_2 = -3$. Řešením dané počáteční úlohy je tak funkce

$$y = 4e^x - 3e^{2x} + 3xe^{2x}$$

▲



Obrázek 2.5: Graf funkce $y = 4e^x - 3e^{2x} + 3xe^{2x}$

2.4 Okrajová úloha

V praxi někdy potřebujeme nalézt řešení tzv. *okrajové úlohy*, tj. chceme nalézt řešení diferenciální rovnice splňující jisté podmínky v krajních bodech intervalu. Uvažujme okrajovou úlohu

$$y'' + \alpha y = 0, \qquad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{2.8}$$

Chceme určit číslo α tak, aby existovalo řešení $y \not\equiv 0$ a toto řešení určit. Postupujeme analogicky jako při řešení počáteční úlohy, tj. nalezneme obecné řešení rovnice a z okrajových podmínek určíme hodnotu α a řešení y. Na rozdíl od počáteční úlohy nemáme zajištěno, že bude existovat právě jedno řešení $y \not\equiv 0$. Okrajová úloha může mít i nekonečně mnoho řešení, případně jen *triviální řešení* $y \equiv 0$.

Dá se ukázat, že v případě, kdy má okrajová úloha nekonečně mnoho řešení, tvoří tato řešení posloupnost funkcí $y_n(x)$. Tyto funkce se nazývají *vlastní funkce* a odpovídající hodnoty α_n se nazývají *vlastní čísla*.

Řešme nyní úlohu (2.8). Obecné řešení rovnice $y'' + \alpha y = 0$ vypadá následovně

$$\begin{aligned} \alpha < 0: &\qquad y = C_1 e^{\sqrt{\alpha}x} + C_2 e^{-\sqrt{\alpha}x}, \\ \alpha = 0: &\qquad y = C_1 x + C_2, \\ \alpha > 0: &\qquad y = C_1 \cos\sqrt{\alpha}x + C_2 \sin\sqrt{\alpha}x. \end{aligned}$$

Pro $\alpha \leq 0$ existuje zřejmě jen triviální řešení úlohy (2.8). Uvažujme tedy $\alpha > 0$ a dosaďme do obecného řešení okrajové podmínky, dostaneme tak soustavu rovnic

$$0 = C_1, \qquad 0 = C_2 \sin \sqrt{\alpha}\pi.$$

Protože hledáme netriviální řešení, musí být $C_2 \neq 0$. Druhá rovnice bude splněna pouze v případě, že

$$\sin \sqrt{\alpha}\pi = 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha}\pi = k\pi \Rightarrow \alpha = k^2.$$

Tedy čísla

$$\alpha_k = k^2, \qquad k \in \mathbb{N}$$

jsou vlastní čísla okrajové úlohy a pro každé α_k má úloha nekonečně mnoho řešení

$$y_k = C \sin kx, \qquad C \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Poznámka 2.9. Vlastní čísla okrajové úlohy úzce souvisí s řešitelností nehomogenní okrajové úlohy

$$y'' + \alpha y = f(x), \qquad y(0) = y(a) = 0.$$

Dá se ukázat, že tato úloha je jednoznačně řešitelná právě tehdy, když α není vlastní číslo příslušného homogenního problému. V případě, že α je vlastní číslo příslušného homogenního problému, má úloha nekonečně mnoho řešení právě tehdy, když pro vlastní funkci $y(x)$ platí

$$\int_0^a y(x) f(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Pokud toto neplatí nemá okrajová úloha žádné řešení.

Využití můžeme ilustrovat na příkladu z kvantové mechaniky.

Příklad 2.10. Podle kvantové mechaniky je pohyb částice za jistých omezení popsán okrajovou úlohou

$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2\psi, \qquad \psi(0) = \psi(a) = 0,$$

kde ψ je vlnová funkce částice, x je prostorová proměnná, $a > 0$ je konstanta, $\alpha^2 = \left(\frac{2m}{h^2}\right) E$, $m > 0$ je hmotnost, h je Planckova konstanta a $E > 0$ energie částice.

Najděte netriviální řešení ψ této okrajové úlohy. Pro které hodnoty E tato řešení existují?

Řešení. Charakteristická rovnice je

$$\lambda^2 + \alpha^2 = 0,$$

odkud $\lambda = \pm\alpha i$. Obecné řešení je tvaru

$$\psi(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x,$$

kde A, B jsou konstanty. Nyní najdeme konstanty A, B tak, aby byly splněny okrajové podmínky. Pro $x = 0$ dostaneme

$$A \sin 0 + B \cos 0 = 0 \quad \text{tj.} \quad B = 0.$$

Pro $x = a$ dostaneme

$$A \sin \alpha a + B \cos \alpha a = 0 \quad \text{tj.} \quad A \sin \alpha a = 0.$$

Kdyby $A = 0$, pak také $\psi(x) \equiv 0$ a rovnice by měla jen triviální řešení. Proto

$$\sin \alpha a = 0 \Rightarrow \alpha a = \pm n\pi, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tak vlastní čísla

$$\alpha_n = \pm \frac{n\pi}{a}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

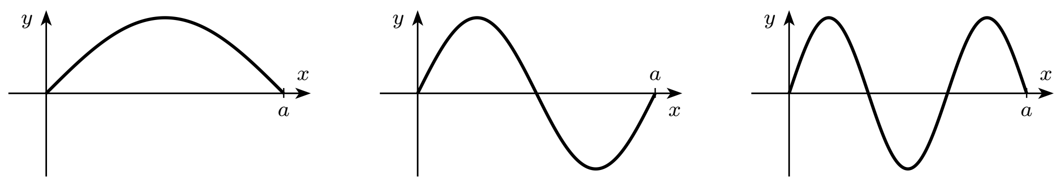
Řešením okrajové úlohy je posloupnost funkcí

$$\psi_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi x}{a}, \qquad n \in \mathbb{N}, A_n \in \mathbb{R}.$$

Tato řešení odpovídají energii

$$E_n = \alpha^2 \frac{h^2}{2m} = \frac{n^2\pi^2}{a^2} \frac{h^2}{2m}.$$

▲



(a) Řešení pro $n = 1$ (b) Řešení pro $n = 2$ (c) Řešení pro $n = 3$

Obrázek 2.6: Různá řešení okrajové úlohy 2.10

Cvičení

1. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ b) $y'' + 16y = 0$

c) $y'' + 8y' + 16y = 0$ d) $y'' - 6y' + 13y = 0$

e) $y'' - 16y = 0$ f) $y'' - 4y' + 5y = 0$

2. Najděte obecné řešení rovnic:

a) $y'' + 4y' - 5y = 1,$ b) $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-2x},$

c) $y'' + y = x^3,$ d) $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1,$

e) $y'' + 3y' + 2y = (20x + 29)\mathrm{e}^{3x},$ f) $y'' + 4y' + 4 = x\mathrm{e}^{2x}.$

3. Najděte řešení počáteční úlohy:

   a) $y'' + 2y' + y = 0, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -1,$

   b) $3y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = -1,$

   c) $y'' - 4y' + 4y = 2 - x, \quad y(0) = y'(0) = 1,$

   d) $y'' - 2y' + y = 1 + x, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = -3.$

4. Působíme-li elektrickým polem na roztok elektrolytu, začnou se ionty působením elektrostatických sil pohybovat směrem k elektrodám. Zároveň je však rychlost pohybu iontů brzděna přímo úměrně třecími silami. Podle Druhého Newtonova zákona je pohyb kationtu s elektrickým nábojem $q > 0$ a hmotností $m > 0$ podél osy x popsán následující počáteční úlohou
$$x''(t) + \frac{k}{m}x'(t) = \frac{q}{m}E, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0,$$
kde $t \geq 0$ je čas, $k \geq 0$ je koeficient úměrnosti třecích sil, $E \geq 0$ je síla homogenního elektrického pole a x_0, v_0 jsou počáteční pozice a rychlost iontu. (Poslední 4 hodnoty považujeme za konstanty.) Najděte řešení počáteční úlohy pro $0 \leq t \leq \infty$.

5. Určete řešení okrajové úlohy
$$\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2} = -\alpha^2\psi, \qquad \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(0) = 0, \quad \psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Výsledky:

1. a) $y = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}$, b) $y = C_1\cos 4x + C_2\sin 4x$,
   c) $y = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2x\mathrm{e}^{-4x}$, d) $y = \mathrm{e}^{3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$,
   e) $y = C_1\mathrm{e}^{4x} + C_2\mathrm{e}^{-4x}$, f) $y = C_1\mathrm{e}^{2x}\cos x + C_2\mathrm{e}^{2x}\sin x$.
2. a) $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-5x} - \frac{1}{5}$, b) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x}$,
   c) $y = C_1\sin x + C_2\cos x + x^3 - 6x$, d) $y = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$,
   e) $y = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + (x+1)\mathrm{e}^{3x}$, f) $y = (C_1 + C_2x)\mathrm{e}^{-2x} + \left(\frac{x}{16} - \frac{1}{32}\right)\mathrm{e}^{2x}$.
3. a) $y = 2\mathrm{e}^{-x} + x\mathrm{e}^{-x}$, b) $y = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{-\frac{4}{3}x}$,
   c) $y = \frac{1}{4}(3\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^{2x} - x + 1)$, d) $y = x + 3 - \mathrm{e}^{x}(1 + 3x)$.
4. $x(t) = x_0 + \frac{qE}{k}t + \left(\frac{mv_0}{k} - \frac{qmE}{k^2}\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right)$
5. Řešením jsou funkce $\psi_n(x) = A_n\cos(2n+1)x$ pro $\alpha_n = (2n+1)^2$, kde $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Kapitola 3

Funkce více proměnných

3.1 Definiční obor funkce a graf funkce

Obsahem této kapitoly je zavedení funkce více proměnných. Základní úlohou této kapitoly je určení definičního oboru a nakreslení grafu funkce. Tyto úlohy vedou na úlohy z analytické geometrie v rovině, které využijeme v dalších kapitolách.

Definice 3.1. Nechť je dána množina $D \subseteq \mathbb{R}^2$. Předpis f, který každému bodu roviny $[x, y] \in D$ přiřazuje právě jedno $z \in \mathbb{R}$, nazýváme *funkcí dvou proměnných.* Tuto funkci označujeme

$$z = f(x, y).$$

Množina D se nazývá *definiční obor* funkce f.

Podobně definujeme funkci tří proměnných $u = f(x, y, z)$ a obecně funkci n-proměnných $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Příklad 3.2. Zobrazte v rovině definiční obor těchto funkcí:

a) $z = \ln(y - x) + \ln(x + y)$, b) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$,
c) $z = x \ln(x - y^2)$, d) $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$.

Řešení. a) Protože logaritmická funkce je definovaná pouze pro kladná čísla, musí platit $y > x$ a $y > -x$. Definiční obor je tak průnik dvou polorovin.

b) Odmocnina má smysl pouze z nezáporného čísla. Odtud plyne

$$9 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \text{tj.} \quad 3^2 \geq x^2 + y^2.$$

Definičním oborem je kruh s počátkem v bodě $[0, 0]$ a poloměrem 3.

c) Daný výraz má smysl, jestliže platí $x > y^2$. Definičním oborem je část roviny omezená parabolou, bez této paraboly.

d) Z vlastností funkce arkussinus plyne podmínka

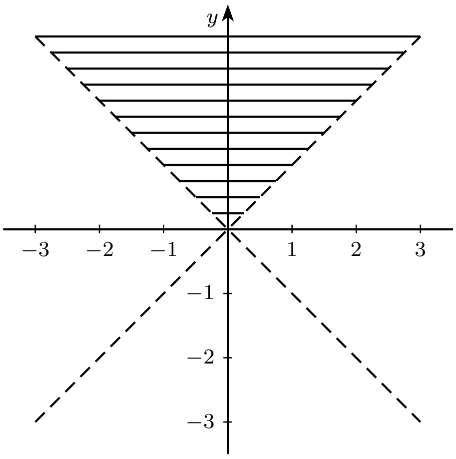
$$-1 \leq x^2 + y^2 - 2 \leq 1.$$

Odtud

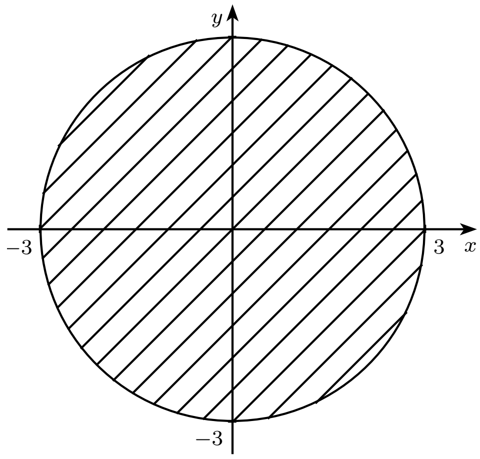
$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 3$$

a definiční obor tvoří body ležící v mezikruží tvořeným dvěma kružnicemi se středem v počátku a poloměry $r_1 = 1$ a $r_2 = \sqrt{3}$.

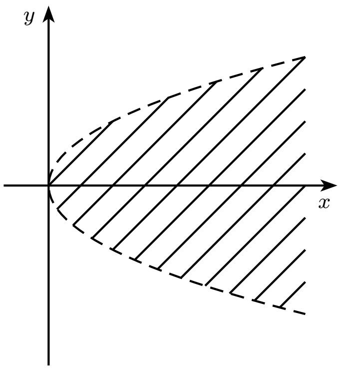
▲



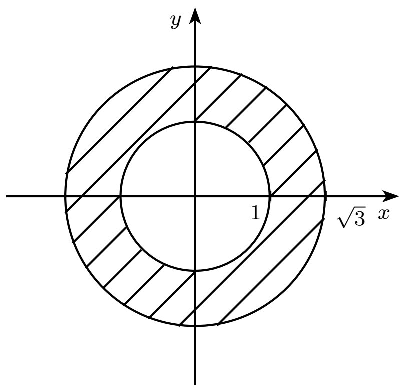
(a) Definiční obor funkce $z = \ln(y - x) + \ln(x + y)$



(b) Definiční obor funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$



(c) Definiční obor funkce $z = x\ln(x - y^2)$



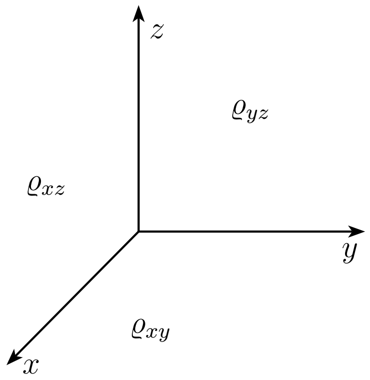
(d) Definiční obor funkce $z = \arcsin(x^2 + y^2 - 2)$

Grafem funkce dvou proměnných je množina bodů v trojrozměrném prostoru, nejčastěji nějaká trojrozměrná plocha, např. rovina, kuželová plocha, parabolická plocha. K získání názorné představy, jaký je tvar této plochy, nám pomohou řezy rovinami $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ (což jsou rovnice souřadných stěn ϱ_{xy}, ϱ_{xz}, ϱ_{yz}).

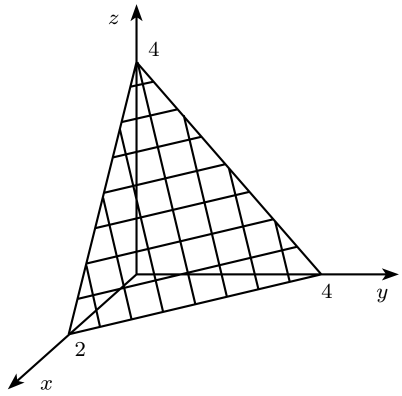
Příklad 3.3. Nakreslete graf funkce $z = 4 - 2x - y$.

Řešení. Položíme-li $y = 0$, dostaneme $z = 4 - 2x$, což je přímka v rovině ρ_{xz}. Podobně pro $x = 0$ dostaneme přímku $z = 4 - y$ a pro $z = 0$ přímku $y = 4 - 2x$. Proto je grafem této funkce rovina, která vytíná na souřadné osách postupně úseky o velikostech 2, 4 a 4. V prvním oktantu je to trojúhelník. ▲

K určení grafu funkce $z = f(x, y)$ se někdy používají *vrstevnice funkce*, což jsou body v rovině se stejnou funkční hodnotou. Chápeme-li graf funkce dvou proměnných jako reliéf krajiny, pak vrstevnice funkce na úrovni c je množina všech bodů s nadmořskou výškou rovnou



(a) Souřadný systém pro funkce dvou proměnných



(b) Graf funkce $z = 4 - 2x - y$

c, tj. náš pojem vrstevnice je totožný s geografickým významem tohoto slova. Matematicky můžeme říct, že vrstevnice jsou křivky popsané rovnicemi $f(x, y) = c$.

Příklad 3.4. Pomocí vrstevnic a řezů rovinami načrtněte v prostoru grafy funkcí:

a) $z = x^2 + y^2$, b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Řešení. a) Provedeme-li řez rovinou $x = 0$, dostaneme křivku $z = y^2$, což je parabola s vrcholem v počátku. Podobně i řezem rovinou $y = 0$ je parabola o rovnici $z = x^2$. Vrstevnice funkce na úrovni $k > 0$ jsou dány rovnicemi

$$k = x^2 + y^2,$$

což jsou kružnice se středem na ose z a poloměrem $\sqrt{k}$. Na základě získaných výsledků můžeme říci, že grafem funkce $z = x^2 + y^2$ je tzv. *rotační paraboloid* s vrcholem v počátku a osou z. Jedná se o plochu, která vznikne rotací paraboly kolem její osy (hlavní osa paraboloidu).

b) V tomto případě je řezem rovinou $x = 0$ funkce $z = \sqrt{4 - y^2}$, což je horní polovina kružnice se středem v počátku a poloměrem 2. Podobně řezem rovinou $y = 0$ je funkce $z = \sqrt{4 - x^2}$, která je opět horní polovinou kružnice se středem v počátku o poloměru 2. Vrstevnice funkce na úrovni $k > 0$ jsou dány rovnicemi

$$k = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad \Leftrightarrow \quad 4 - k^2 = x^2 + y^2,$$

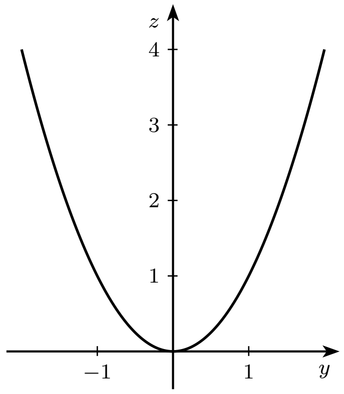
což jsou kružnice se středem na ose z a poloměrem $\sqrt{4 - k^2}$. Proto grafem funkce $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ je horní polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem 2.

▲

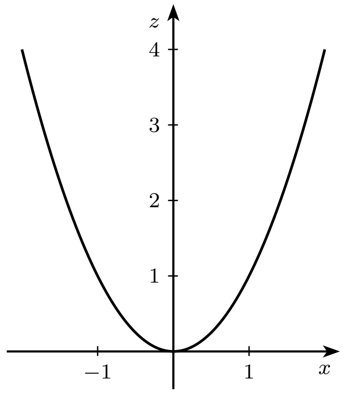
3.2 Limita funkce

S pojmem limita jsme se setkali u funkce jedné proměnné. Připomeňme, že limita popisuje chování funkce v ryzím okolí bodu, v němž limitu určujeme a píšeme

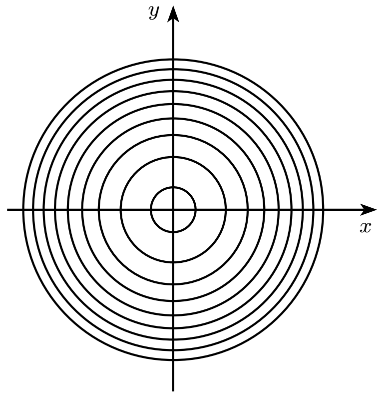
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



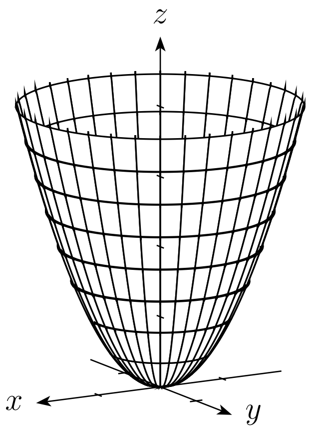
(a) Řez rovinou ϱ_{yz} $(x = 0)$



(b) Řez rovinou ϱ_{xz} $(y = 0)$



(c) Vrstevnice



(d) Graf funkce $z = x^2 + y^2$

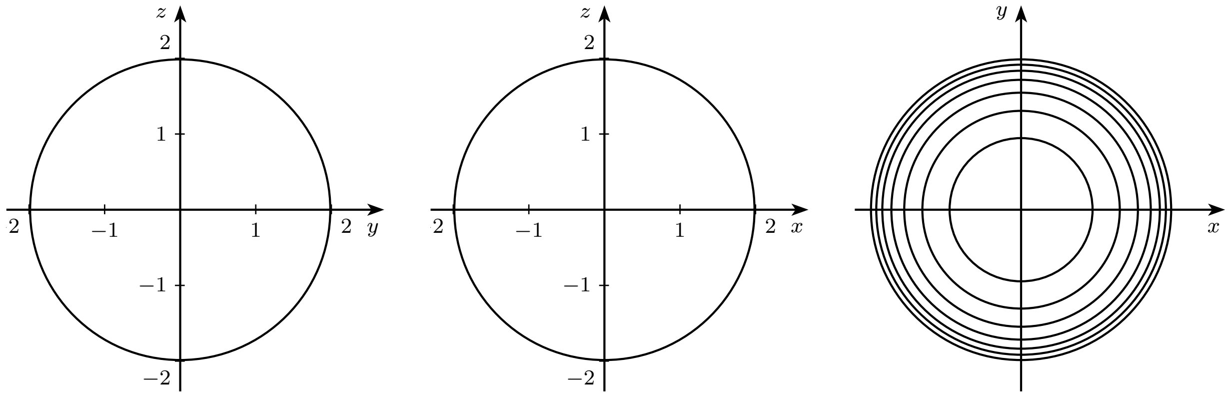
Ryzím okolím bodu x_0 rozumíme okolí kromě tohoto bodu, tj. body splňující $x \in (x_0 - a, x_0) \cup (x_0, x_0 + a)$. Funkce nemůže mít v daném bodě dvě limity. Je-li limita zprava různá od limity zleva, pak funkce nemá v daném bodě limitu.

U funkce dvou proměnných je situace podobná: *Limita popisuje chování funkce v okolí daného bodu kromě tohoto bodu.*

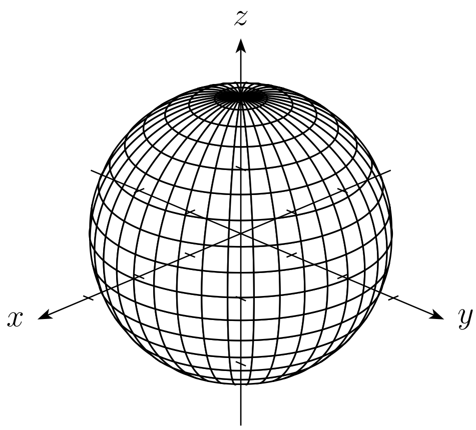
Tento pojem je založen na pojmu okolí bodu. Zásadní rozdíl je v tom, jak vypadá okolí bodu na přímce (ose x) a okolí bodu v rovině. Okolím bodu x_0, který leží na ose x, je interval. Okolím bodu $[x_0, y_0]$, který leží v rovině, je množina bodů, které mají od tohoto bodu vzdálenost menší než nějaké číslo a. Ryzím okolím bodu $[x_0, y_0]$ rozumíme okolí kromě tohoto bodu, tj. body ležící uvnitř kruhu se středem $[x_0, y_0]$ a poloměru a kromě tohoto bodu, tj.

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < a^2.$$

U funkce jedné proměnné se k tomuto bodu můžeme blížit jen po přímce, tj. ze dvou stran (což znamená, že funkce má limitu v bodě, má-li obě jednostranné limity a tyto se sobě rovnají),



(a) Řez rovinou ϱ_{yz} $(x = 0)$ (b) Řez rovinou ϱ_{xz} $(y = 0)$ (c) Vrstevnice



(d) Kulová plocha složená z funkcí $z = \pm\sqrt{4 - x^2 - y^2}$

zatímco u funkce více proměnných je těchto možností nekonečně mnoho; můžeme se blížit k danému bodu po přímkách, po parabolách apod. Existence limity v daném bodě znamená, že *nezáleží* na cestě, po které se k danému bodu blížíme. Naopak dostaneme-li různé hodnoty limity pro různé cesty, znamená to, že limita v daném bodě nemůže existovat.

Příklad 3.5. Vypočtěte limitu funkce $f(x, y) = \frac{x+y+1}{x+y+3}$ v bodě $[1, 0]$.

Řešení. Pokud můžeme souřadnice limitního bodu do příslušného výrazu dosadit (tj. po dosazení neobdržíme neurčitý výraz), je hodnota limity dané funkce rovna funkční hodnotě v tomto bodě. Platí tedy

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x + y + 1}{x + y + 3} = \frac{1}{2}\,.$$

▲

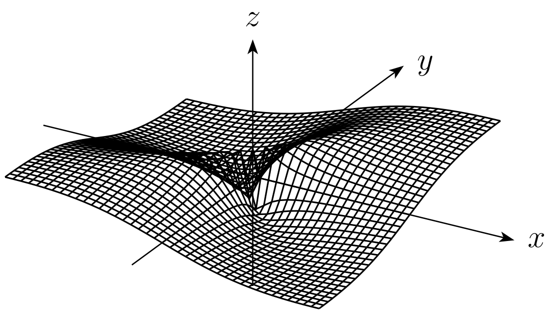
Příklad 3.6. Ukažte, že neexistuje limita funkce $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Řešení. Zvolíme přímky $y = kx$. Tyto přímky procházejí počátkem a jejich body mají tvar $[x, kx]$. Aby se tyto body blížily k počátku, musí se blížit x k nule. Dostaneme

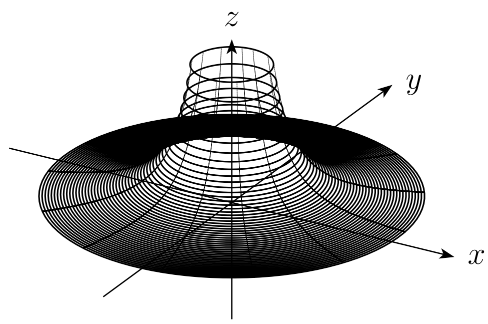
$$\lim_{x\to 0} \frac{xkx}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Výsledek záleží na k, tj. na směrnici přímky, po níž se blížíme k počátku. Proto limita neexistuje. ▲

Počítání limit funkcí dvou a více proměnných je obtížnější než v případě funkcí jedné proměnné, neboť k počítání tzv. neurčitých výrazů (limity typu $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$) nemáme k dispozici žádnou analogii l'Hospitalova pravidla.



(a) Graf funkce $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$



(b) Graf funkce $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

3.3 Spojitost funkce

Rovněž pojem spojitosti funkce více proměnných lze podobně jako pro funkce jedné proměnné definovat pomocí limity funkce.

Funkce f je *spojitá v bodě* $[x_0, y_0]$, jestliže má v tomto bodě vlastní limitu a platí

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Pomocí spojitosti funkce v bodě je definována spojitost funkce na množině $M \subseteq \mathbb{R}^2$.

Příklad 3.7. Funkce $f(x, y) = x^n$ a $g(x, y) = y^m$, kde n, m jsou přirozená čísla, jsou spojité v každém bodě roviny.

Vzhledem k tomu, že spojitost funkce dvou a více proměnných se definuje pomocí pojmu limity funkce stejně jako pro funkci jedné proměnné, obdobně platí věta, že součet, součin a podíl spojitých funkcí je spojitá funkce, a dále platí věta o spojitosti složené funkce.

Příklad 3.8. Funkce $f(x, y) = x^3 + 3x^2 - 3xy + 1$ je spojitá v celé rovině.

Stejně jako pro funkci jedné proměnné platí pro funkci dvou proměnných Weierstrassova věta. Připomeňme, že Weierstrassova věta pro funkce jedné proměnné se týká funkcí spojitých na uzavřeném a ohraničeném intervalu. Před tím než formulujeme analogickou větu pro funkce více proměnných, uveďme několik pojmů.

Hraničním bodem množiny rozumíme bod, jehož libovolné okolí obsahuje jak bod, který do dané množiny patří, tak bod, který do dané množiny bodů nepatří. Množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* množiny. Množina se nazývá *uzavřená*, jestliže obsahuje svou hranici. Množina se nazývá *otevřená*, jestliže s každým jejím bodem do ní patří i nějaké okolí tohoto bodu. Podotkněmě, že pojem otevřená množina není opak uzavřené množiny. Množina se nazývá *ohraničená*, jestliže existuje nějaká kladná konstanta K taková, že vzdálenost dvou libovolných bodů této množiny je menší než K. Množina se nazývá *souvislá*, jestliže každé dva body této množiny lze spojit lomenou čarou, která leží celá uvnitř této množiny. Množinu, která je souvislá a otevřená, nazýváme *oblastí*.

Příkladem uzavřené a ohraničené množiny je kruh $x^2 + y^2 \leq a^2$ (tj. obsahuje hraniční kružnici), nebo obdélník, který obsahuje hraniční úsečky. Kruh, který neobsahuje hraniční kružnici je příkladem oblasti.

Věta 3.9 (Weierstrassova)**.** *Nechť funkce f je spojitá na ohraničené a uzavřené množině $M \subset \mathbb{R}^2$. Pak nabývá na M své nejmenší a největší hodnoty.*

Příklad 3.10. Rozhodněte, zda funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2} & \text{pro}(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{v počátku} \end{cases}$$

nabývá nejmenší a největší hodnotu na množině $M : x^2 + y^2 \leq 1$.

Řešení. Funkce je definovaná ve všech bodech množiny M. Touto množinou je kruh se středem v počátku. Vyšetřeme limitu této funkce v počátku:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 + y^2} = \infty.$$

Proto tato funkce není v počátku spojitá a nenabývá největší hodnotu na množině M. Vrstevnicemi funkce jsou kružnice se středem v počátku. Nejmenší hodnoty nabývá funkce v bodech kružnice $x^2 + y^2 = 1$. ▲

Cvičení

1. Zobrazte v rovině definiční obory funkcí:

a) $z = \frac{x+y+1}{x-1}$, b) $z = \sqrt{1-x^2-4y^2}$,

c) $z = \sqrt{y} + \sqrt{25-x^2-y^2}$, d) $z = \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\right)}$,

e) $z = \ln(x+y)$, f) $z = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$,

g) $z = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2}$, h) $z = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$.

2. Pomocí vrstevnic a řezů rovinami načrtněte v prostoru grafy funkcí:

a) $z = 2-x-y$, b) $z = \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$,

c) $z = y$, d) $z = \frac{1}{2x^2+3y^2}$,

e) $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$, f) $z = x^2+y^2$,

g) $z = \frac{1}{2}(x^2-y^2)$, h) $z = 2-\sqrt{x^2+y^2}$,

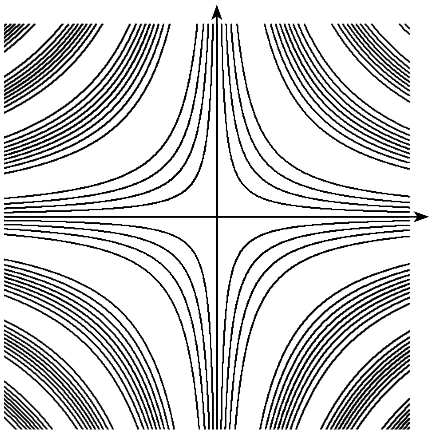
i) $z = y^2+1$, j) $z = 3-x^2-y^2$.

3. Vypočtěte limitu funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ v bodě $[0,0]$.

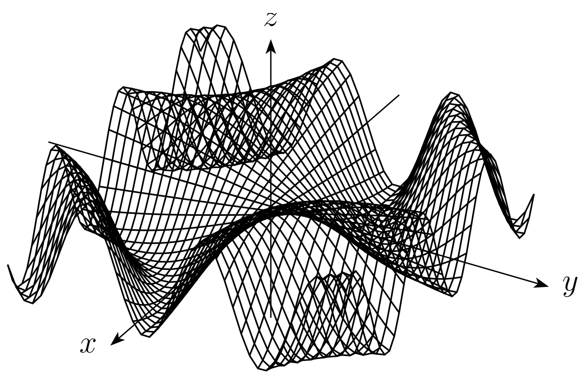
4. Dokažte, že funkce $f(x,y) = \frac{3y}{x^3+y}$ nemá v bodě $[0,0]$ limitu.

5. Pomocí přímek $y = kx$ a paraboly $y = x^2$ ukažte, že neexistuje limita

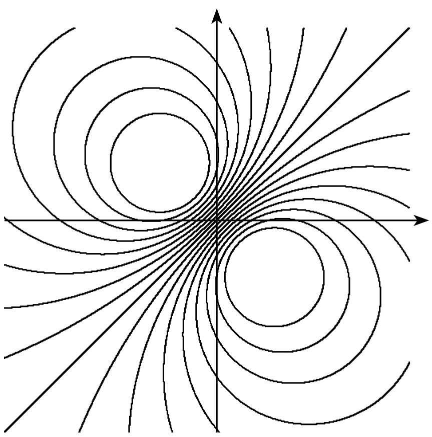
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^4+y^2}.$$



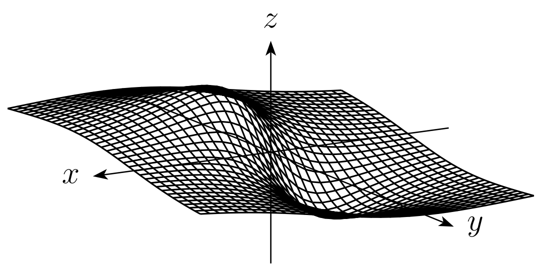
(a) $k = \sin(xy)$



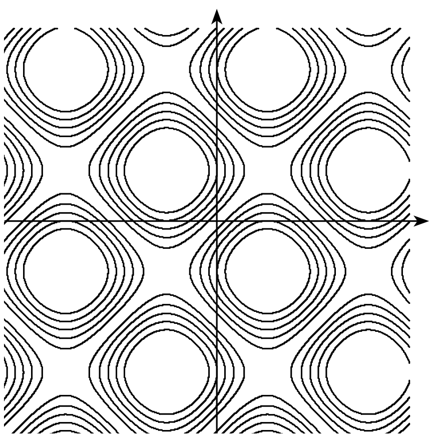
(b) $z = \sin(xy)$



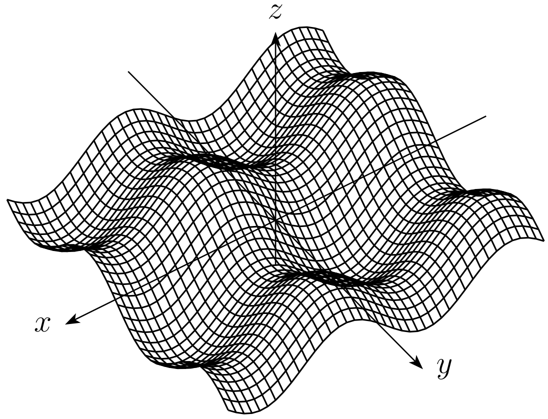
(c) $k = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$



(d) $z = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$



(e) $k = \sin x - \sin y$



(f) $z = \sin x - \sin y$

Obrázek 3.1: Příklady funkcí: Vrstevnice a grafy

Kapitola 4

Parciální derivace

4.1 Parciální derivace 1.řádu

Připomeňme definici a geometrický význam derivace funkce jedné proměnné $y = f(x)$ v bodě x_0. Tuto derivaci definujeme jako limitu

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,. \tag{4.1}$$

Derivace funkce v bodě je číslo, které udává směrnici tečny ke křivce $y = f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Má-li funkce derivaci v bodě x_0, je v tomto bodě spojitá, a tudíž zde existuje také limita funkce.

Jak jsme již ukázali v předcházející kapitole, limita funkce dvou a více proměnných je komplikovanějším pojmem než v případě funkce jedné proměnné, neboť k bodu $[x_0, y_0]$ (v případě dvou proměnných) se můžeme blížit nekonečně mnoha způsoby. Zcela přirozené je začít zkoumat situaci, blížíme-li se k bodu $[x_0, y_0]$ ve směru souřadných os x a y. Tím se dostáváme k pojmu *parciální derivace* funkce dvou proměnných. Při „parciálním“[1] derivování se vždy na jednu z proměnných x, y díváme jako na konstantu a podle druhé derivujeme.

Definice 4.1. Nechť $f(x, y)$ je funkce a $[x_0, y_0]$ bod. Funkce $g(x) = f(x, y_0)$ je funkcí jedné proměnné x. Má-li funkce $g(x)$ v bodě x_0 derivaci $g'(x_0)$, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme

$$f_x(x_0, y_0) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Podobně, má-li funkce $h(y) = f(x_0, y)$ derivaci v bodě y_0, nazýváme tuto derivaci *parciální derivací* funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ a označujeme

$$f_y(x_0, y_0) \quad \text{nebo} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

[1]Doslovný český překlad slova parciální je „částečný“.

Poznámka 4.2.

i) Parciální derivace podle x je tedy limita

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Podobně se dá definovat i parciální derivace podle y.

ii) Má-li funkce $z = f(x, y)$ parciální derivace v libovolném bodě $[x, y]$, jsou tyto derivace funkcemi proměnných x, y. Označujeme je $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$, popř. $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

iii) Z definice parciální derivace plyne, že při jejím výpočtu postupujeme tak, že všechny argumenty kromě toho, podle něhož derivujeme, považujeme za konstanty.

Protože parciální derivace $f_x(x, y)$ funkce je definována jako „obyčejná“ derivace podle proměnné x, platí pro počítání parciálních derivací obvyklá pravidla pro derivování.

Příklad 4.3. Vypočtěte parciální derivace funkce $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^3$ v bodě $[1, 1]$.

Řešení. Podle definice 4.1 dostáváme

$$g(x) = f(x, 1) = \frac{1}{2}(x^2 + 1)^3,$$

$$g'(x) = f'(x, 1) = 3(x^2 + 1)^2 x$$

a dosazením za $x = 1$ dostaneme $f_x(1, 1) = 3 \cdot 4 = 12$. Podobně

$$h(y) = f(1, y) = \frac{1}{2}(1 + y^2)^3,$$

$$h'(y) = f'(1, y) = 3(1 + y^2)^2 y$$

a po dosazení $f_y(1, 1) = 12$.

Častěji postupujeme tak, nejprve určíme parciální derivace v libovolném bodě. Parciální derivace podle x znamená, že y považujeme za konstantu a derivujeme podle x

$$f_x(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + 1)^2 2x = 3(x^2 + y^2)^2 x.$$

Dosazením za $[x, y] = [1, 1]$ dostaneme $f_x(1, 1) = 12$. Podobně určíme parciální derivaci podle y. ▲

Příklad 4.4. Vypočtete parciální derivace funkce dvou proměnných:

a) $f(x, y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$, b) $f(x, y) = \frac{xy}{x - y}$,

c) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, d) $f(x, y) = \ln(x + y^2)$.

Řešení. a) Použijeme pravidla pro derivaci součtu, případně rozdílu, a pravidlo o derivace polynomu, dostaneme tak

$$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3,$$
$$f_y(x, y) = 3x^2 y^2 - 4y.$$

b) Použijeme pravidla pro derivaci podílu:

$$f_x(x, y) = \frac{y(x-y) - xy}{(x-y)^2} = -\frac{y^2}{(x-y)^2},$$
$$f_y(x, y) = \frac{x(x-y) + xy}{(x-y)^2} = \frac{x^2}{(x-y)^2}.$$

c) Použijeme pravidla pro derivaci složené funkce:

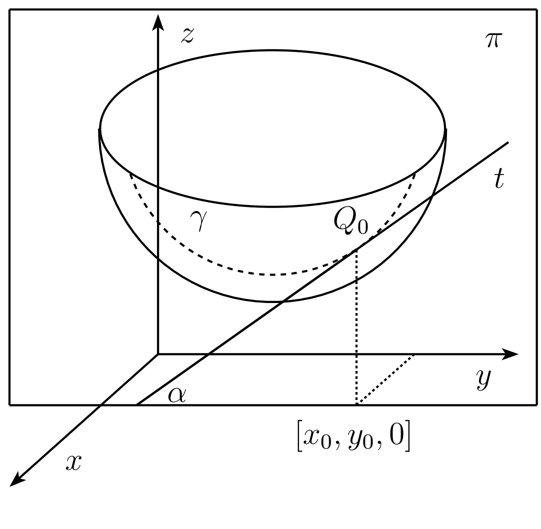
$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}2y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

d) Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladě:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{x+y^2},$$
$$f_y(x, y) = \frac{2y}{x+y^2}.$$

▲

Geometrický význam parciálních derivací. Nechť je dána funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a G_f je její graf. Nechť π je rovina daná rovnicí $x = x_0$. Za rozumných předpokladů (např. spojitost funkce f) je průsečíkem $G_f \cap \pi$ křivka γ v rovině π a parciální derivace $f_y(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny t k této křivce v bodě $Q_0 = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, viz obrázek. (Připomeňme, že směrnice tečny t je tg α.)



Podobně, derivace $f_x(x_0, y_0)$ udává směrnici tečny ke křivce v bodě Q_0, která vznikne průsečíkem grafu funkce s rovinou $y = y_0$.

Zatímco u funkcí jedné proměnné plyne z existence derivace v daném bodě její spojitost, u funkcí více proměnných toto tvrzení neplatí. *Má-li funkce* $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *parciální derivace v bodě* $[x_0, y_0]$, *nemusí být v tomto bodě spojitá.*

Příklad 4.5. Funkce definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x = 0 \text{ nebo } y = 0, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ obě parciální derivace (rovny nule) a není zde spojitá, neboť v tomto bodě neexistuje limita (grafem funkce je podstavná rovina, z níž je „vyzdvižen“ osový kříž).

Gradient funkce Ve fyzikální terminologii se vektor parciálních derivací nazývá gradient funkce a označuje se buď jako grad f nebo symbolem ∇f (nabla). Pro funkci dvou proměnných $f(x,y)$ je gradientem vektor

$$\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

a pro funkci tří proměnných $f(x,y,z)$ je gradientem vektor

$$\nabla f(x,y,z) = (f_x(x,y,z), f_y(x,y,z), f_z(x,y,z))\,.$$

Podrobněji se gradientem budeme zabývat v kapitole 8.

4.2 Směrové derivace

Pomocí gradientu můžeme definovat směrové derivace funkce, které jsou zobecněním parciálních derivací. Nejprve připomeňme, že *skalární součin* vektorů

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \qquad \vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

je číslo $\vec{u} \cdot \vec{v}$, kde

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Jestliže θ je úhel, který svírají tyto vektory, pak platí

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\theta,$$

přičemž $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$ značí velikost vektoru $\vec{u}$. Z předchozího vztahu plyne, že skalární součin dvou navzájem kolmých vektorů je roven nule.

Definice 4.6. Nechť f má spojité parciální derivace. *Směrovou derivací* f_v funkce f ve směru vektoru $\vec{v}$ rozumíme skalární součin

$$f_v = \operatorname{grad} f \cdot \vec{u}, \tag{4.2}$$

kde $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$, tj. $\vec{u}$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{v}$.

Poznamenejme, že někdy se směrová derivace f_v definuje jako $f_v = \operatorname{grad} \cdot \vec{v}$ (viz [2]). Pak tato derivace závisí na velikosti vektoru $\vec{v}$.

Parciální derivace jsou speciálním případem směrových derivací, f_x je směrová derivace ve směru vektoru $\vec{u} = (1, 0)$, podobně f_y je směrová derivace ve směru vektoru $\vec{u} = (0, 1)$. Směrové derivace popisují rychlost změny funkce ve směru vektoru $\vec{v}$.

Příklad 4.7. Je dána funkce $f = x^2y^3 - 4y$. Určete její derivaci ve směru vektoru $\vec{v} = (2, 5)$.

Řešení. Podle (4.2) je derivace funkce $f(x, y)$ ve směru vektoru $\vec{v} = (2, 5)$ rovna

$$f_v(x, y) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{u} = f_x u_1 + f_y u_2, \tag{4.3}$$

kde vektor $\vec{u} = (u_1, u_2)$ je jednotkový vektor ve směru vektoru $\vec{v}$. Proto nejprve určíme jednotkový vektor $\vec{u}$

$$\vec{u} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{5}{\sqrt{29}} \right).$$

Nyní spočítáme parciální derivace f_x, f_y. Dostaneme

$$f_x = \frac{\partial(x^2y^3 - 4y)}{\partial x} = 2xy^3, \qquad f_y = \frac{\partial(x^2y^3 - 4y)}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4.$$

Po dosazení do (4.3) získáváme

$$f_v(x, y) = 2xy^3 \cdot \frac{2}{\sqrt{29}} + (3x^2y^2 - 4) \cdot \frac{5}{\sqrt{29}}$$

a po roznásobení

$$f_v(x, y) = \frac{4xy^3}{\sqrt{29}} + \frac{15x^2y^2}{\sqrt{29}} - \frac{20}{\sqrt{29}}.$$

▲

4.3 Derivace vyšších řádů

Funkce $f(x, y)$ má dvě parciální derivace 1.řádu: $f_x(x, y)$ a $f_y(x, y)$. Každou tuto funkci můžeme dál parciálně derivovat (pokud tyto derivace existují), čímž dostaneme čtyři funkce

$$f_{xx}(x, y), \quad f_{xy}(x, y), \quad f_{yx}(x, y), \quad f_{yy}(x, y).$$

Někdy je označujeme jako

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).$$

Tyto parciální derivace nazýváme *parciální derivace 2.řádu* funkce $f(x, y)$. Parciální derivace $f_{xy}(x, y)$ a $f_{yx}(x, y)$ se nazývají *smíšené parciální derivace.*

Příklad 4.8. Vypočtěte všechny druhé derivace funkce $f(x, y) = x^y$, $x > 0$.

Řešení. Parciální derivaci podle x určíme jako derivaci mocninné funkce a derivaci podle y jako derivaci exponenciální funkce se základem x, tj.

$$f_x = yx^{y-1}, \quad f_y = x^y \ln x.$$

Podobně obdržíme

$$f_{xx} = y(y-1)x^{y-2}, \quad f_{yy} = x^y \ln^2 x.$$

Při výpočtu smíšených derivací musíme derivovat oba výrazy podle pravidla pro výpočet derivace součinu a dostaneme

$$f_{xy} = x^{y-1}(y \ln x + 1), \quad f_{yx} = x^{y-1}(y \ln x + 1).$$

▲

Pro funkce, s kterými se setkáme, jsou smíšené parciální derivace stejné. Tuto skutečnost popisuje následující věta.

Věta 4.9 (Schwarzova)**.** *Nechť funkce $f(x,y)$ má v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace $f_{xy}(x,y)$ a $f_{yx}(x,y)$. Pak platí*

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0). \tag{4.4}$$

Parciální derivace n-tého řádu ($n \geq 3$) definujeme jako parciální derivace derivací ($n-1$)-ního řádu. Indukcí lze pak rozšířit Schwarzovu větu takto: Má-li funkce $f(x,y)$ spojité parciální derivace až do řádu n, pak hodnota parciální derivace řádu n závisí pouze na tom, kolikrát se derivovalo podle proměnné x a kolikrát podle proměnné y, nikoliv na pořadí, v jakém se podle těchto proměnných derivovalo.

4.4 Diferenciál funkce

Diferenciálem funkce jedné proměnné v bodě x_0 rozumíme *přírůstek funkce na tečně* vedené ke grafu funkce v bodě $[x_0, f(x_0)]$. Označíme-li přírůstek nezávisle proměnné $\mathrm{d}x = x - x_0$, diferenciál funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je lineární funkce proměnné $\mathrm{d}x$

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x.$$

V tomto případě existence diferenciálu neboli diferencovatelnost funkce je ekvivalentní existenci derivace v bodě x_0.

U funkce $f(x,y)$ je tzv. *totální diferenciál* definován analogicky: Je to přírůstek funkce na tečné rovině vedené ke grafu funkce bodem $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$. Tečná rovina má s grafem funkce lokálně (tj. v okolí bodu, kde ji sestrojujeme) společný právě jeden bod.

Definice 4.10. Nechť má funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 1. řádu a označme přírůstky nezávisle proměnných jako

$$\mathrm{d}x = x - x_0, \quad \mathrm{d}y = y - y_0.$$

Diferenciál funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ je lineární funkce proměnných $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$ tvaru

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y. \tag{4.5}$$

Má-li funkce v daném bodě diferenciál, říkáme, že je v tomto bodě *diferencovatelná*.

Poznámka 4.11.

i) Z (4.5) vidíme, že diferenciál je skalární součin gradientu funkce v daném bodě a přírůstkového vektoru $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)$.

ii) V předchozí kapitole jsme ukázali, že pro funkce dvou proměnných z existence parciálních derivací neplyne spojitost. Diferencovatelnost funkce je tou „správnou" vlastností, která implikuje spojitost funkce. Opak neplatí: Je-li funkce spojitá, nemusí být diferencovatelná, např. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[0,0]$.

Příklad 4.12. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Řešení. Určíme parciální derivace

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ f_y(x,y) &= \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Diferenciál v libovolném bodě $[x,y] \neq [0,0]$ je funkce

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y.$$

▲

Věta 4.13. *Má-li funkce $f(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$ totální diferenciál, má graf funkce v tomto bodě tečnou rovinu o rovnici*

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0). \tag{4.6}$$

Rovnice tečné roviny je nejlepší lineární aproximací funkce $f(x,y)$ v okolí bodu $[x_0,y_0]$. Přibližná hodnota funkce je

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \mathrm{d}f(x_0,y_0). \tag{4.7}$$

Příklad 4.14. Pomocí totálního diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $1{,}04^{2{,}02}$ b) $\sqrt{(2{,}98)^2+(4{,}05)^2}$

Řešení.

a) K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x,y) = x^y$ v bodě $[1,2]$ s diferencemi $\mathrm{d}x = 0{,}04$, $\mathrm{d}y = 0{,}02$. Platí

$$\mathrm{d}f(x,y) = yx^{y-1}\mathrm{d}x + x^y \ln x \mathrm{d}y, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}f(1,2) = 2\,\mathrm{d}x + 0\,\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x,$$

a tedy podle (4.7)

$$1{,}04^{2{,}02} = f(1{,}04; 2{,}02) \approx f(1,2) + \mathrm{d}f(1,2) = 1{,}08.$$

b) K výpočtu použijeme diferenciál funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ v bodě $[3,4]$ s diferencemi $\mathrm{d}x = -0{,}02,\ \mathrm{d}y = 0{,}05$. Platí

$$\mathrm{d}f(x,y) = \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

a dosazením do (4.7) dostáváme

$$\sqrt{(2{,}98)^2 + (4{,}05)^2} \approx 5 + \frac{1}{5}(-3\cdot 0{,}02 + 4\cdot 0{,}05) = 5{,}028\,. \qquad \blacktriangle$$

Příklad 4.15. Napište rovnici tečné roviny grafu funkce $z = x^2 + y^2$ v bodě $[1,1,?]$.

Řešení. Dosazením do funkčního předpisu najdeme z-ovou souřadnici dotykového bodu $z = 1^2+1^2 = 2$. Spočtěme parciální derivace $f_x = 2x$ a $f_y = 2y$ a přímým dosazením do vzorce (4.6) pro tečnou rovinu dostáváme její rovnici $z = 2+2(x-1)+2(y-1)$, tj. $2x+2y-z-2=0$. ▲

4.5 Kmenová funkce

V tomto odstavci vyřešíme následující úlohu: Je dán výraz

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{4.8}$$

Máme rozhodnout, zda existuje funkce $H(x,y)$ taková, že je tento výraz jejím diferenciálem. Funkce H se nazývá *kmenová funkce* funkcí P, Q.

Aby kmenová funkce H existovala musí podle předchozího platit

$$H_x(x,y) = P(x,y), \qquad H_y(x,y) = Q(x,y).$$

Za předpokladu spojitosti parciálních derivací 2.řádu plyne ze Schwarzovy věty, že $H_{xy}(x,y) = H_{yx}(x,y)$, tj.

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y). \tag{4.9}$$

Pokud je tato podmínka splněna, postupnou integrací určíme kmenovou funkci.

Poznamenejme, že rovnost (4.9) musí platit pro všechny body z dané oblasti G, která je tzv. *jednoduše souvislá*. To znamená, že libovolnou uzavřenou křivku ležící v G lze spojitě deformovat v G do bodu (hranici množiny G tvoří jediná uzavřená křivka). Příkladem jednoduše souvislé oblasti je kruh nebo obdélník, naopak množina, která je tvořena mezikružím, není jednoduše souvislá.

Poznámka 4.16. S úlohou, zda je výraz (4.8) diferenciálem nějaké funkce, se setkáme u křivkového integrálu v tomto znění (více viz kapitola 8):

Jestliže na hmotný bod o souřadnicích $[x,y] \in G$ působí síla $F(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$, pak práce A, která se vykoná, přejde-li hmotný bod po křivce C z jejího prvního do posledního bodu, se definuje jako

$$A = \int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

V praxi je velmi důležitá otázka, zda tento křivkový integrál nezávisí na integrační cestě, tj. zda hodnota tohoto integrálu je stejná integrujeme-li přes libovolnou křivku C se stejným počátečním a koncovým bodem. Ukážeme, že tato nezávislost na integrační cestě úzce souvisí s podmínkou (4.9).

Příklad 4.17. Rozhodněte, zda výraz $(x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (5 - 2xy)\,\mathrm{d}y$ je diferenciálem nějaké funkce; v případě že ano, určete tuto (kmenovou) funkci.

Řešení. Nejprve ověříme, zda je uvedený výraz opravdu diferenciálem. V celém $\mathbb{R}^2$ platí

$$\frac{\partial}{\partial x}(5 - 2xy) = -2y, \qquad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2) = -2y,$$

tj. zadaný výraz je diferenciálem jisté kmenové funkce H. Dále platí

$$H(x, y) = \int (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - y^2x + \varphi(y),$$

kde $\varphi(y)$ hraje roli integrační konstanty, neboť její derivace podle x je nulová. Derivováním podle y, tj. $H_y = -2xy + \varphi'(y)$ a dosazením do vztahu $H_y = Q$ dostáváme

$$-2xy + \varphi'(y) = 5 - 2xy,$$

odkud $\varphi'(y) = 5$, tj. $\varphi(y) = 5y + c$. Vypočítali jsme tak, že zadaný výraz je diferenciálem funkce

$$H(x, y) = \frac{x^3}{3} - y^2x + 5y + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

▲

Stavová funkce V termodynamice se popisují vlastnosti makroskopických systémů pomocí stavových funkcí. Tyto funkce závisejí na daném stavu systému, jsou však nezávislé na tom, jakou cestou (způsobem) byl tento stav dosažen. Tento fakt bývá hojně používán při chemických výpočtech. Stavové funkce jsou v chemii tytéž, kterým se v matematice říká funkce kmenové. Například k určení stavu jednosložkového homogenního systému (čisté látky) se používají dvě stavové proměnné, teplota T a objem V.

Co je to stavová funkce matematicky? Funkce u proměnných T, V je stavovou funkcí v termodynamickém smyslu, je-li výraz

$$\mathrm{d}u = f_1(T, V)\,\mathrm{d}T + f_2(T, V)\,\mathrm{d}V,$$

jejím totálním diferenciálem $\mathrm{d}u(T,\ V)$ proměnných $\mathrm{d}T$, $\mathrm{d}V$. Proto musí platit

$$f_1 = \frac{\partial u}{\partial T}, \quad a \quad f_2 = \frac{\partial u}{\partial V}.$$

Zároveň, ze Schwarzovy věty, si musí být druhé smíšené parciální derivace rovny, tedy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial T \partial V} = \frac{\partial f_1}{\partial V} = \frac{\partial f_2}{\partial T} = \frac{\partial^2 u}{\partial V \partial T}.$$

Příklad 4.18. Dokažte, že stavovou funkcí termodynamiky je tzv. termická stavová funkce p proměnných V, T zvaná tlak, platí-li pro ideální plyn Boyleův–Mariottův zákon $p = \frac{RT}{V}$.

Řešení. Uvažujme $p = \frac{RT}{V} = p(T, V)$. Parciální derivace této funkce jsou

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}, \qquad \frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}$$

a zároveň

$$\frac{\partial^2 p}{\partial T \partial V} = -\frac{R}{V^2}, \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial V\, \partial T} = -\frac{R}{V^2},$$

tj. smíšené parciální derivace jsou si rovny. Odtud plyne, že tlak p jako funkce objemu a tlaku je stavovou funkcí a její totální diferenciál je

$$\mathrm{d}p = \frac{R}{V}\,\mathrm{d}T - \frac{RT}{V^2}\,\mathrm{d}V. \tag{4.10}$$

Pro výpočty příkladů, kde pracujeme s Boylovým–Mariottovým zákonem, nám tudíž stačí znát pouze počáteční a konečnou hodnotu tlaku ideálního plynu, nezáleží nám na „cestě“, kterou se tlak z počátečního do konečného stavu dostal.

▲

Příklad 4.19. Dokažte, že vnitřní energie $U(T, V)$ systému pro ideální plyn je stavovou funkcí, víte-li, že závisí pouze na teplotě T, ale nikoliv na objemu V.

Řešení. Uvažujme $U = U(T, V) = U(T)$, což vyjadřuje, že vnitřní energie je funkcí pouze teploty. Pak $\frac{\partial U}{\partial V} = 0$ a smíšená derivace $\frac{\partial^2 U}{\partial V \partial T} = 0$. Označme $C_V = \frac{\partial U}{\partial T}$, kde C_V je molární tepelná kapacita při konstantním objemu. Vidíme, že C_V je funkcí pouze teploty, proto $\frac{\partial C_V}{\partial V} = 0$. Odtud plyne, že smíšené derivace jsou záměnné. Proto je výraz

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial T}\,\mathrm{d}T + \frac{\partial U}{\partial V}\,\mathrm{d}V = \frac{\partial U}{\partial T}\,\mathrm{d}T = C_V\,\mathrm{d}T \tag{4.11}$$

totálním diferenciálem. Proto vnitřní energie systému pro ideální plyn je stavovou funkcí. ▲

Příklad 4.20. Ukažte, že teplo Q není termodynamickou stavovou funkcí.

Řešení. Platí první věta termodynamická

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}Q + \mathrm{d}A, \tag{4.12}$$

kde dQ je množství tepla, dA práce vložená do systému pro ideální plyn, který se při konstantním tlaku rozepne o objem dV a kterému je dáno teplo dQ. Z (4.12) plyne

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U - \mathrm{d}A.$$

Podobně jako v (4.11) lze pro práci vloženou do systému odvodit vztah $\mathrm{d}A = -p\mathrm{d}V$. Dosadíme-li zároveň za dU z výrazu (4.11), tedy $\mathrm{d}U = C_V\,\mathrm{d}T$. Dostaneme

$$\mathrm{d}Q = C_V\,\mathrm{d}T + p\,\mathrm{d}V.$$

Dále dosaďme za tlak p z Boyle–Mariottova zákona $p = \frac{RT}{V}$, vyjde

$$\mathrm{d}Q = C_V\,\mathrm{d}T + \frac{RT}{V}\,\mathrm{d}V. \tag{4.13}$$

Pro smíšené parciální derivace platí

$$\frac{\partial}{\partial V}(C_V) = 0 \neq \frac{\partial}{\partial T}\frac{RT}{V},$$

proto výraz (4.13) není totálním diferenciálem a teplo Q není termodynamickou stavovou funkcí. Přivedené množství tepla závisí tedy na tom, přes které mezistavy se dostaneme do konečného stavu. ▲

Poznámka 4.21. Ve fyzikální chemii se vyjadřuje jako výsledek spojení první a druhé věty termodynamické pro reverzibilní děj vztah pro diferenciální vnitřní energie uzavřeného systému

$$\mathrm{d}U = T\,\mathrm{d}S - p\,\mathrm{d}V.$$

Vnitřní energie U je chápána jako funkce entropie S a objemu V, tedy

$$U = U(S,\ V),$$

a má totální diferenciál

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial S}\,\mathrm{d}S + \frac{\partial U}{\partial V}\,\mathrm{d}V.$$

Porovnáním obou vztahů získáme parciální derivace vnitřní energie

$$\frac{\partial U}{\partial S} = T \quad \text{a} \quad \frac{\partial U}{\partial V} = -p.$$

Z rovnosti druhých smíšených derivací

$$\frac{\partial^2 U}{\partial S\,\partial V} = \frac{\partial T}{\partial V} \quad \text{a} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial V\,\partial S} = \frac{\partial(-p)}{\partial S}$$

pak usoudíme na vztah

$$\frac{\partial T}{\partial V} = -\frac{\partial p}{\partial S}.$$

Tento vztah bývá využíván ve výpočtech ve fyzikální chemii.

Cvičení

1. Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkcí:

a) $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y$, b) $f(x, y) = (2x + 3y)^{10}$,

c) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, d) $f(x, y) = x\mathrm{e}^{3y}$,

e) $f(x, y) = \sin xy$, f) $f(x, y) = \sqrt{x}\ln y$,

g) $f(x, y) = xy\ln(x + y)$, h) $f(x, y) = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

2. Vypočtěte dané parciální derivace 1. řádu funkcí v bodech:

a) $f(x,y)=\frac{y}{x+y},\ f_y(2,1)$, b) $f(x,y)=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2}),\ f_x(3,4)$,

c) $f(x,y)=y^2+y\sqrt{1+x^2},\ f_y(2,5)$, d) $f(x,y)=\ln\left(x+\frac{y}{2x}\right),\ f_x(1,2)$.

3. Určete směrovou derivaci funkce $f=4y-x^2y^3$ ve směru vektoru $\vec{v}=(3,-2,-\sqrt{3})$.

4. Vypočtěte parciální derivace 2. řádu funkcí:

a) $f(x,y)=x^4+y^4-4x^2y^2$, b) $f(x,y)=3xy^4+x^3y^2$,

c) $f(x,y)=xy\mathrm{e}^y$, d) $f(x,y)=\frac{xy+x}{y}$,

e) $f(x,y)=\frac{x}{y^2}$, f) $f(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

g) $f(x,y)=x\sin(x+y)$, h) $f(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

5. Určete diferenciál funkce v daném bodě:

a) $f(x,y)=xy+\frac{x}{y}$, [1,1], b) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, [1,1].

6. Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

a) $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$, b) $\mathrm{e}^{0{,}05^3-0{,}02}$.

7. Najděte rovnice tečné roviny ke grafu funkce v daném bodě:

a) $f(x,y)=\sqrt{xy},\ [1,1,1]$, b) $f(x,y)=x^2+xy+2y^2,\ [1,1,4]$.

8. Zjistěte, zda dané výrazy jsou totálními diferenciály nějaké funkce:

a) $(x+\ln y)\,\mathrm{d}x+\left(\frac{x}{y}+\sin y\right)\mathrm{d}y$, b) $x\sin 2y\,\mathrm{d}x+x^2\cos 2y\,\mathrm{d}y$.

9. Ověřte, že dané výrazy jsou totálními diferenciály nějaké funkce a tuto funkci najděte:

a) $\frac{x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, b) $(y^2-1)\,\mathrm{d}x+(2xy+3y)\,\mathrm{d}y$.

Výsledky:

1. a) $f_x=3x^2+4xy+3y^2,\ f_y=2x^2y+6xy-5$, b) $f_x=20(2x+3y)^9,\ f_y=30(2x+3y)^9$, c) $f_x=\frac{2y}{(x+y)^2},\ f_y=-\frac{2x}{(x+y)^2}$, d) $f_x=\mathrm{e}^{3y},\ f_y=3x\mathrm{e}^{3y}$, e) $f_x=y\cos xy,\ f_y=x\cos xy$, f) $f_x=\frac{\ln y}{2\sqrt{x}},\ f_y=\frac{\sqrt{x}}{y}$, g) $f_x=y\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y},\ f_y=x\ln(x+y)+\frac{xy}{x+y}$, h) $f_x=\frac{y}{x^2+y^2},\ f_y=-\frac{x}{x^2+y^2}$.
2. a) $f_y(2,1)=\frac{2}{9}$, b) $f_x(3,4)=\frac{1}{5}$, c) $f_y(2,5)=10+\sqrt{5}$, d) $f_x(1,2)=0$.
3. $f_v=-\frac{3}{2}xy^3-2+\frac{3}{2}x^2y^2$.

4. a) $f_{xx} = 12x^2 - 8y^2,\ f_{xy} = -16xy,\ f_{yy} = 12y^2 - 8x^2,$
   b) $f_{xx} = 6xy^2,\ f_{xy} = 12y^3 + 6x^2y,\ f_{yy} = 36xy^2 + 2x^3,$
   c) $f_{xx} = 0,\ f_{xy} = \mathrm{e}^y(1+y),\ f_{yy} = \mathrm{e}^y(2y + xy),$
   d) $f_{xx} = 0,\ f_{xy} = -\frac{1}{y^2},\ f_{yy} = \frac{2x}{y^3},$
   e) $f_{xx} = 0,\ f_{xy} = -\frac{2}{x^3},\ f_{yy} = \frac{6x}{y^4},$
   f) $f_{xx} = \frac{-3xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}},\ f_{xy} = \frac{2x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},\ f_{yy} = \frac{-x^3+2xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}},$
   g) $f_{xx} = 2\cos(x+y) - x\sin(x+y),\ f_{xy} = -x\sin(x+y),\ f_{yy} = -x\sin(x+y),$
   h) $f_{xx} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},\ f_{xy} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\ f_{yy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$
5. a) $2\,\mathrm{d}x$, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{d}y.$
6. a) $\frac{\pi}{4} + 0{,}035$, b) $0{,}98$.
7. a) $x + y - 2z = 0$, b) $3x + 5y - z - 4 = 0$.
8. a) ano, b) ano.
9. a) ano, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + C$, b) ano, $f(x,y) = xy^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + C$.

Kapitola 5

Extrémy funkcí více proměnných

Vyšetřování extrémů funkcí je jednou z nejdůležitějších částí diferenciálního počtu funkcí jedné i více proměnných.

Nejprve studujeme lokální extrémy. Zde vyšetřujeme danou funkci pouze lokálně, tj. v okolí nějakého bodu. Pokud je předepsána množina a máme najít bod této množiny, v němž funkce nabývá největší, resp. nejmenší hodnoty, mluvíme o absolutních extrémech.

5.1 Lokální extrémy

Definice 5.1. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě $[x_0,y_0]$ *lokálního maxima*, jestliže existuje okolí tohoto bodu takové, že pro všechny body z tohoto okolí platí

$$f(x,y) \le f(x_0,y_0). \tag{5.1}$$

Podobně definujeme *lokální minimum*. Jsou-li tyto nerovnosti ostré pro všechny body tohoto okolí různé od bodu $[x_0,y_0]$, mluvíme o *ostrých* lokálních maximech a minimech.
Lokální maxima a lokální minima souhrnně nazýváme *lokální extrémy*.

Příklad 5.2.

i) Funkce $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ má v bodě $[x,y]=[0,0]$ ostré lokální minimum, neboť $f(0,0) = 0$ a pro každé $[x,y] \ne [0,0]$ je $f(x,y) > 0$. Grafem funkce je část kuželové plochy.

ii) Funkce $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2, & \text{pro } [x,y] \ne [0,0], \\ 1, & \text{pro } [x,y] = [0,0], \end{cases}$$

má v bodě $[0,0]$ ostré lokální maximum, neboť pro $[x,y] \ne [0,0]$ dostatečně blízko počátku platí $f(x,y) < f(0,0) = 1$.

Uvedené příklady ilustrují skutečnost, že pro existenci lokálního extrému v nějakém bodě funkce *nemusí mít v tomto bodě parciální derivace, nemusí zde být dokonce ani spojitá.*

Nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému udává tato věta:

Věta 5.3. *Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0,y_0]$ lokální extrém a má v tomto bodě obě parciální derivace 1.řádu. Pak platí*

$$f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0. \tag{5.2}$$

Bod, který splňuje podmínku (5.2), se nazývá *stacionární bod* funkce. Zdůrazněme, že jde o podmínku pouze nutnou, tj. stacionární bod nemusí být bodem lokálního extrému. Např. funkce $f(x,y) = x^3$ má stacionární body ležící na ose y (tj. body $[0,y]$), ale v žádném z těchto bodů extrém nenastává.

Postačující podmínku udává následující věta.

Věta 5.4. *Nechť funkce $f(x,y)$ má v bodě $[x_0,y_0]$ a nějakém jeho okolí spojité parciální derivace druhého řádu a nechť je bod $[x_0,y_0]$ jejím stacionárním bodem.*

Jestliže

$$D(x_0,y_0) = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - [f_{xy}(x_0,y_0)]^2 > 0, \tag{5.3}$$

pak má funkce f v $[x_0,y_0]$ ostrý lokální extrém. Je-li $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$, jde o minimum, je-li $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$, jde o maximum.

Jestliže $D(x_0,y_0) < 0$, pak v bodě $[x_0,y_0]$ lokální extrém nenastává.

Poznámka 5.5. V případě, kdy $D(x_0,y_0) = 0$, nemůžeme podle této věty rozhodnout a musíme najít jinou cestu jak určit, zda v tomto bodě extrém je a nebo není.

Příklad 5.6. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Řešení. Funkce, jejíž extrémy hledáme, je polynomem proměnných x,y, a proto jsou její parciální derivace spojité v celém $\mathbb{R}^2$. Lokální extrémy proto mohou nastat pouze ve stacionárních bodech, které najdeme jako řešení soustavy rovnic

$$f_x = 3x^2 - 3y = 0, \quad f_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Z první rovnice plyne $y = x^2$ a dosazením do druhé rovnice dostáváme

$$x^4 - x = x(x-1)(x^2+x+1) = 0,$$

odtud $x_1 = 0, x_2 = 1$ (kvadratický trojčlen x^2+x+1 má záporný diskriminant, a je proto vždy kladný). Existují tedy dva stacionární body $P_1 = [0,0]$, $P_2 = [1,1]$. Dále platí $f_{xx} = 6x$, $f_{yy} = 6y$, $f_{xy} = -3$, odtud

$$D(x,y) = 36xy - 9, \quad \text{tj.} \qquad D(P_1) = -9 < 0, \qquad D(P_2) = 36 - 9 = 27 > 0.$$

Podle věty 5.4 v bodě P_1 extrém nenastává a v bodě P_2 nastává ostré lokální minimum, neboť $z_{xx}(P_2) = 6 > 0$. ▲

Příklad 5.7. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

Řešení. Funkce f je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\mathbb{R}^2$, takže může mít extrémy pouze ve stacionárních bodech.

Stacionární body určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} f_x &: 6x^2 + 10x - y^2 = 0 \\ f_y &: -2xy + 2y = 2y(1-x) = 0. \end{aligned}$$

Druhá rovnice je splněna pro $y = 0$ nebo $x = 1$. Dosazením těchto hodnot do první rovnice dostáváme: Pro $x = 1$ je $6 + 10 - y^2 = 0$, tedy $y_{1,2} = \pm 4$. Pro $y = 0$ je $6x^2 + 10x = 0$, tedy $x_1 = -\frac{5}{3}$, $x_2 = 0$.

Stacionární body tedy jsou $S_1 = [1, 4], S_2 = [1, -4], S_3 = [-\frac{5}{3}, 0], S_4 = [0, 0]$.

Určíme druhé derivace funkce f

$$f_{xx} = 12x + 10, \qquad f_{yy} = -2x + 2, \qquad f_{xy} = f_{yx} = -2y.$$

V každém z těchto bodů $S = [x_0, y_0]$ určíme hodnotu výrazu

$$D(S) = f_{xx}(x_0, y_0) f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2.$$

Dostáváme

$$D(S_1) = -64 < 0, \qquad D(S_2) = -64 < 0, \qquad D(S_3) = -\frac{160}{3} < 0, \qquad D(S_4) = 20 > 0.$$

Lokální extrém tedy existuje pouze v bodě $S_4 = [0, 0]$. Protože platí $f_{xx}(S_4) = 10 > 0$ je v bodě S_4 lokální minimum a platí $f(0, 0) = 0$. ▲

Příklad 5.8. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2 - y}(5 - 2x + y).$$

Řešení. Funkce $f(x, y)$ je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\mathbb{R}^2$, takže může mít extrémy pouze ve stacionárních bodech.

Stacionární body určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} f_x &: \mathrm{e}^{x^2-y}(-4x^2 + 2xy + 10x - 2) = 0 \\ f_y &: \mathrm{e}^{x^2-y}(2x - y - 4) = 0. \end{aligned}$$

Protože výraz $\mathrm{e}^{x^2-y} \neq 0$, řešíme soustavu

$$\begin{aligned} -4x^2 + 2xy + 10x - 2 &= 0 \\ 2x - y - 4 &= 0. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li ze druhé rovnice $y = 2x - 4$ a dosadíme-li do rovnice první, obdržíme rovnici $-2x + 2 = 0$. Získáme tak stacionární bod $S = [1, -2]$. Určíme druhé derivace funkce $f(x, y)$:

$$f_{xx} = \mathrm{e}^{x^2-y}(-8x^3 + 4x^2y + 20x^2 - 12x + 2y + 10), \qquad f_{yy} = \mathrm{e}^{x^2-y}(-2x + y + 3),$$
$$f_{xy} = f_{yx} = \mathrm{e}^{x^2-y}(4x^2 - 2xy - 8x + 2).$$

V bodě S určíme hodnotu výrazu $D(S) = f_{xx}(1, -2) f_{yy}(1, -2) - f_{xy}(1, -2) f_{yx}(1, -2)$. Dostáváme $D(S) = -2\mathrm{e}^3(-\mathrm{e}^3) - 4\mathrm{e}^6 = -2\mathrm{e}^6 < 0$. Proto funkce $f(x, y)$ nemá lokální extrém. ▲

Příklad 5.9. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2.$$

Řešení. Stacionární body určíme jako řešení soustavy rovnic

$$f_x = 4x^3 - 2x - 2y = 0, \quad f_y = 4y^3 - 2x - 2y = 0. \tag{5.4}$$

Odečtením rovnic dostáváme $x^3 - y^3 = 0$, odtud $x = y$ a dosazením do jedné z rovnic v (5.4) dostáváme tři stacionární body $P_1 = [0,0]$, $P_2 = [1,1]$, $P_3 = [-1,-1]$.

Dále

$$D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - [f_{xy}(x,y)]^2 = (12x^2 - 2)(12y^2 - 2) - 4.$$

Protože $D(P_2) = D(P_3) = 96 > 0$ a $f_{xx}(1,1) = f_{xx}(-1,-1) = 10 > 0$, má funkce f v obou těchto stacionárních bodech ostré lokální minimum. Ve stacionárním bodě P_1 je však $D(P_1) = 0$, proto o existenci extrému v tomto bodě nelze takto rozhodnout.

Zde postupujeme následujícím způsobem: Funkci f můžeme upravit na tvar $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$. Odtud $f(x,-x) = 2x^4 > 0$ pro $x \neq 0$. Na druhé straně $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(1-x^2) < 0$ pro $x \in (-1,0) \cup (0,1)$. V libovolném okolí bodu $[0,0]$ tedy funkce f nabývá jak kladných, tak záporných hodnot, což spolu s faktem, že $f(0,0) = 0$, znamená, že v tomto bodě lokální extrém nenastává. ▲

5.2 Absolutní extrémy

Definice 5.10. Nechť je dána množina M v rovině, bod $[x_0, y_0]$ leží v této množině a funkce $f(x,y)$ je definovaná na této množině. Řekneme, že funkce $f(x,y)$ nabývá v bodě $[x_0, y_0]$ *absolutní maximum na množině M*, jestliže pro všechny body této množiny platí nerovnost

$$f(x,y) \leq f(x_0, y_0).$$

Podobně definujeme *absolutní minimum* funkce na množině. Absolutní maxima a minima souhrně nazýváme *absolutní extrémy.*

Na otázku, kdy má funkce na množině absolutní extrémy, dává odpověď *Weierstrassova věta*: Je-li množina M ohraničená a uzavřená a funkce spojitá na této množině, pak existují absolutní extrémy na této množině. Tato podmínka bude ve všech našich úlohách splněna. Navíc budou tyto funkce diferencovatelné, tudíž budou mít spojité parciální derivace 1. řádu.

Postup, jak hledáme absolutní extrémy:

1) Najdeme stacionární body a vybereme ty, které leží uvnitř množiny M.

2) Vyšetříme danou funkci na hranici množiny. Zpravidla tvoří tuto hranici úsečka nebo půlkružnice. Rovnici této křivky, která tvoří část hranice, dosadíme do funkce $f(x,y)$ a vyšetřujeme absolutní extrémy vzniklé funkce jedné proměnné.

Příklad 5.11. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

na oblasti popsané nerovnicemi $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $x + y \leq 3$.

Řešení. Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce $f(x,y)$. Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 2x - y - 1 = 0$$
$$f_y : 2y - x - 1 = 0.$$

Snadno určíme, že jediným stacionárním bodem je bod $S = [1,1]$, který zřejmě leží uvnitř dané oblasti. Platí $f(1,1) = -1$. (Není třeba dokazovat, že jde o lokální extrém. Hodnotu v tomto bodě porovnáme s hodnotami získanými na hranici oblasti.)

Nyní budeme hledat největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)$ na hranici trojúhelníka, který je tvořen úsečkami:

$$\text{I. } y = 0,\ x \in [0,3] \quad, \text{II. } y = 3 - x \quad, x \in [0,3], \text{ III. } x = 0,\ y \in [0,3].$$

I) $y = 0$, $x \in [0,3]$. Dosazením dostáváme

$$f(x,0) = x^2 - x$$

a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0,3]$. Platí $f'(x) = 2x - 1$, odtud $x = \frac{1}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ a $f(3) = 6$.

II) $y = 3 - x$, $x \in [0,3]$. Dosazením dostáváme

$$f(x, 3 - x) = 3x^2 - 9x + 6$$

a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0,3]$. Platí $f'(x) = 6x - 9$, odtud $x = \frac{3}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f(0) = 6$ a $f(3) = 6$.

III) $x = 0$, $y \in [0,3]$. Dosazením dostáváme

$$f(0,y) = y^2 - y$$

a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $y \in [0,3]$. Platí $f'(y) = 2y - 1$, odtud $y = \frac{1}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$, $f(0) = 0$ a $f(3) = 6$.

Vidíme, že platí: $f(1,1) = -1$, $f(\frac{1}{2},0) = -\frac{1}{4}$, $f(0,0) = 0$, $f(3,0) = 6$, $f(\frac{3}{2},\frac{3}{2}) = -\frac{3}{4}$, $f(0,3) = 6$, $f(0,\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4}$.

Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že funkce $f(x,y)$ nabývá na oblasti své nejmenší hodnoty v bodě $[1,1]$ a své největší hodnoty v bodech $[3,0]$ a $[0,3]$. Dostáváme tak

$$f_{\min} = -1, \qquad \text{pro} \qquad [x,y] = [1,1],$$

$$f_{\max} = 6, \qquad \text{pro} \qquad [x,y] = [3,0] \quad \text{a} \quad [x,y] = [0,3].$$

▲

Příklad 5.12. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

v kruhu $x^2 + y^2 \leq 4$.

Řešení. Vyšetříme nejprve lokální extrémy funkce $f(x,y)$, která je včetně všech svých parciálních derivací spojitá v celém oboru $\mathbb{R}^2$.

Stacionární body určíme ze soustavy

$$f_x : 2x = 0$$

$$f_y : -2y = 0.$$

Jediným stacionárním bodem je bod $S = [0,0]$, který zřejmě leží uvnitř daného kruhu. Obvyklým způsobem bychom nyní mohli ukázat, že v tomto bodě funkce $f(x,y)$ nemá lokální extrém. Hledáme-li největší a nejmenší hodnotu funkce na daném kruhu, stačí porovnat hodnotu $f(0,0) = 0$ s hodnotami, které získáme na hranici kruhu. Budeme tedy nyní hledat největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)$ na kružnici $x^2 + y^2 = 4$. Tu si rozdělíme na dvě části, horní a dolní půlkružnici.

I) Horní půlkružnice je popsána rovnicí $y = \sqrt{4 - x^2}$, pro $x \in [-2,2]$. Dosazením do předpisu funkce $f(x,y)$ dostáváme

$$f(x, \sqrt{4 - x^2}) = x^2 - 4 + x^2 = 2x^2 - 4.$$

Obdrželi jsme funkci $f(x)$ jediné proměnné a její absolutní extrémy nyní najdeme (v tomto jednoduchém případě bychom to mohli snadno vyšetřit graficky). Jsou buď ve stacionárních bodech funkce $f(x)$ nebo v krajních bodech intervalu $[-2,2]$, tj. krajních bodech půlkružnice.
Položíme $f'(x) = 4x = 0$, odkud získáváme jediný stacionární bod $x_0 = 0$, pro který platí $f(0) = -4$. V krajních bodech intervalu $[-2,2]$ nabývá funkce $f(x)$ hodnot $f(-2) = f(2) = 4$.

II) Dolní půlkružnice je popsána rovnicí $y = -\sqrt{4 - x^2}$, pro $[-2,2]$. Po dosazení do předpisu funkce $f(x,y)$ dostáváme stejnou úlohu, jako v případě I.

Porovnáním všech vypočtených hodnot vidíme, že

$$f_{\min} = -4, \qquad \text{pro} \qquad [x,y] = [0, \pm 2],$$
$$f_{\max} = 4, \qquad \text{pro} \qquad [x,y] = [\pm 2, 0].$$

▲

Příklad 5.13. Určete nejmenší a největší hodnotu funkce

$$f(x,y) = xy - x^2 - y^2 + x + y$$

v trojúhelníku tvořeném souřadnými osami a tečnou ke grafu funkce $y = \frac{4}{x}$ v bodě $[2,2]$.

Řešení. Nejprve určeme rovnici tečny ke grafu funkce $y = \frac{4}{x}$. Platí $y' = -\frac{4}{x^2}$, tj. rovnice tečny v bodě $[2, 2]$ je $y = 2 - \frac{4}{4}(x - 2) = -x + 4$. Tedy množinou M, na níž hledáme absolutní extrémy, je množina

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq 0, y \geq 0, y \leq 4 - x\}.$$

Určíme stacionární body funkce z

$$f_x = y - 2x + 1 = 0, \quad f_y = x - 2y + 1 = 0,$$

odkud dostáváme stacionární bod $[x, y] = [1, 1] \in M$.

Nyní vyšetřeme funkci f na hranici množiny M, která se skládá z úseček

$$\text{I. } y = 0,\ x \in [0, 4], \quad \text{II. } x = 0,\ y \in [0, 4], \quad \text{III. } y = 4 - x,\ x \in [0, 4].$$

I) $y = 0$, $x \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme

$$u = f(x, 0) = -x^2 + x$$

a hledáme absolutní extrémy této funkce jedné proměnné pro $x \in [0, 4]$. Položíme $u'(x) = -2x + 1 = 0$, odtud $x = \frac{1}{2}$. Funkční hodnoty ve stacionárním bodě a v krajních bodech intervalu jsou $u(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $u(0) = 0$, $u(4) = -12$.

II) $x = 0$, $y \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme

$$v = f(0, y) = -y^2 + y$$

a stejně jako v části I $v(0) = 0$, $v(4) = -12$, $v(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.

III) $y = 4 - x$, $x \in [0, 4]$. Dosazením dostáváme

$$w = f(x, 4 - x) = x(4 - x) - x^2 - (4 - x)^2 + x + 4 - x = -3x^2 + 12x - 12.$$

Položíme $w'(x) = -6x + 12 = 0$, odtud $x = 2$, $w(2) = 0$. V krajních bodech $w(0) = -12, w(4) = -12$.

Porovnáním funkčních hodnot funkce f na hranici (tj. hodnot funkcí u, v, w v jejich stacionárních bodech a v krajních bodech intervalů, kde tyto funkce vyšetřujeme) s funkční hodnotou funkce f v jediném stacionárním bodě $[1, 1]$ vidíme, že

$$f_{\min} = -12 \text{ pro } [x, y] = [0, 4] \text{ a } [x, y] = [4, 0],$$
$$f_{\max} = 1 \text{ pro } [x, y] = [1, 1].$$

Závěrem poznamenejme, že algebraické úpravy spojené s vyjádřením funkce f na hranici bývají nejčastějším zdrojem numerických chyb. Máme však k dispozici poměrně dobrou průběžnou kontrolu. V bodě $[x, y] = [4, 0]$ se stýkají části hranice I a III, a tedy funkce u z I musí pro $x = 4$ nabývat stejné funkční hodnoty jako funkce w z III v $x = 4$. V našem případě je $u(4) = -12 = w(4)$. Podobně v bodě $[0, 0]$ se stýkají části I a II a v bodě $[0, 4]$ části II a III. Také v těchto bodech průběžná kontrola vychází, neboť $u(0) = 0 = v(0)$ a $w(0) = v(4) = -12$. Doporučujeme čtenáři tuto kontrolu vždy provést, neboť značně minimalizuje možnost šíření numerické chyby ve výpočtu. ▲

Cvičení

1. Určete lokální extrémy funkcí

a) $f(x,y) = x^2 + 4xy + 6y^2 - 2x + 8y$, b) $f(x,y) = -3x^4 - 5y^4$,

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - 2x + y$, d) $f(x,y) = 10x^2y - 5x^2 - 4y^2$,

e) $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^2y + 4$, f) $f(x,y) = xy - 2x - y$,

g) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$, h) $f(x,y) = xy(4 - x - y)$.

2. Určete absolutní extrémy funkcí na množině M

a) $f(x,y) = 1 + 4x - 5y$, M je trojúhelník s vrcholy $[0,0], [2,0], [0,3]$,

b) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2$, M je omezená grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$,

c) $f(x,y) = 3xy$, M je kruh $x^2 + y^2 \leq 2$,

d) $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2$, M je kruh $x^2 + y^2 \leq 9$,

e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27$, M je čtverec s vrcholy $[0,0], [4,0], [4,4], [0,4]$,

f) $f(x,y) = 4x + 6y - x^2 - y^2$, $M = \{[x,y] \colon 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 5\}$.

Výsledky:

1. a) $f_{\min} = -19$ v bodě $[7, -3]$,
   b) $f_{\max} = 0$ v bodě $[0, 0]$,
   c) $f_{\min} = -1$ v bodě $[1, 0]$,
   d) $f_{\min} = 0$ v bodě $[0, 0]$,
   e) $f_{\min} = 4$ v bodě $[0, 0]$,
   f) $f_{\min} = -2$ v bodě $[1, 2]$,
   g) $f_{\min} = -1$ v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$,
   h) $f_{\min} = \frac{64}{27}$ v bodě $[\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$.
2. a) $f_{\min} = -14$ v bodě $[0, 3]$, $f_{\max} = 1$ v bodě $[0, 0]$,
   b) $f_{\min} = 2$ v bodě $[0, 0]$, $f_{\max} = 22$ v bodě $[2, 2]$,
   c) $f_{\min} = -3$ v bodech $[-1, 1]$ a $[1, -1]$, $f_{\max} = 3$ v bodech $[1, 1]$ a $[-1, -1]$,
   d) $f_{\min} = 0$ v bodě $[0, 0]$, $f_{\max} = 18$ v bodech $[0, 3]$ a $[0, -3]$,
   e) $f_{\min} = 0$ v bodě $[3, 3]$, $f_{\max} = 91$ v bodech $[0, 4]$ a $[4, 0]$,
   f) $f_{\min} = 0$ v bodech $[0, 0]$ a $[4, 0]$, $f_{\max} = 13$ v bodě $[2, 3]$.

Kapitola 6

Dvojný integrál

V této kapitole se budeme zabývat integrálem funkce dvou proměnných – tzv. dvojným integrálem. Ukážeme dva způsoby, jak lze vypočítat dvojný integrál: Převedení dvojného integrálu na dva jednoduché integrály (tzv. Fubiniova věta) a pomocí transformace do polárních souřadnic.

6.1 Co je dvojný integrál

Připomeňme si, co je integrál funkce jedné proměnné (jednoduchý integrál). Je-li funkce $f(x)$ nezáporná a spojitá na intervalu $[a, b]$, pak integrál této funkce na intervalu $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

je číslo, které vyjadřuje *obsah rovinného obrazce* M ohraničeného grafem této funkce, osou x a přímkami $x = a$ a $x = b$. Pomocí nerovností můžeme množinu M zapsat

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Tento integrál lze spočítat pomocí primitivní funkce F k funkci f jako $F(b) - F(a)$.

Dvojný integrál je integrál funkce dvou proměnných. Při zavedení tohoto pojmu vyjdeme z geometrického významu dvojného integrálu:

Nechť funkce $f(x, y)$ je nezáporná a spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}^2$

$$M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 :\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}, \tag{6.1}$$

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $[a, b]$ a $\varphi(x) \le \psi(x)$. Pak *dvojný integrál této funkce na množině* M

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

je číslo, které vyjadřuje *objem tělesa* V ohraničeného grafem této funkce, rovinou xy a pláštěm vedeným přes hranici množiny M. Pomocí nerovností můžeme toto těleso zapsat

$$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le z \le f(x, y) \text{ pro } [x, y] \in M\}.$$

Poznamenejme, že přesné zavedení dvojného integrálu je poměrně technicky náročné, neboť je třeba zavést míru v rovině a pomocí míry pak definujeme Riemannův dvojný integrál.

Je-li M obdélník o stranách a, b a $f(x, y) \equiv c$, pak dvojný integrál vyjadřuje *objem kvádru* a platí

$$\iint_M c \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = a \cdot b \cdot c.$$

Je-li $f(x, y) \equiv 1$ na množině M, pak dvojný integrál vyjadřuje obsah (míru) množiny M:

$$\iint_M \mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = m(M).$$

6.2 Fubiniova věta pro dvojný integrál

Základní metodou pro výpočet dvojného integrálu je převod dvojného integrálu na dva jednoduché integrály. Tato metoda je popsána v následujících dvou větách.

Věta 6.1 (Fubini)**.** *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na obdélníku $M = [a,\, b] \times [c,\, d]$. Pak platí*

$$\iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{6.2}$$

Poznámka 6.2. a) Integrál na pravé straně výrazu (6.2) se nazývá dvojnásobný integrál. V tomto integrálu integrujeme postupně nejprve podle y a pak podle x. Záměnou proměnných x a y dostaneme

$$\iint_M f(x, y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y.$$

Znamená to, že nezáleží na pořadí, v jakém na pravé straně integrujeme.

b) Důležitým předpokladem je spojitost funkce. Není-li funkce $f(x, y)$ spojitá na obdélníku J, pak uvedené tvrzení neplatí – dvojný integrál nemusí existovat a nelze změnit pořadí integrace v dvojnásobném integrálu.

c) V případě, že má integrovaná funkce tvar součinu $f(x)g(y)$, kde f je spojitá funkce na $[a, b]$ a g je spojitá funkce na $[c, d]$, je možné výpočet zjednodušit

$$\iint_M f(x)g(y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_c^d f(x)g(y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x \cdot \int_c^d g(y) \,\mathrm{d}y.$$

Příklad 6.3. Vypočtěte

$$\iint_M x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je obdélník s vrcholy $A = [0, 1]$, $B = [2, 1]$, $C = [2, 2]$ a $D = [0, 2]$.

Řešení. Vidíme, že platí $0 \leq x \leq 2$ a $1 \leq y \leq 2$. Podle Fubiniovy věty pak dostáváme

$$\iint\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_1^2 x^2 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \mathrm{d}x = \int_0^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2}x^2 \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^2 \frac{3}{2}x^2 \,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^2 = 4.$$

Pokud zvolíme opačné pořadí integrace bude výpočet vypadat takto

$$\iint\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_0^2 x^2 y \,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_1^2 \left[\frac{x^3}{3} y \right]_0^2 \mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{8}{3} y \,\mathrm{d}y =$$
$$= \left[\frac{4}{3} y^2 \right]_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{4}{3} = 4.$$

Vzhledem k tomu, že integrační oblast je obdélník a integrovaná funkce je tvaru $f(x,y) = g(x)h(y)$, můžeme využít předchozí poznámky

$$\iint\limits_M x^2 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}x \cdot \int_1^2 y \,\mathrm{d}y = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2} \right]_1^2 = \frac{8}{3} \cdot \left(2 - \frac{1}{2} \right) = 4.$$

▲

Uvedenou větu lze zobecnit pro integraci přes „deformovaný obdélník“.

Věta 6.4 (Fubini)**.** *Nechť funkce $f(x,y)$ je spojitá na množině $M \subset \mathbb{R}^2$, která je dána vztahem* (6.1)*. Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x,y) \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x. \tag{6.3}$$

Příklad 6.5. Vypočtěte

$$\iint\limits_M x^3 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je čtvrtkruh o daném poloměru $r \geq 0$ se středem v počátku, ležící v prvním kvadrantu.

Řešení. Množinu, přes kterou integrujeme, můžeme popsat nerovnostmi

$$0 \leq x \leq r, \qquad 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2},$$

Dosazením do (6.3) dostaneme

$$\iint\limits_A x^3 y \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^r \left(\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

Pro vnitřní integrál dostáváme

$$\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} x^3 y \,\mathrm{d}y = x^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{r^2-x^2}} = \frac{1}{2}x^3(r^2-x^2).$$

Proto dvojný integrál je

$$\iint\limits_M x^3 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^r (x^3r^2 - x^5)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4r^2}{4} - \frac{x^6}{6}\right]_0^r = \frac{r^6}{24}$$

▲

Příklad 6.6. Vypočtěte

$$\iint\limits_M (2x+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

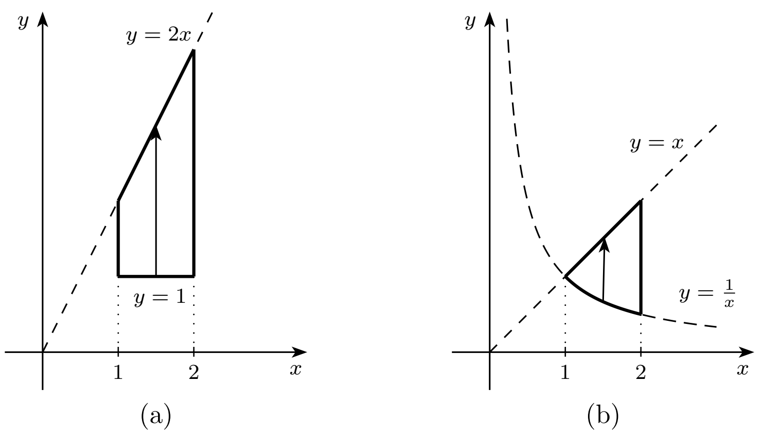
kde množina M je lichoběžník určený přímkami $x = 1$, $x = 2$, $y = 1$ a $y = 2x$

Řešení. Z obrázku 6.1a vidíme, že platí $1 \leq x \leq 2$ a $1 \leq y \leq 2x$. Dostáváme

$$\iint\limits_M (2x+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_1^{2x} (2x+y)\ \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[2xy + \frac{y^2}{2}\right]_1^{2x} \mathrm{d}x =$$

$$= \int_1^2 \left(4x^2 + 2x^2 - 2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x = \left[2x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x\right]_1^2 = \frac{21}{2}.$$

▲



Obrázek 6.1: Množiny z příkladů 6.6 a 6.7

.

Příklad 6.7. Vypočtěte

$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde množina M je ohraničená křivkami $y = x$, $x = 2$ a $xy = 1$.

Řešení. Z obrázku 6.1b vidíme, že platí $1 \leq x \leq 2$ a $\frac{1}{x} \leq y \leq x$, přičemž souřadnici $x = 1$ jsem dostali z řešení rovnice $\frac{1}{x} = x$. Integrovaná funkce je na oblasti M spojitá. Dostáváme

$$\iint\limits_M \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[-\frac{x^2}{y} \right]_{\frac{1}{x}}^{x} \mathrm{d}x =$$

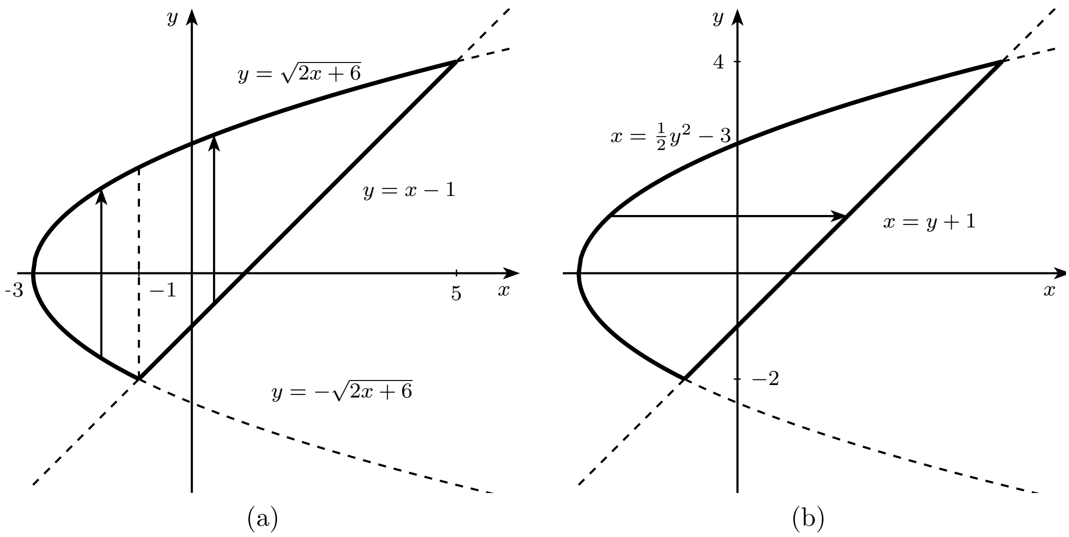
$$= \int_1^2 \left(-x + x^3 \right) \mathrm{d}x = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{4}.$$

▲

Příklad 6.8. Vypočtěte

$$\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je množina ohraničená přímkou $y = x - 1$ a parabolou $y^2 = 2x + 6$.



Obrázek 6.2: Různé popisy množiny M z příkladu 6.8

Řešení. Nejprve vyjádříme danou množinu pomocí nerovností. K tomu potřebujeme určit průsečíky přímky a paraboly. Vyjádříme-li z obou předpisů proměnnou x, pak z rovnosti

$$y + 1 = \frac{y^2 - 6}{2}$$

dostaneme y-ové souřadnice těchto průsečíků, tj. $y = -2$ a $y = 4$. Dosazením do rovnice přímky získáme x-ové souřadnice $x = -1$ a $x = 5$. Máme dvě možnosti, jak vyjádřit množinu M.

a) Při obvyklém pořadí integrace $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ vyjadřujeme množinu M pomocí nerovností tvaru (6.1). Tj. je ohraničená funkcemi proměnné x a dolní hranice je složena ze dvou částí, proto musíme v tomto případě množinu M rozdělit na dvě množiny $M = M_1 \cup M_2$, kde

$$\begin{array}{lll} M_1 & : -3 \le x \le -1, & -\sqrt{2x+6} \le y \le \sqrt{2x+6}, \\ M_2 & : -1 \le x \le 5, & x - 1 \le y \le \sqrt{2x+6}. \end{array}$$

Při integraci v pořadí $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$ tak musíme daný integrál rozdělit na dva integrály

$$\iint_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-3}^{-1}\left(\int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{5}\left(\int_{x-1}^{\sqrt{2x+6}} xy\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$$

b) Výhodnější proto bude integrovat v opačném pořadí $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. Pak M vyjádříme nerovnostmi

$$-2 \le y \le 4, \qquad \frac{1}{2}y^2 - 3 \le x \le y + 1$$

a dvojný integrál je roven

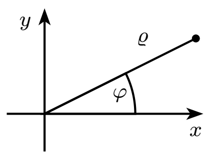
$$\begin{aligned} \iint_A xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{-2}^{4}\left(\int_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1} xy\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y = \int_{-2}^{4}\left[\frac{x^2}{2}y\right]_{\frac{1}{2}y^2-3}^{y+1}\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4} y\left[(y+1)^2 - (\frac{1}{2}y^2-3)^2\right]\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{4}\left(-\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y\right)\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2\right]_{-2}^{4} = 36. \end{aligned}$$

▲

6.3 Polární souřadnice

Integrujeme-li přes množinu M, která je ohraničená kružnicí (částí kružnice, mezikružím), pak místo kartézských souřadnic x, y je výhodné používat polární souřadnice ϱ, φ.

Nechť bod v rovině má kartézské souřadnice $[x, y]$. Pak polární souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku a φ úhel, který svírá *průvodič* (tj. úsečka spojující bod s počátkem) s kladným směrem osy x. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do polárních:



$$x = \varrho\cos\varphi,$$
$$y = \varrho\sin\varphi.$$

Například, kruh o poloměru r je v polárních souřadnicích popsán $\varrho = r$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Podobně polopřímka $y = x$ pro $x \ge 0$ je popsána $\varphi = \frac{\pi}{4}$, $\varrho \ge 0$.

Příklad 6.9. Popište množinu, která je zapsaná v polárních souřadnicích:

$$2 \leq \varrho \leq 4, \quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Řešení. Jde o mezikruží ohraničené kružnicemi se středem v počátku a poloměry $r = 2$, $r = 4$ a omezené přímkami $y = x$ a $x = 0$ (tj. osa y). ▲

Při transformaci integrálu do polárních souřadnic hraje důležitou roli determinant

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi \end{vmatrix} = \varrho\cos^2\varphi + \varrho\sin^2\varphi = \varrho.$$

Tento determinant se nazývá *jakobián* zobrazení F pro převod kartézských souřadnic do polárních.

6.4 Transformace dvojného integrálu

Jestliže při výpočtu dvojného integrálu použijeme pro vyjádření množiny M polární souřadnice ϱ, φ, pak daný integrál transformujeme do polárních souřadnic, kde se objeví jakobián, a po té použijeme Fubiniovu větu. Tento postup lze popsat následujícím způsobem:

Věta 6.10. *Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na množině M a nechť je tato množina určená v polárních souřadnicích nerovnostmi*

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varrho_1(\varphi) \leq \varrho \leq \varrho_2(\varphi).$$

Pak platí

$$\iint\limits_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$$

Příklad 6.11. Vypočtěte

$$\iint\limits_M (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je kruh $x^2 + y^2 \leq 9$.

Řešení. Nejprve popíšeme množinu M v polárních souřadnicích. Rovnice $x^2 + y^2 = 9$ určuje kružnici se středem v počátku a poloměrem 3. V polárních souřadnicích tak dostáváme

$$0 \leq \varrho \leq 3, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Nyní podle věty 6.10 dostaneme

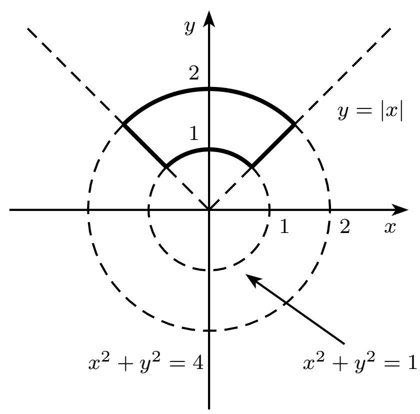
$$\iint\limits_M (x - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^3 \varrho^2(\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\varrho^3 \right]_0^3 (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$

$$= 9 \int_0^{2\pi} (\cos\varphi - \sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 9\,[\sin\varphi + \cos\varphi]_0^{2\pi} = 0.$$

▲

Příklad 6.12. Vypočtěte
$$\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
kde oblast M je čtvrtinou kruhu $x^2+y^2 \leq 1$ ležící v prvním kvadrantu.

Řešení. Množinu M v polárních souřadnicích můžeme popsat nerovnostmi
$$0 \leq \varrho \leq 1, \qquad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$
Připomeňme, že platí
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$
Podle věty 6.10 dostaneme
$$\begin{aligned}
\iint_M \sqrt{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2(\sin^2 x+\cos^2 x)}\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^1 \varrho\sqrt{1-\varrho^2}\,\mathrm{d}\varrho = \\
&= \left| \begin{array}{c} 1-\varrho^2 = t \\ -2\varrho\,\mathrm{d}\varrho = \mathrm{d}t \\ 1 \rightsquigarrow 0, 0 \rightsquigarrow 1 \end{array} \right| = [\varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} \int_1^0 \frac{-1}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{4}\left[\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\right]_1^0 = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$
▲



Obrázek 6.3: Množina M z příkladu 6.13

Příklad 6.13. Vypočtěte
$$\iint_M \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$
kde pro oblast M platí $1 \leq x^2+y^2 \leq 4$, $y \geq |x|$.

Řešení. Oblast ohraničená danými křivkami je část mezikruží, která je ohraničená přímkami $y = x$ a $y = -x$. Popsat mezikruží již umíme, jak můžeme popsat dané přímky? Jedna z možností je přímo, z názorného významu polárních souřadnic, tj. $y = x$ je $\varphi = \frac{\pi}{4}$ a $y = -x$ je $\varphi = \frac{3\pi}{4}$. Druhá možnost je pomocí dosazení transformačních rovnic a řešení příslušné goniometrické rovnice, například pro $y = x$, dostáváme $\cos\varphi = \sin\varphi$ a odtud $\varphi = \frac{\pi}{4}$. V polárních souřadnicích tak můžeme množinu M popsat nerovnostmi:

$$1 \leq \varrho \leq 2, \qquad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Pro daný integrál platí

$$\begin{aligned}\iint\limits_M \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left(\int_1^2 \varrho^3(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\right) \mathrm{d}\varphi = \\ &= \int_1^2 \varrho^3\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_1^2 \cdot \left[\varphi\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} = \frac{15}{8}\pi.\end{aligned}$$

▲

Nyní podrobněji popíšeme transformaci dvojného integrálu. Tu lze provést nejen pro polární souřadnice, ale pro libovolnou „pěknou“ transformaci. Příkladem je zobrazení, které transformuje rovnoběžník na obdélník (takové zobrazení je lineární), nebo zobrazení které transformuje elipsu na obdélník. Výběr transformace se provádí podle tvaru množiny, přes kterou integrujeme.

Nejprve zaveďme následující pojmy.

Definice 6.14. Nechť je dáno zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené rovnicemi

$$x = k(u, v), \quad y = l(u, v), \tag{6.4}$$

kde funkce k a l mají spojité parciální derivace prvního řádu. Pak F se nazývá *spojitě diferencovatelné zobrazení* a determinant

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} k_u & l_u \\ k_v & l_v \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení F. Jestliže $\mathcal{J}(u, v) \neq 0$, pak se toto zobrazení nazývá *regulární.*

Například, lineární zobrazení $x = au + bv$, $y = cu + dv$ má jakobián $J = ad - bc$. Toto zobrazení je regulární, jestliže $ad \neq bc$. Toto zobrazení při vhodné volbě konstant transformuje rovnoběžník v rovině xy na obdélník v rovině uv.

Věta 6.15. *Nechť je dána spojitá funkce f proměnných x a y na množině M dané vztahem* (6.1). *Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární zobrazení zadané rovnicemi* (6.4) *a nechť $M =$*

$F(B)$. *Pak platí*

$$\iint\limits_M f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B f[k(u,v),l(u,v)]|\mathcal{J}(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Příklad 6.16. Určete obsah rovnoběžníku M:

$$x \le y \le x+1, \qquad 2x-2 \le y \le 2x. \tag{6.5}$$

Řešení. Označme nové proměnné

$$u = y - x, \qquad v = y - 2x. \tag{6.6}$$

Pak z (6.5) dostaneme

$$0 \le u \le 1, \qquad -2 \le v \le 0,$$

což je obdélník o stranách 1 a 2 a má velikost $m(B) = 2$.

Z (6.6) dostaneme

$$x = u - v, \qquad y = 2u - v.$$

Jakobián tohoto zobrazení je

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Podle věty 6.15 platí

$$m(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_B \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = m(B) = 2.$$

▲

6.5 Aplikace dvojného integrálu

Příklad 6.17. Určete obsah kruhu o poloměru R.

Řešení. Pro určení daného obsahu musíme spočítat $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina M je tvořena daným kruhem. Kvůli jednoduchosti umístíme kruh do počátku a množinu M popíšeme v polárních souřadnicích, dostaneme tak $0 \le \varrho \le R$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Pro daný integrál tedy máme

$$m(M) = \iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R \varrho\,\mathrm{d}\varrho = [\varphi]_0^{2\pi} \cdot \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^R = \pi R^2$$

▲

Příklad 6.18. Vypočtěte obsah obrazce ohraničeného kružnicí $x^2 + y^2 = 2x$ a přímkami $y = x$, $y = 0$.

Řešení. Hledaný obsah bude určen integrálem $\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina určená daným obrazcem. Upravíme-li doplněním na úplný čtverec rovnici $x^2+y^2=2x$, dostaneme

$$(x-1)^2+y^2=1,$$

což je rovnice kružnice se středem v bodě $[1,0]$ a poloměrem 1. Dosadíme-li za $x=\varrho\cos\varphi$ a za $y=\varrho\sin\varphi$ z transformačních rovnic, dostaneme pro danou kružnici rovnici $\varrho^2\cos^2\varphi+\varrho^2\sin\varphi=2\varrho\cos\varphi$ a po úpravě $\varrho=2\cos\varphi$. Dané přímky mají rovnice $\varphi=0$ a $\varphi=\frac{\pi}{4}$, máme tak popis množiny M

$$0\le\varrho\le2\cos\varphi,\qquad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}.$$

Připomeňme, že platí

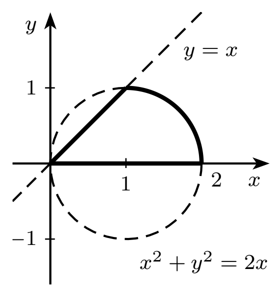
$$\cos^2x=\frac{1+\cos2x}{2}.$$

Podle věty 6.10 dostáváme

$$\iint\limits_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_0^{2\cos\varphi}\varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\varrho^2\right]_0^{2\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos2\varphi)\,\mathrm{d}\varphi=\left[\varphi+\frac{1}{2}\sin2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}.$$

▲



Obrázek 6.4: Množina M z příkladu 6.18

Příklad 6.19. Určete objem V tělesa, které je ohraničené plochou rotačního paraboloidu $z=x^2+y^2$ nad čtvercem určeným body $[0,0]$, $[1,0]$, $[0,1]$ a $[1,1]$.

Řešení. Objem daného tělesa je dán integrálem $\iint\limits_M(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina tvořená daným čtvercem. Pro hledaný objem tak dostáváme

$$V=\iint\limits_M(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\int_0^1(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^1\mathrm{d}x=$$

$$=\int_0^1\left(x^2+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x}{3}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

▲

Příklad 6.20. Určete hmotnost H obdélníkové desky $M\colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le \frac{3}{2}$, která má v každém bodě $[x, y]$ plošnou hustotu $\rho(x, y) = xy$.

Řešení. Pro hmotnost H tenké desky M platí

$$H = \iint\limits_M \rho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dostáváme tak

$$H = \iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(\int_0^{\frac{3}{2}} xy\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\frac{3}{2}} y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 \cdot \left[\frac{y^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{4}.$$

▲

Poznámka 6.21. Mezi další fyzikální aplikace patří například určení momentů setrvačnosti či těžiště daného rovinného útvaru, případně určení celkového elektrické náboje na rovinné desce.

Závěrem ukažme, jak lze dvojný integrál použít pro výpočet integrálu funkce jedné proměnné v případě, že neznáme primitivní funkci.

Příklad 6.22. Vypočtěte nevlastní integrál

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Podle poznámky 6.2 c) platí

$$\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^a \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \iint\limits_M \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_M \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

kde M je čtverec $[0, a] \times [0, a]$. Pro $a \to \infty$ dostaneme

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^\infty \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \iint\limits_I \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{6.7}$$

kde I je první kvadrant. Pro výpočet dvojného integrálu použijeme transformaci do polárních souřadnic a dostaneme

$$\iint\limits_I \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\varrho^2}\varrho\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi.$$

Použijeme substituci $t = \varrho^2$. Pak $\mathrm{d}t = 2\varrho\,\mathrm{d}\varrho$ a dostaneme

$$\iint\limits_I \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \cdot \frac{1}{2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Odtud a z (6.7) plyne

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

▲

Cvičení

1. Vypočtěte následující integrály

   a) $\iint\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je čtverec určený body $[0,0]$,$[2,0]$,$[0,2]$ a $[2,2]$.
   b) $\iint\limits_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je lichoběžník omezený přímkami $y=-1$, $y=x$, $x=0$ a $x=2$.
   c) $\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je množina ohraničena nerovnostmi $1\le x\le 4$, $\frac{1}{x}\le y\le\sqrt{x}$.
   d) $\iint\limits_M xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je trojúhelník určený body $[0,0]$, $[1,1]$ a $[2,0]$.
   e) $\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena křivkami $y=x^2$, $y=x$.
   f) $\iint\limits_M (12+y-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena parabolami $y=x^2$, $y^2=x$.
   g) $\iint\limits_M \frac{y}{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde M je ohraničena přímkami $x=0$, $x=2\pi$, $y=0$ a grafem funkce $y=2+\sin x$.

2. Pomocí transformace do polárních souřadnic vypočtěte následující integrály

   a) $\iint\limits_M (x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$.
   b) $\iint\limits_M xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde množina M je menší kruhová úseč vyťatá přímkou $x+y=1$ v kruhu $x^2+y^2\le 1$.
   c) $\iint\limits_M \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$.
   d) $\iint\limits_M \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2-2y\le 0$.
   e) $\iint\limits_M \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 3$, $y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y\le\sqrt{3}x$
   f) $\iint\limits_M (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $1\le x^2+y^2\le 4$, $y\ge 0$, $y\le x$.
   g) $\iint\limits_M y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, kde pro množinu M platí $x^2+y^2\le 4$, $y\le x$, $y\ge -x$.

3. Určete obsah množiny M

   a) Množina M je ohraničena hyperbolou $xy=1$ a přímkou $2x+2y=5$.
   b) Množina M je omezená kružnicemi $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$ a přímkami $y=x$, $y=0$.

4. Pomocí nových proměnných $u=\frac{y}{x}$ a $v=yx$ vypočítejte obsah množiny M, která je ohraničená funkcemi $y=x$, $y=2x$, $y=\frac{1}{x}$ a $y=\frac{4}{x}$.

   Výsledky:

   1. a) $\frac{32}{3}$, b) $\frac{14}{5}$, c) $\frac{21}{2}-\ln 2$, d) $\frac{1}{3}$, e) $\frac{3}{20}$, f) $4+\frac{9}{140}$, g) $\frac{3\pi}{2}$.
   2. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{20}$, c) $\frac{\pi(\mathrm{e}-1)}{2\mathrm{e}}$, d) $\frac{32}{9}$, e) $\frac{\pi}{6}$, f) $\frac{15}{16}\pi$, g) 0.
   3. a) $\frac{15}{8}-2\ln 2$, b) $\frac{3}{4}\pi-\frac{3}{2}$
   4. $m(M)=\ln 2$

Kapitola 7

Trojný integrál

Podobně jako jsme v předcházející kapitole integrovali funkci dvou proměnných, budeme se nyní zabývat integrálem funkce tří proměnných – *trojným integrálem.*

Fyzikálně můžeme definovat trojný integrál takto: Hmotnost tělesa je rovna součinu jeho hustoty a objemu. Máme-li těleso $V \subset \mathbb{R}^3$ a jeho hustota je v bodě (x, y, z) rovna $f(x, y, z)$, pak hmotnost tohoto tělesa je dána trojným integrálem

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Geometricky můžeme definovat trojný integrál funkce $f(x, y, z) \equiv 1$ na množině (tělese) V jako míru této množiny (tj. objem tělesa)

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = m(V).$$

K výpočtu slouží opět Fubiniova věta, která převádí trojný integrál na trojnásobný, a transformace integrálu, nejčastěji do válcových nebo sférických souřadnic.

7.1 Fubiniova věta pro trojný integrál

Základní metodou pro výpočet trojného integrálu je Fubiniova věta, která je podobná jako pro dvojný integrál.

Věta 7.1 (Fubini). *Nechť funkce $f(x, y, z)$ je spojitá na kvádru (trojrozměrném intervalu) $J = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Pak trojný integrál je*

$$\iiint\limits_J f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_c^d \left(\int_e^g f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Poznámka 7.2. a) Jednoduché integrály na pravé straně jsou dobře definované (tj. funkce jsou integrovatelné). Podrobněji, označíme-li $J_1 = [c, d] \times [e, g]$, pak platí:

1) Funkce $h(x) = \iint\limits_{J_1} g(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ je integrovatelná na intervalu $[a,b]$ a
$$\iiint\limits_{J} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\iint\limits_{J_1} g(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}x.$$

2) Podobně, funkce $k(y,z) = \int_a^b g(x,y,z)\,\mathrm{d}x$ je integrovatelná na dvojrozměrném intervalu J_1 a
$$\iiint\limits_{J} g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{J_1} k(y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint\limits_{J_1} \left(\int_a^b g(x,y,z)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

b) Když jsme počítali dvojný integrál přes obdélník, nezáleželo na pořadí v jakém integrujeme, podobně ani u trojného integrálu nezáleží při integraci na pořadí, pokud integrujeme přes kvádr.

Příklad 7.3. Vypočtěte trojný integrál
$$\iiint\limits_{V} (x+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$
kde množina V je krychle, pro kterou platí $0 \le x \le 1$, $1 \le y \le 2$ a $0 \le z \le 1$.

Řešení. Použijeme větu 7.1, přičemž meze trojnásobného integrálu jsou zřejmé ze zadání.
$$\iiint\limits_{V} (x+y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \left\{ \int_1^2 \left(\int_0^1 (x+y)\ \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_1^2 (x+y)\,[z]_0^1\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(\int_1^2 (x+y)\ \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_1^2 \mathrm{d}x =$$
$$= \int_0^1 \left(2x + 2 - x - \frac{1}{2} \right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x + \frac{3}{2} \right) \mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_0^1 = 2.$$

▲

Věta 7.4 (Fubini)**.** *Nechť je dána množina v rovině*
$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$
kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ jsou spojité funkce na intervalu $[a,b]$ a $\varphi(x) \le \psi(x)$, a množina v prostoru
$$V\ = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \colon\ [x,y] \in M,\ \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\},$$
kde $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ jsou spojité funkce na množině M a $\Phi(x,y) \le \Psi(x,y)$.

Je-li funkce $f(x,y,z)$ spojitá na množině V v prostoru, pak platí
$$\iiint\limits_{V} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Jinými slovy, trojný integrál převedeme na trojnásobný integrál „od bodu k bodu“, „od funkce k funkci“ a „od plochy k ploše“. Postupně integrujeme podle z, pak podle y a nakonec podle x.

Příklad 7.5. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint_V xz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le x$ a $0 \le z \le \sqrt{x+y}$.

Řešení. Můžeme rovnou použít Fubiniovu větu 7.4 a daný integrál přepsat jako trojnásobný

$$\iiint_V xz \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^2 \left\{ \int_0^x \left(\int_0^{\sqrt{x+y}} xz \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^x \left[xz^2 \right]_0^{\sqrt{x+y}} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(\int_0^x (x^2 + xy) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^2 \left[x^2 y + \frac{xy^2}{2} \right]_0^x \mathrm{d}x =$$

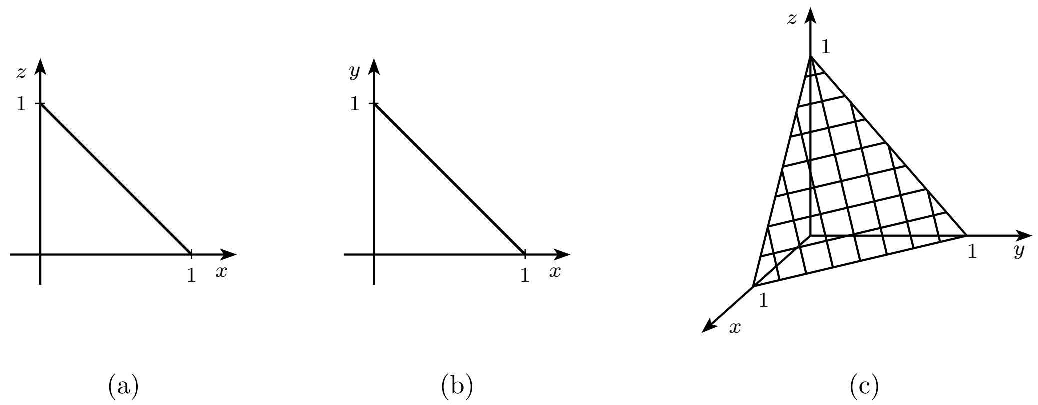
$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(x^3 + \frac{x^3}{2} \right) \mathrm{d}x = \frac{3}{4} \int_0^2 x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{3}{4} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 3.$$

▲

Příklad 7.6. Vypočtěte

$$\iiint_V z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde množina V je ohraničena rovinami $x + y + z = 1$, $z = 0$, $y = 0$ a $x = 0$.



Obrázek 7.1: Zobrazení množiny V z příkladu 7.6

Řešení. Při výpočtu trojného integrálu, kdy daná množina není dána nerovnostmi, je výhodné si nakreslit dva obrázky, jeden pro danou množinu V a jeden pro její projekci na některou ze souřadných rovin (např. rovinu xy). V tomto případě můžeme vidět, že spodní hranicí našeho tělesa je rovina $z = 0$ a horní hranicí je rovina $x + y + z = 1$, resp. $z = 1 - x - y$. Obě tyto roviny se protínají v přímce $x + y = 1$ ($y = 1 - x$), které leží v rovině xy. Projekce do roviny xy je proto trojúhelník a máme tak popis dané množiny

$$V = \{(x, y, z) \colon 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x, 0 \le z \le 1 - x - y\},$$

což nám umožní vypočítat daný integrál pomocí Fubiniovy věty

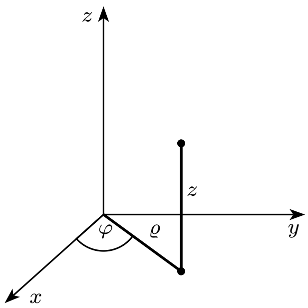
$$\begin{aligned}\iiint\limits_V z \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} z \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{1-x-y} \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1 - x - y)^2 \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\frac{(1 - x - y)^3}{3} \right]_0^{1-x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1 - x)^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \left[-\frac{(1 - x)^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

▲

7.2 Válcové souřadnice

Integrujeme-li přes válec V nebo jeho část, pak místo kartézských souřadnic x, y, z je výhodné používat válcové souřadnice ϱ, φ a z.

Nechť bod v prostoru má kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Pak válcové souřadnice jsou z (beze změny) a místo kartézských souřadnic x, y jsou polární souřadnice průmětu tohoto bodu do roviny xy. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do válcových:



$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos \varphi, \\ y &= \varrho \sin \varphi, \\ z &= z. \end{aligned}$$

Příklad 7.7. Zapište ve válcových souřadnicích následující množiny:

a) válec s osou v ose z, poloměrem $r = 10$ a výškou $v = 100$;

b) část koule se středem v počátku, poloměrem $r = 2$ ležící v prvním oktantu (tj. $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$).

Řešení. a) Průmětem válce do roviny xy je kruh o poloměru 10. Vzhledem k tomu, že popis v této rovině provádíme pomocí polárních souřadnic a výška válce je 100, musí všechny body válce splňovat nerovnosti

$$0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \varrho \le 10, \qquad 0 \le z \le 100.$$

b) Průmětem části koule do roviny xy je čtvrtkruh, který můžeme v polárních souřadnicích popsat nerovnostmi

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varrho \leq 2.$$

Rovnice koule o poloměru 2 a středu v počátku je v kartézských souřadnicích $x^2+y^2+z^2 = 4$. Rovnici ve válcových souřadnicích dostaneme tak, že za x a y dosadíme transformační rovnice, tj.

$$x = \varrho\cos\varphi, \qquad y = \varrho\sin\varphi,$$

máme tak

$$z = \sqrt{4-\varrho^2}.$$

Celkem tak dostáváme popis naší množiny ve tvaru

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \qquad 0 \leq \varrho \leq 2, \qquad 0 \leq z \leq \sqrt{4-\varrho^2}.$$

▲

Jakobián zobrazení F pro převod kartézských souřadnic do válcových je determinant

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho & z_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\varrho\sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Vidíme, že tento jakobián je stejný jako pro polární souřadnice.

7.3 Transformace trojného integrálu

Protože válcové souřadnice jsou analogií polárních souřadnic v rovině, postupujeme při transformaci trojného integrálu do válcových souřadnic podobně jako při transformaci dvojného integrálu.

Věta 7.8. *Nechť funkce $f(x,y,z)$ je spojitá na množině $V \subset \mathbb{R}^3$ a nechť je tato množina určená ve válcových souřadnicích nerovnostmi*

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varrho_1(\varphi) \leq \varrho \leq \varrho_2(\varphi), \quad \Phi(\varrho,\varphi) \leq z \leq \Psi(\varrho,\varphi),$$

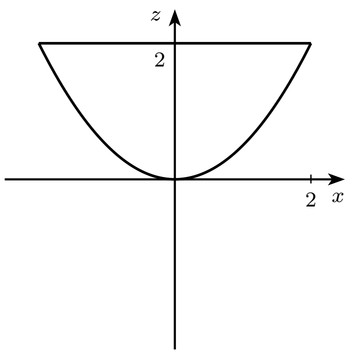
kde funkce ϱ_1, ϱ_2, $\Phi(\varrho,\varphi)$, $\Psi(\varrho,\varphi)$ jsou spojité. Pak platí

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} \left(\int_{\Phi(\varrho,\varphi)}^{\Psi(\varrho,\varphi)} f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi, z)\,\varrho\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi.$$

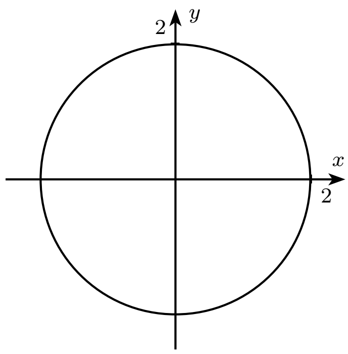
Příklad 7.9. Vypočtěte trojný integrál

$$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

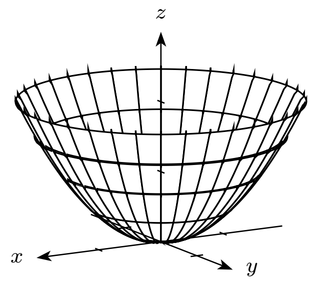
kde pro množinu V platí $x^2+y^2 \leq 2z$ a $z \leq 2$.



(a) Průmět do roviny xz



(b) Průmět do roviny xy



(c) Graf funkce $z = x^2 + y^2$

Obrázek 7.2: Množina V z příkladu 7.9

Řešení. Množina V představuje část rotačního paraboloidu $z = \frac{x^2+y^2}{2}$, který je shora seříznut rovinou $z = 2$, která je rovnoběžná s rovinou O_{xy}. Integrál transformujeme do válcových souřadnic. Řez rovinou $z = 2$ získáme dosazením do rovnice paraboloidu, máme tak $4 = x^2 + y^2$. Vidíme, že řezem je kružnice se středem v počátku a poloměrem 2, do stejné kružnice v rovině xy se promítá i dané těleso. Pro množinu V tak dostáváme ve válcových souřadnicích popis

$$0 \le \varrho \le 2, \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad \frac{\varrho^2}{2} \le z \ \le 2.$$

Pro daný integrál tak dostáváme

$$\iiint_V \left(x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^2 \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\varrho^2}{2}}^2 \varrho^3 \,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \varrho^3 \left[z\right]_{\frac{\varrho^2}{2}}^2 \,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho =$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(2\varrho^3 - \frac{\varrho^5}{2} \right) \mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\varrho = \int_0^2 \left(2\varrho^3 - \frac{\varrho^5}{2} \right) \left[\varphi\right]_0^{2\pi} \mathrm{d}\varrho =$$

$$= 2\pi \int_0^2 \left(2\varrho^3 - \frac{\varrho^5}{2} \right) \mathrm{d}\varrho = 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{2} - \frac{\varrho^6}{12} \right]_0^2 = \frac{16\pi}{3}.$$

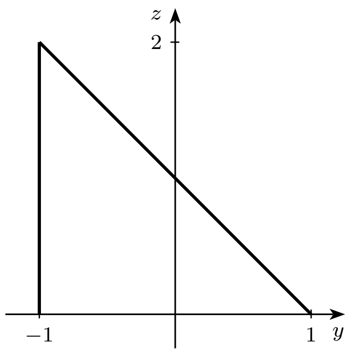
▲

Příklad 7.10. Vypočtěte

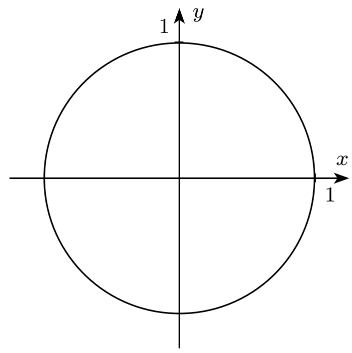
$$\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z,$$

kde V je množina omezená nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 1$, $z \le 1 - y$ a $z \ge 0$.

Řešení. Množina V je válec, který je seříznut rovinami $z = 0$ a $z = 1 - y$. Převodem do válcových souřadnic dostaneme $0 \le \varrho \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$ a dosazením transformačních rovnic



(a) Průmět do roviny yz



(b) Průmět do roviny xy

Obrázek 7.3: Popis množiny V z příkladu 7.10

do rovnice roviny $0 \leq z \leq 1 - \varrho \sin \varphi$. Máme tak

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^{1-\varrho\sin\varphi} \varrho^2\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \varrho^2\,[z]_0^{1-\varrho\sin\varphi}\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \varrho^2 (1-\varrho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\varrho^3}{3} - \frac{\varrho^4}{4}\sin\varphi \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\sin\varphi \right) \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left[\frac{1}{3}\varphi + \frac{1}{4}\cos\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{3}.$$

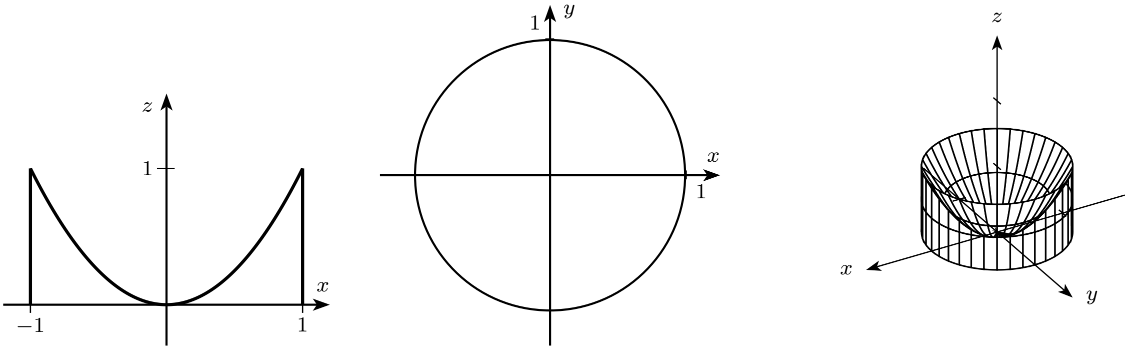
▲

Příklad 7.11. Vypočtěte

$$\iiint\limits_V z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

kde pro množinu V platí $x^2+y^2 \geq z$, $x^2+y^2 \leq 1$, $z \geq 0$.

Řešení. Množina V je válec, ze kterého je „vyříznut“ kousek rotačního paraboloidu. Opět pomocí transformace do válcových souřadnic dostaneme $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0,1]$ (celé těleso je uvnitř daného válce), ve směru osy z je těleso omezené rovinou xy a daným paraboloidem,



(a) Průmět do roviny xz (b) Průmět do roviny xy (c) Obraz množiny V

Obrázek 7.4: Ilustrace množiny V z příkladu 7.11

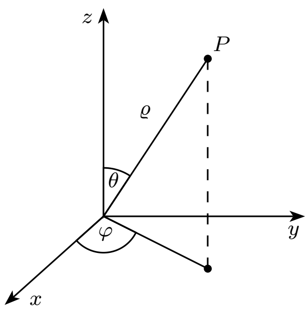
tedy $z \in [0, x^2 + y^2]$ neboli $z \in [0, \varrho^2]$ po dosazení válcových souřadnic. Dostáváme tak

$$\iiint\limits_V z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^1 \left(\int_0^{\varrho^2} \varrho z \, \mathrm{d}z \right) \mathrm{d}\varrho \right\} \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \varrho \left[z^2 \right]_0^{\varrho^2} \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 \varrho^5 \, \mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left[\varrho^6 \right]_0^1 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$
$$= \frac{1}{12} \left[\varphi \right]_0^{2\pi} = \frac{\pi}{6}.$$

▲

Trojný integrál lze transformovat také do jiných souřadnic. Dalším typickým příkladem transformace jsou *sférické souřadnice* ϱ, φ a θ, které jsou definovány takto: Nechť bod v prostoru má kartézské souřadnice $[x, y, z]$. Pak souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku (průvodič), θ je úhel, který svírá průvodič s kladným směrem osy z, a φ úhel, který svírá průmět průvodiče do roviny xy, tj. hodnota $\varrho \sin\theta$, s kladným směrem osy x.

Znamená to, že v rovině xy máme místo kartézských souřadnic x, y polární souřadnice s průvodičem $\varrho \sin\theta$ a úhlem φ. Odtud plynou rovnice transformace pro převod kartézských souřadnic do sférických:



$$x = \varrho \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = \varrho \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = \varrho \cos\theta.$$

Jakobián tohoto zobrazení je $\mathcal{J} = -\varrho^2 \sin\theta$.

Příklad 7.12. Zapište ve sférických souřadnicích kouli se středem v počátku a poloměrem $r = 4$.

Řešení. Výhodou sférických souřadnice je fakt, že koule se v nich dá popsat, podobně jako kvádr v kartézských souřadnicích, pomocí nerovností s konstantními mezemi. V tomto případě budou tyto nerovnosti tvaru

$$0 \leq \varrho \leq 4, \qquad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

▲

Poznámka 7.13. Podobně jako u dvojného integrálu bychom mohli formulovat větu o obecné transformaci trojného integrálu, opět je nutné integrovanou funkci při přechodu k novým souřadnicím násobit absolutní hodnotou jakobiánu této transformace.

7.4 Aplikace trojného integrálu

Příklad 7.14. Vypočítejte míru množiny V, která je určená nerovnostmi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2z \leq 0, \qquad x^2 + y^2 - z^2 \leq 0.$$

Řešení. Pro určení míry množiny V, potřebujeme spočítat $\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$. První nerovnost můžeme upravit do tvaru

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1,$$

jedná se proto o kouli se středem v bodě $[0, 0, 1]$ a poloměrem 1. Druhá nerovnost představuje část kužele s vrcholem v počátku. Dosadíme-li do obou rovnic sférické souřadnice dostaneme

$$\varrho^2 \sin^2\theta + \varrho^2\cos^2\theta - 2\varrho\cos\theta = 0 \quad \text{tj.} \quad \varrho = 2\varrho\cos\theta$$
$$\varrho^2 \sin^2\theta - \varrho^2\cos^2\theta = 0 \Longrightarrow \cos 2\theta = 0 \quad \text{tj.} \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Dostáváme tak integrační meze

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \varrho \leq 2\varrho\cos\theta$$

a výpočet daného integrálu je podle předchozí poznámky

$$\iiint\limits_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{2\cos\theta} \varrho^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi \right\} \mathrm{d}\theta =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{3}\varrho^3 \right]_0^{2\cos\theta} \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta = \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \right) \mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{16}{3}\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\theta \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \left| \begin{array}{c} \cos\theta = t \\ \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}t \\ 0 \rightsquigarrow 1, \frac{\pi}{4} \rightsquigarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{16}{3}\pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 t^3\,\mathrm{d}t = \pi.$$

▲

Cvičení

1. Vypočtěte následující integrály

   a) $\iiint\limits_V xy^2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.
   b) $\iiint\limits_V (7x + 2z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$.
   c) $\iiint\limits_V x^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde V je omezena rovinami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a $x + y + z = 1$.
   d) $\iiint\limits_V xy^2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$.
   e) $\iiint\limits_V (x - y + 2z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde V je omezena nerovnostmi $1 \leq x \leq 2$, $x \leq y \leq 2x$, $x + y \leq z \leq 2x + 3y$.
   f) $\iiint\limits_V 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde V je množina v prvním oktantu $(x, y, z \geq 0)$ omezena plochami $x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$ a $x + y = 1$.

2. Vypočtěte objem kužele pomocí dvojného a trojného integrálu.

3. Vypočtěte objem množiny V určené nerovnostmi

   a) $x^2 + y^2 \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 3 - x^2 - y^2$.
   b) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \quad x^2 + y^2 \leq 4$.

4. Pomocí transformace do válcových souřadnic vypočtěte následující integrály

   a) $\iiint\limits_V \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $x^2 + y^2 \leq 4$, $z \geq 0$, $z + y \leq 2$.
   b) $\iiint\limits_V x^2y \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq 0$, $|z| \leq 2$.
   c) $\iiint\limits_V yz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq y$.
   d) $\iiint\limits_V xz\sqrt{x^2 + y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$, kde pro množinu V platí $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $0 \leq z \leq 3$, $x \leq 0$, $y \geq 0$.

Výsledky:

1. a) $\frac{1}{12}$, b) $\frac{59}{270}$, c) $\frac{1}{60}$, d) $\frac{1}{90}$, e) $\frac{1035}{8}$, f) $\frac{5}{6}$.
2. $\frac{1}{3}\pi r^2 v$
3. a) $\frac{5}{12}\pi$, b) $\frac{4}{3}\pi(27 - 5\sqrt{5})$.
4. a) 8π, b) $\frac{248}{15}$, c) $\frac{64}{15}$, d) $-\frac{135}{8}$.

Kapitola 8

Diferenciální operátory matematické fyziky

Různé fyzikální problémy vedou k pojmům skalárního a vektorového pole. K jejich popisu často využíváme diferenciální operátory, kterými jsou gradient, rotace a divergence. Užití zmíněných operátorů umožňuje popsat a vysvětlit některé vlastnosti fyzikálních polí.

8.1 Vektorové funkce

Dosud jsme se setkávali se skalárními funkcemi. Připomeňmě, že *funkce* f (neboli skalární funkce) je zobrazení $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ a určuje velikost nějaké fyzikální veličiny (např. teplota, tlak).

Vektorová funkce je zobrazení $\vec{F}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, které bodu přiřadí vektor. To znamená, že vektorová funkce popisuje nejen velikost (danou velikostí daného vektoru), ale také směr nějaké fyzikální veličiny (např. gravitační síla, rychlost). Konkrétně v rovině je vektorová funkce zobrazení $\vec{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které bodu v rovině přiřadí vektor v rovině

$$\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y)), \tag{8.1}$$

kde $P(x,y)$, $Q(x,y)$ jsou funkce. Podobně vektorová funkce v prostoru je zobrazení $\vec{F}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, které bodu v prostoru přiřadí vektor v prostoru

$$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)), \tag{8.2}$$

kde $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ jsou funkce.

Ve fyzikální terminologii se místo skalární a vektorová funkce používá označení *skálární* a *vektorové pole.* . Vektorové pole v rovině a v prostoru často zapisujeme pomocí jednotkových vektorů ve směru souřadných os.

Uvažujme vektorové pole v rovině a označme jednotkové vektory ve směru os x a y

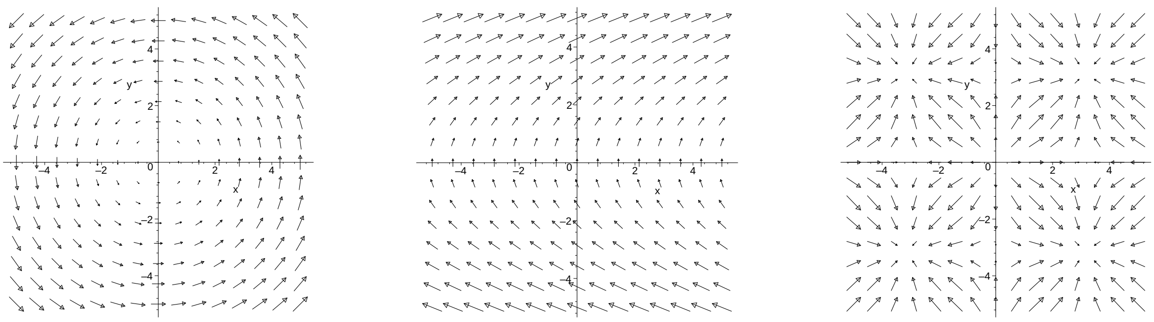
$$\vec{\imath} = (1,0), \qquad \vec{\jmath} = (0,1).$$

Pak vektorové pole (8.1) lze zapsat

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$$

nebo stučně $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath}$.

Nejjednodušší způsob jak si dané pole představit, je v několika bodech nakreslit šipky reprezentující vektor $\vec{F}(x, y)$, který začíná v bodě $[x, y]$.



(a) $\vec{F} = (-y, x)$ (b) $\vec{F} = (y, 2)$ (c) $\vec{F} = (\sin x, \sin y)$

Obrázek 8.1: Příklady vektorových polí v rovině

Příklad 8.1. Znázorněte vektorové pole $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$.

Řešení. Pomocí šipek znázorníme v rovině vektory v konkrétních bodech. Například v bodě $[1, 0]$ je vektor $\vec{F}(1, 0) = (0, 1) = \vec{\jmath}$, tj. jednotkový vektor ve směru osy y. Podobně v bodě $[2, 2]$ je vektor $\vec{F}(2, 2) = (-2, 2)$. Stejným způsobem vybereme i další reprezentanty a nakreslíme příslušné vektory. ▲

Ve fyzice nejčastěji používáme vektorové pole v prostoru. Označíme-li jednotkové vektory ve směru os x, y, a z

$$\vec{\imath} = (1, 0, 0), \qquad \vec{\jmath} = (0, 1, 0), \qquad \vec{k} = (0, 0, 1),$$

pak vektorové pole (8.2) lze zapsat

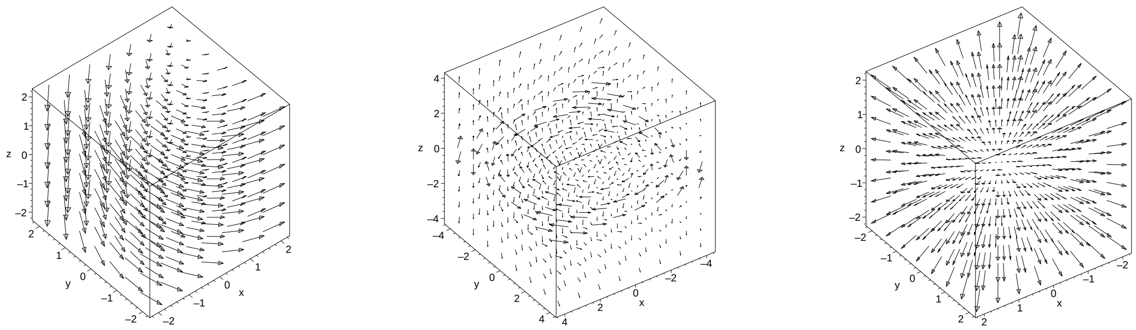
$$\vec{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\vec{\imath} + Q(x, y, z)\vec{\jmath} + R(x, y, z)\vec{k}.$$

Vektorová pole v prostoru můžeme znázornit analogicky jako vektorová pole v rovině.

Příklad 8.2. Newtonův gravitační zákon říká, že velikost gravitační síly $\vec{F}$ mezi dvěma tělesy s hmotnostmi m_1 a m_2 je dána vztahem

$$|\vec{F}| = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

kde r je vzdálenost mezi tělesy a κ je gravitační konstanta. Popište příslušné vektorové pole – tzv. gravitační pole.



(a) $\vec{F} = (-y, -2, x)$ (b) $\vec{F} = (\frac{y}{z}, -\frac{x}{z}, z)$ (c) $\vec{F} = (x, y, z)$

Obrázek 8.2: Příklady vektorových polí v prostoru

Řešení. Umístěme jedno z těles do počátku soustavy souřadnic a označme polohový vektor druhého tělesa $\vec{x} = (x, y, z)$. Potom vzdálenost r je rovna velikosti tohoto vektoru, tj.

$$r = |\vec{x}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Gravitační síla vztažená k druhému tělesu směřuje do počátku a jednotkový vektor v tomto směru je

$$-\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}.$$

Dostaneme tak gravitační sílu, která působí na těleso v bodě $[x, y, z]$, a je dána vztahem

$$\vec{F}(x, y, z) = -\kappa \frac{m_1 m_2}{r^3}(x, y, z).$$

▲

8.2 Gradient funkce

V kapitole o diferenciálním počtu jsme se setkali s pojmem gradient funkce f, který byl definován pro funkci dvou proměnných

$$\operatorname{grad} f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y)),$$

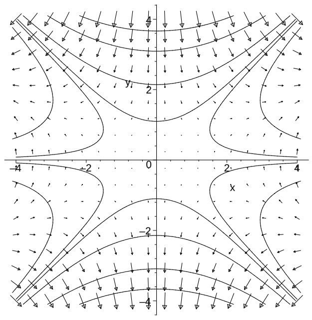
případně pro funkci tří proměnných

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = (f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z)).$$

Často stučně píšeme jen grad f. Gradient funkce je tak příkladem vektorového pole. Toto pole v každém bodě ukazuje směr největšího růstu funkce. Ve fyzice se vektorové pole $\vec{F}$, které je gradientem nějaké skalární funkce f, tj.

$$\vec{F} = \operatorname{grad} f,$$

nazývá *konzervativní vektorové pole* a danou funkci f nazýváme *potenciálovou funkcí (potenciálem)* pole $\vec{F}$.



Obrázek 8.3: Gradient a vrstevnice

Příklad 8.3. Najděte gradientové vektorové pole funkce $f(x,y) = x^2y - y^3$.

Řešení. Vzhledem k tomu, že grad f je dán vztahem

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

dostáváme

$$\operatorname{grad} f(x,y) = (2xy, x^2 - 3y^2).$$

Na obrázku 8.3 je příslušné pole společně s vrstevnicemi. Můžeme si povšimnout, že vektory gradientu jsou kolmé na vrstevnice a jsou větší čím jsou vrstevnice blíže u sebe. Proč je tomu tak? ▲

Vektor parciálních derivací

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

se nazývá *Hamiltonův operátor*. Pomocí tohoto operátoru můžeme zapsat gradient funkce

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{8.3}$$

Na vektorových polích v prostoru můžeme definovat dvě operace, které nám umožní popis jejich chování. Jde o *divergenci* a *rotaci* vektorového pole.

8.3 Divergence vektorového pole

Nechť $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ je vektorové pole v prostoru. Jestliže existují parciální derivace P_x, Q_y, R_z, pak *divergence* vektorového pole $\vec{F}$ je skalární funkce

$$\operatorname{div} \vec{F}(x,y,z) = P_x(x,y,z) + Q_y(x,y,z) + R_z(x,y,z).$$

Pomocí Hamiltonova operátoru můžeme divergenci vektorového pole zapsat jako skalární součin

$$\nabla \cdot \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (P, Q, R)$$

Význam této funkce můžeme vysvětlit například takto: Popisuje-li $\vec{F}$ rychlost proudění kapaliny nebo plynu, pak $\operatorname{div}\vec{F}$ popisuje míru změny množství této kapaliny (plynu), která proudí z bodu $[x, y, z]$. Jinými slovy, divergence měří schopnost kapaliny divergovat („rozbíhat se“) z bodu $[x, y, z]$. Je-li v nějakém bodě P divergence $\operatorname{div} F(P) > 0$, říkáme bodu P *zdroj* nebo *zřídlo*, je-li $\operatorname{div} F(P) < 0$, říkáme, že bod je *propad* nebo *výpusť*. V případě, že v každém bodě je $\operatorname{div} F = 0$, nazýváme vektorové pole $\vec{F}$ *bezzdrojové*.

Příklad 8.4. Vypočtěte divergenci vektorového pole
a) $\vec{F} = (x, y, z)$,
b) $\vec{F} = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$.

Řešení. a) Platí

$$P_x = 1, \qquad Q_y = 1, \qquad R_z = 1.$$

Proto

$$\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z) = 3,$$

tj. každý bod tohoto vektorového pole je zdroj, viz obrázek 8.2c.
b) Platí

$$P_x = 2xyz, \qquad Q_y = 2xyz, \qquad R_z = 2xyz.$$

Proto je divergence

$$\operatorname{div}\vec{F}(x, y, z) = 2xyz + 2xyz + 2xyz = 6xyz.$$

▲

8.4 Rotace vektorového pole

Předtím než přistoupíme k definici rotace vektorového pole, připomeňme pojem vektorového součinu.

Označme $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ jednotkové vektory ve směru souřadných os. Nechť jsou dány vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. *Vektorovým součinem* vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ rozumíme vektor $\vec{u} \times \vec{v}$,

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}. \tag{8.4}$$

Vektorový součin (8.4) lze vyjádřit

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k},$$

pak tedy

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1).$$

Nechť $\vec{F} = P\vec{\imath} + Q\vec{\jmath} + R\vec{k}$ je vektorové pole v prostoru. Jestliže existují všechny parciální derivace 1. řádu, pak *rotace* vektorového pole $\vec{F}$ je vektorové pole definované

$$\operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z) = (R_y(x,y,z) - Q_z(x,y,z), P_z(x,y,z) - R_x(x,y,z), Q_x(x,y,z) - P_y(x,y,z)). \tag{8.5}$$

Pomocí Hamiltonova operátoru můžeme rotaci zapsat jako vektorový součin

$$\nabla \times \vec{F}.$$

Význam rotace je například následující. Uvažujme částici blízko bodu $[x, y, z]$, ta má v kapalině tendenci rotovat kolem osy procházející bodem $[x, y, z]$ ve směru $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z)$. Rychlost této rotace závisí na velikosti vektoru $\operatorname{rot} \vec{F}(x, y, z)$. Jestliže v každém bodě platí $\operatorname{rot} \vec{F} = 0$, pak toto pole nazýváme *nevírové.*

Příklad 8.5. Najděte rotaci vektorového pole

$$\vec{F}(x,y,z) = (xyz, 0, -x^2).$$

Řešení. Podle (8.5) je rotace vektorového pole $\vec{F}$ rovna

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial(-x^2)}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{\partial xyz}{\partial z} - \frac{\partial(-x^2)}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial 0}{\partial x} - \frac{\partial xyz}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Vypočtením příslušných derivací získáme

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (0, xy + 2x, -xz).$$

▲

Následující dvě věty popisují některé základní vlastnosti rotace.

Věta 8.6. *Nechť f je funkce tří proměnných, která má spojité parciální derivace druhého řádu. Pak*

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{o} = (0, 0, 0). \tag{8.6}$$

Z této věty plyne, že je-li $\vec{F}$ konzervativní pole, pak $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{o}$. Platí také opačné tvrzení a tedy platí následující věta.

Věta 8.7. *Nechť $\vec{F}$ je vektorové pole definované na jednoduše souvislé množině v prostoru, jehož složky jsou spojitě diferencovatelné funkce. Pak*

$$\operatorname{rot} \vec{F} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F} \quad \textit{je konzervativní.}$$

Příklad 8.8. Ukažte, že vektorové pole intenzity elektrostatického pole bodového náboje

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}|^3}\vec{r}, \quad \text{kde} \quad \vec{r} = (x, y, z)$$

je a) konzervativní, b) nevírové.

Řešení. a) Konzervativní vektorové pole je definováno tak, že pro něj existuje skalární pole, jehož gradient je roven danému vektorovému poli. Nyní ukážeme, že pro vektorové pole $\vec{E}$ je toto skalární pole zadané skalární funkcí záporně vzatého elektrostatického potenciálu φ, kde

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r}\,|}.$$

Ukážeme tedy, že platí

$$\vec{E} = \operatorname{grad}(-\varphi) = -\operatorname{grad}\varphi. \tag{8.7}$$

Podle (8.3) je

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial x}, \frac{\partial \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial y}, \frac{\partial \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\partial z}\right) =$$

$$= -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}, \frac{z}{(\sqrt{x^2+y^2+z^2})^3}\right).$$

Zapíšeme-li tento vektor pomocí polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$, dostaneme

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|^3} = -\vec{E}.$$

Tím jsme dokázali platnost vztahu (8.7) a vektorové pole $\vec{E}$ je tedy konzervativní.

b) Ověřit, že vektorové pole $\vec{E}$ je nevírové, můžeme přímo, tj. výpočtem rotace $\vec{E}$. Vhodnějším způsobem je však použít vektorovou identitu (8.6) s uvážením, že v předchozím bodě jsme ukázali, že pole $\vec{E}$ je konzervativní. Platí tedy

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}(-\varphi) = \vec{o}.$$

Vektorové pole $\vec{E}$ je proto nevírové.

▲

Cvičení

1. Načrtněte vektorové pole:

   a) $\vec{F} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, b) $\vec{F} = \left(y, \frac{1}{2}\right)$,

   c) $\vec{F} = (0, 0, 1)$, d) $\vec{F} = (0, 0, x)$.

2. Vypočtěte gradient funkce:

   a) $f(x, y) = \ln(x + 2y)$, b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3. Vypočtěte divergenci vektorového pole:

   a) $\vec{F} = (xz, xyz, -y^2)$, b) $\vec{F} = (\mathrm{e}^x \sin y, \mathrm{e}^x \cos y, z)$,

   c) $\vec{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right)$, d) $\vec{F} = (\ln x \ln xy, \ln xyz)$.

4. Vypočtěte rotaci vektorového pole:

   a) $\vec{F} = (xz, xyz, -y^2)$, b) $\vec{F} = (y^2z^3, 2xyz^3, 3xy^2z^2)$,

   c) $\vec{F} = (xyz, 0, -x^2y)$, d) $\vec{F} = (2xy, x^2 + 2yz, y^2)$.

5. Existuje vektorové pole $\vec{F}$ takové, že $\operatorname{rot} \vec{F} = (x \sin y, \cos y, z - xy)$?

6. Dokažte platnost následujících identit za předpokladu, že existují všechny potřebné derivace a jsou spojité:

   a) $\operatorname{div}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{F} + \operatorname{div} \vec{G}$, b) $\operatorname{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} + \operatorname{rot} \vec{G}$.

7. Za předpokladů existence a spojitosti všech potřebných derivací dokažte, že platí

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = 0.$$

Výsledky:

2. a) $\operatorname{grad} f = \left(\frac{1}{x+2y}, \frac{2}{x+2y}\right)$, b) $\operatorname{grad} f = ()$.

3. a) $\operatorname{div} \vec{F} = z + xz$, b) $\operatorname{div} \vec{F} = 1$,
   c) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, d) $\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

4. a) $\operatorname{rot} \vec{F} = (-y(2 + x), x, yz)$, b) $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$,
   c) $\operatorname{rot} \vec{F} = (-x^2, 3xy, -xz)$, d) $\operatorname{rot} \vec{F} = \vec{0}$.

5. Neexistuje. Použijte větu 8.6.

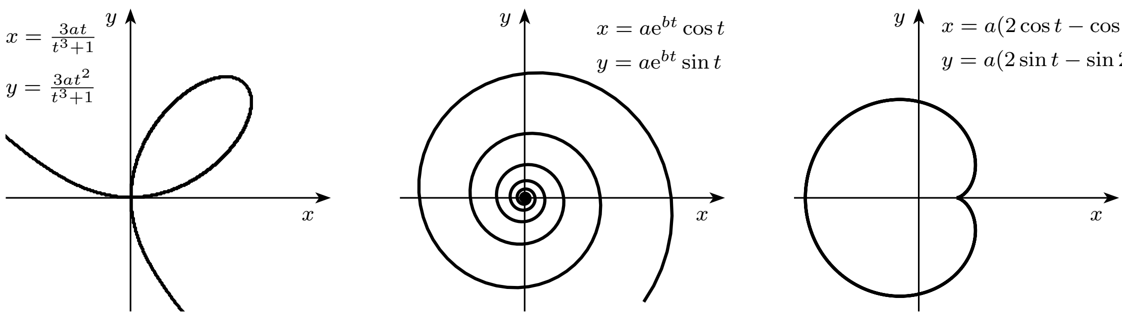
Kapitola 9

Křivkový integrál

V této kapitole budeme definovat integrál, který je podobný jednoduchému integrálu, který již známe. Na rozdíl od něj však nebudeme integrovat pouze přes interval $[a, b]$, ale přes křivku C. Tyto integrály, tzv. křivkové se objevují v mnoha fyzikálních aplikacích v oblastech jako jsou silová pole, proudění kapalin, elektřina, magnetismus apod.

9.1 Parametrické rovnice křivek

Dosud jsme popisovali rovinné křivky jako grafy funkcí proměnné x, tj. $y = f(x)$, případně jako grafy funkcí proměnné y, tj. $x = g(y)$. Některé křivky nelze tímto způsobem popsat (např. kružnici musíme popisovat jako dvě funkce).



(a) Descartův list (b) Logaritmická spirála (c) Kardioida

Obrázek 9.1: Příklady křivek daných parametricky

Proto se často křivky popisují tak, že obě souřadnice x, y jednotlivých bodů v rovině vyjádříme jako funkce třetí proměnné t

$$x = x(t), \qquad y = y(t).$$

Tyto rovnice nazýváme *parametrické rovnice* křivky a proměnnou t nazýváme *parametr*. Každá hodnota t určuje bod $[x, y]$ dané křivky, přičemž se změnou parametru t se mění také souřadnice bodu $[x, y] = [x(t), y(t)]$ a tím vykreslíme křivku C. Říkáme, že je *křivka daná parametricky*.

V praxi často proměnná t představuje čas a můžeme tak $[x, y] = [x(t), y(t)]$ interpretovat jako polohu částice v čase t.

Libovolnou křivku, která je grafem funkce $y = f(x)$, můžeme vždy lehce parametrizovat následujícím způsobem

$$x = t, \qquad y = f(t).$$

Příklad 9.1. Napište parametrické rovnice paraboly $y = x^2 - 4x + 3$.

Řešení. Podle předchozího je tuto křivku možno parametrizovat pomocí rovnic

$$x = t, \qquad y = t^2 - 4t + 3.$$

Toto není jediná možná parametrizace, jiná parametrizace stejné křivky je například

$$x = t + 1, \qquad y = t^2 - 2t.$$

Jak se přesvědčíme, že i tato druhá parametrizace popisuje stejnou křivku? Vyjádříme-li z první rovnice $t = x-1$ a dosadíme do druhé dostaneme $y = (x-1)^2 - 2(x-1) = x^2 - 4x + 3$. Obě parametrizace popisují stejnou parabolu. ▲

Až doposud jsme na parametr t nekladli žádné omezení a mohli jsme předpokládat, že jím může být libovolné reálné číslo. Obvykle je ovšem číslo t z nějakého uzavřeného intervalu a parametrické rovnice

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad t \in [a, b]$$

popisují křivku C s počátečním bodem $[f(a), g(a)]$ a koncovým bodem $[f(b), g(b)]$. Platí-li, že $[f(a), g(a)] = [f(b), g(b)]$, říkáme, že je daná křivka *uzavřená.*

Poznámka 9.2. Při různých výpočtech se často parametrizuje úsečka určená body $A[a_1, a_2]$ a $B[b_1, b_2]$. Její parametrické rovnice jsou

$$\begin{aligned} x &= a_1 + (b_1 - a_1)t, \\ y &= a_2 + (b_2 - a_2)t, \quad t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Užitečnou parametrizací je i parametrizace kružnice se středem $[a, b]$ a poloměrem r

$$x = a + r\cos t, \qquad y = b + r\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Orientace křivky Výhodou parametrického popisu křivek je, že neříká pouze kde daný bod je, ale také kdy tam je (nahlížíme-li na proměnnou t jako na hodnotu času), naznačuje tak orientaci dané křivky.

Nechť má křivka parametrické rovnice $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in [a, b]$ a uspořádejme interval $[a, b]$ podle velikosti jeho čísel (říkáme, že jsme jej orientovali). Přeneseme-li tuto orientaci na křivku, říkáme, že křivka je *orientována souhlasně* s daným parametrickým vyjádřením. Přeneseme-li na křivku opačnou orientaci intervalu $[a, b]$, říkáme, že křivka je *orientována nesouhlasně* s daným parametrickým vyjádřením.

Je-li uzavřená křivka orientovaná proti směru hodinových ručiček, nazýváme tuto *orientaci kladnou*, orientace uzavřené křivky ve směru hodinových ručiček se nazývá *orientací zápornou.*

(a) orientovaná souhlasně (b) orientovaná nesouhlasně

Obrázek 9.2: Parabola $x = t$, $y = \frac{t^2}{2}$, $t \in [0, 2]$

Délka křivky Pro křivky dané parametricky je možné řešit známé problémy, známé z diferenciálního počtu – hledání tečny v daném bodě, délku křivky, obsah pod křivkou atd. Pro zavedení křivkového integrálu je důležitá délka křivky. Je-li křivka C popsána parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \le t \le b$, pak její délka s je

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Pokud nebude řečeno jinak, budeme předpokládat, že jsou křivky orientovány souhlasně.

9.2 Křivkový integrál prvního druhu

Integrál funkce jedné proměnné přes interval je číslo, které vyjadřuje obsah plochy v rovině, která je ohraničená grafem této funkce. Zdeformujeme-li interval $[a, b]$ na křivku v rovině a uvedenou plochu na plochu v prostoru, dostaneme křivkový integrál prvního druhu.

Definice 9.3. Nechť C je rovinná křivka délky s určená parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [a, b],$$

taková, že $x'(t)$ a $y'(t)$ jsou spojité funkce takové, že v každém bodě je alespoň jedna z nich různá od nuly. Nechť $f(x, y)$ je spojitá funkce, která je definovaná ve všech bodech křivky C. Potom *křivkovým integrálem prvního druhu* funkce f podél křivky C rozumíme

$$\int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 9.4. i) Křivka C s vlastnostmi z předcházející definice se nazývá *hladká*. Křivka skládající se z konečného počtu hladkých částí se nazývá *po částech hladká*.
ii) Hodnota křivkového integrálu nezávisí na volbě parametrizace dané křivky.

Geometrický a fyzikální význam. V případě, že $f(x, y)$ je spojitá nezáporná funkce, vyjadřuje $\int_C f(x, y)\,\mathrm{d}s$ obsah plochy ohraničené křivkou C a grafem funkce $f(x, y)$ na křivce C.

Fyzikální význam křivkového integrálu závisí na fyzikálním významu funkce $f(x, y)$. Například v případě, že $\varrho(x, y)$ vyjadřuje hustotu látky, z které je vyroben tenký drát ve tvaru křivky C, pak křivkový integrál $\int_C \varrho(x, y)\,\mathrm{d}s$ vyjadřuje hmotnost daného drátu.

Příklad 9.5. Vypočtěte
$$\int_C (x + y)\,\mathrm{d}s,$$
kde C je úsečka $x + y - 1 = 0$, kde $x \in [0, 1]$.

Řešení. Křivku C parametrizujeme:
$$C: \quad x = t, \quad y = -t + 1, \quad t \in [0, 1].$$
Pak $x'(t) = 1$, $y'(t) = -1$ a křivkový integrál je
$$\int_C (x + y)\,\mathrm{d}s = \int_0^1 [t + (-t + 1)]\sqrt{2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^1 \mathrm{d}t = \sqrt{2}.$$
▲

Příklad 9.6. Vypočtěte
$$\int_C (x + y)\,\mathrm{d}s,$$
kde C je tvořena stranami trojúhelníka s vrcholy $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$ a $C = [0, 1]$.

Řešení. Křivka C se skládá ze tří úseček, které parametrizujeme:
$$\begin{array}{llll} AB: & x = t, & y = 0, & t \in [0, 1], \\ BC: & x = 1 - t, & y = t, & t \in [0, 1], \\ CA: & x = 0, & y = 1 - t, & t \in [0, 1]. \end{array}$$
Křivkový integrál přes trojúhelník je součet tří křivkových integrálů přes tyto úsečky:
$$\int_C (x + y)\ \mathrm{d}s = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \sqrt{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 (1 - t)\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \sqrt{2}\,[t]_0^1 + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 1 + \sqrt{2}.$$
▲

Příklad 9.7. Vypočtěte
$$\int_C (4x + 3y - 3)\ \mathrm{d}s,$$
kde C je kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení. Parametrické rovnice kružnice jsou
$$x = 3\cos t, \qquad y = 3\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$
Platí $x'(t) = -3\sin t$, $y'(t) = 3\cos t$. Dostáváme tak
$$\begin{aligned} \int_C (4x + 3y - 3)\ \mathrm{d}s &= \int_0^1 (12\cos t + 9\sin t - 3)\ \sqrt{(3\cos t)^2 + (3\sin t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 3\,(12\cos t + 9\sin t - 3)\ \mathrm{d}t = 3\,[12\sin t - 9\cos t - 3t]_0^{2\pi} = -18\pi. \end{aligned}$$
▲

Podobně jako křivkový integrál podél křivky v rovině definujeme i křivkový integrál podél křivky v prostoru: Nechť C je prostorová křivka délky s určená parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad t \in [a, b],$$

taková, že $x'(t)$, $y'(t)$ a $z'(t)$ jsou spojité funkce a v každém bodě je alespoň jedna z nich různá od nuly. Nechť $f(x, y, z)$ je spojitá funkce, která je definovaná ve všech bodech křivky C. Potom křivkovým integrálem prvního druhu funkce f podél křivky C rozumíme

$$\int_C f(x, y, z)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Příklad 9.8. Vypočtěte

$$\int_C (x + 2y - z - 1)\ \mathrm{d}s,$$

kde C je úsečka určená body $A = [1, 1, 2], B = [2, 1, 0]$.

Řešení. Parametrické rovnice úsečky v prostoru jsou

$$C: \quad x = 1 + t, \quad y = 1, \quad z = 2 - 2t, \quad t \in [0, 1].$$

Odtud $x'(t) = 1$, $y'(t) = 0$ a $z'(t) = -2$. Křivkový integrál podél úsečky je

$$\begin{aligned}\int_C (x + 2y - z - 1)\ \mathrm{d}s &= \int_0^1 (1 + t + 2 - 2 + 2t - 1)\ \sqrt{1^2 + (-2)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \sqrt{5}\int_0^1 3t\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[3\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\sqrt{5}.\end{aligned}$$

▲

9.3 Křivkový integrál druhého druhu

Zavedení tohoto integrálu je motivováno fyzikálně – jako práce ve vektorovém poli $\vec{F}$ podél křivky C. Nejprve zaveďme jeho definici v rovině.

Definice 9.9. Nechť C je rovinná křivka délky s určená parametrickými rovnicemi

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad t \in [a, b],$$

taková, že $x'(t)$ a $y'(t)$ jsou spojité funkce a alespoň jedna z nich je v každém bodě různá od nuly, a která je souhlasně orientovaná se svým parametrickým vyjádřením. Nechť je vektorová funkce $\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ spojitá ve všech bodech křivky C. Potom *křivkovým integrálem druhého druhu* funkce $\vec{F}$ podél křivky C rozumíme

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + \int_C Q(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

kde

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$\int_C Q(x, y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

V případě, že křivka je nesouhlasně orientovaná se svým parametrickým vyjádřením, definujeme

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b P(x(t), y(t))x'(t)\,\mathrm{d}t, \quad \int_C Q(x, y)\,\mathrm{d}y = -\int_a^b Q(x(t), y(t))y'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka 9.10. Podobně definujeme i křivkový integrál druhého druhu vektorové funkce $\vec{F}(x, y, z)$ pro křivku v prostoru.

Fyzikální význam Křivkový integrál slouží například k výpočtu práce W. Uvažme tři situace:

a) Je-li $\vec{F}$ konstantní síla, která působí na hmotný bod pohybující se po úsečce s ve směru tohoto pohybu, pak pro práci vykonanou touto silou platí známý vztah

$$W = \vec{F}\vec{s}.$$

b) V případě, že síla $\vec{F} = (P, Q)$ je rovna konstantnímu vektoru a působí na hmotný bod pohybující se po elementu úsečky $\mathrm{d}s = \langle \mathrm{d}x, \mathrm{d}y \rangle$ v jiném směru než v předchozím případě, dostáváme vztah

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = (P, Q) \cdot (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y.$$

c) Ještě obecnější situace nastane, je-li $\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$ proměnlivá a působí na hmotný bod pohybující se po křivce C. Pak pro práci dostáváme vztah

$$W = \int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Křivkový integrál druhého druhu proto vyjadřuje práci W, kterou vykoná silové pole

$$\vec{F} = (P(x, y), Q(x, y))$$

při přemístění hmotného bodu podél křivky C z jejího počátečního do koncového bodu.

Příklad 9.11. Vypočtěte
$$\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y,$$
kde C je kladně orientovaná kružnice $x^2+y^2=4$.

Řešení. Parametrické rovnice kružnice jsou
$$x = 2\cos t, \qquad y = 2\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$
Dostáváme křivkový integrál
$$\begin{aligned}\int_C (x+y)\,\mathrm{d}x - (x-y)\,\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi} 2(\cos t+\sin t)(-2\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} 2(\cos t-\sin t)(2\cos t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} -4\sin^2 t - 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t = -4\int_0^{2\pi}\,\mathrm{d}t = -8\pi.\end{aligned}$$
▲

Příklad 9.12. Vypočtěte práci silového pole $\vec{R} = (y, -x)$ při přemisťování hmotného bodu po horní části elipsy $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ od bodu $A = [3, 0]$ do bodu $B = [-3, 0]$.

Řešení. Danou část elipsy můžeme parametrizovat například následujícím způsobem (analogie s parametrizací kružnice)
$$x = 3\cos t, \qquad y = 2\sin t, \qquad t \in [0, \pi].$$
Práce silového pole $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ po křivce C je dána křivkovým integrálem 2. druhu
$$W = \int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$
Dosadíme-li, dostaneme
$$\begin{aligned}W &= \int_C y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} 2\sin t(-3\sin t)\,\mathrm{d}t - \int_0^{\pi} 3\cos t(2\cos t)\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{\pi} (-6\sin^2 t - 6\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = -6\int_0^{\pi}\,\mathrm{d}t = -6\pi.\end{aligned}$$
Záporná hodnota práce signalizuje, že částice se pohybuje proti působení silového pole. ▲

9.4 Nezávislost integrálu na integrační cestě

Uvažujme vektorové pole $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ v rovině a křivkový integrál
$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$
podél křivky C spojující body A, B. Nabízí se otázka, zda-li hodnota tohoto integrálu (tj. vykonaná práce) závisí na tvaru křivky C. V případě, že jeho hodnota nezávisí na křivce C, říkáme, že křivkový integrál *nezávisí na integrační cestě*. Následující věta udává důležitou podmínku nezávislosti křivkového integrálu na integrační cestě.

Věta 9.13. *Nechť funkce $P(x,y)$, $Q(x,y)$ a jejich parciální derivace $P_y(x,y)$, $Q_x(x,y)$ jsou spojité funkce na jednoduše souvislé oblasti G a nechť platí*

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y) \qquad \text{pro každé} \quad [x,y] \in G.$$

Mějme v G hladkou křivku C s počátečním bodem A a koncovým bodem B.

Pak křivkový integrál $\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ nezávisí na integrační cestě a platí

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = H(B) - H(A),$$

kde H je kmenová funkce příslušná výrazu $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$.

Poznámka 9.14. Je-li vektorové pole $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ konzervativní na $\mathbb{R}^2$, pak platí

$$\vec{F} = \operatorname{grad} H,$$

kde H je kmenová funkce, tj. $H_x = P(x,y)$ a $H_y = Q(x,y)$.

V případě, že počítáme křivkový integrál přes uzavřenou kladně orientovanou křivku C, bývá někdy ve fyzice používáno následující označení

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Integrujeme-li podél uzavřené křivky, je počáteční a koncový bod stejný, a proto $H(A) = H(B)$ a z věty 9.13 plyne následující tvrzení.

Věta 9.15. *Je-li vektorové pole $\vec{F} = (P(x,y), Q(x,y))$ konzervativní na $\mathbb{R}^2$, pak integrál přes uzavřenou křivku je*

$$\oint_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

Příklad 9.16. Vypočtěte

$$\int_C 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$$

z bodu $A = [1,1]$ do bodu $B = [2,4]$ po následujících křivkách:

a) úsečka AB;
b) část paraboly $y = x^2$;
c) lomená čára ACB, kde $C = [2,1]$.

Řešení. Funkce $P(x,y) = 2xy$ a $Q(x,y) = x^2$ i jejich parciální derivace

$$P_y(x,y) = 2x \qquad Q_x(x,y) = 2x$$

jsou funkce spojité na $\mathbb{R}^2$. Navíc, jelikož platí

$$P_y(x,y) = Q_x(x,y)$$

pro všechny body $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, jsou splněny všechny podmínky věty 9.13 a hodnota integrálu tedy nezávisí na integrační cestě. Stačí proto vypočítat daný integrál např. po úsečce AB, v ostatních případech budou výsledky stejné. Parametrické rovnice úsečky AB jsou například $x = 1 + t$, $y = 1 + 3t$, kde $t \in [0, 1]$. Platí $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = 3\,\mathrm{d}t$, dostáváme tak

$$\int_C 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \int_0^1 2(t+1)(3t+1)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 3(t+1)^2\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_0^1 (9t^2 + 14t + 5)\,\mathrm{d}t = \left[3t^3 + 7t^2 + 5t\right]_0^1 = 15.$$

▲

Příklad 9.17. Vypočtěte

$$\int_C 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 + 1)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

Řešení. Funkce $P(x, y) = 2xy$ a $Q(x, y) = x^2 + 1$ i jejich parciální derivace

$$P_y(x, y) = 2x \qquad Q_x(x, y) = 2x$$

jsou funkce spojité na $\mathbb{R}^2$ a platí $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$. Kružnice je hladká a uzavřená křivka. Jsou tak splněny všechny předpoklady 9.15, a proto

$$\int_C 2xy\,\mathrm{d}x + (x^2 + 1)\,\mathrm{d}y = 0.$$

▲

Příklad 9.18. Vypočtěte

$$\int_C (x^2 - y^2)\,\mathrm{d}x + (5 - 2xy)\,\mathrm{d}y,$$

kde C je křivka daná parametrizací $x = \mathrm{e}^t \sin t, y = \mathrm{e}^t \cos t, t \in [0, \pi]$.

Řešení. Výpočet tohoto křivkového integrálu je extrémně náročný, můžeme tedy s výhodou využít věty 9.13. Protože funkce $P(x, y)$, $Q(x, y)$ i jejich derivace $P_y = -2y$, $Q_x = -2y$ jsou spojité a navíc platí $P_y = Q_x$, jsou splněny předpoklady dané věty a platí

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = H(B) - H(A).$$

Stačí proto najít kmenovou funkci, která je podle příkladu 4.17 rovna

$$H = \frac{x^3}{3} - y^2 x + 5y.$$

Z dané parametrizace určíme počáteční bod $A = [0, 1]$ a koncový bod $B = [0, -\mathrm{e}^\pi]$ dané křivky a dosadíme

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = H(0, 1) - H(0, -\mathrm{e}^\pi) = 5 + 5\mathrm{e}^\pi.$$

▲

Poznámka 9.19. Úvahu o nezávislost křivkového integrálu na integrační cestě lze převést do prostoru. Uvažujme vektorové pole $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, kde funkce P, Q, R mají spojité parciální derivace. Práce W v tomto poli po prostorové křivce C je

$$W = \int_C P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

Tato práce nezávisí na křivce C, jestliže je výraz $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$ diferenciálem nějaké kmenové funkce H. To znamená, že platí

$$H_x = P, \qquad H_y = Q, \qquad H_z = R.$$

Podle Schwarzovy věty platí záměnnost smíšených parciálních derivací 2. řádu funkce H, tj:

$$H_{xy} = H_{yx}, \qquad H_{xz} = H_{zx}, \qquad H_{yz} = H_{zy}.$$

Odtud dostaneme podmínku pro nezávislost práce W na integrační cestě

$$P_y = Q_x, \qquad P_z = R_x, \qquad Q_z = R_y.$$

9.5 Greenova věta

Greenova věta popisuje souvislost mezi křivkovým integrálem podél jednoduché hladké uzavřené křivky a mezi dvojným integrálem přes část roviny, která je touto křivkou ohraničená.

Věta 9.20 (Green)**.** *Nechť C je po částech hladká kladně orientovaná jednoduchá uzavřená křivka v rovině a D je oblast ohraničená křivkou C. Nechť mají funkce $P(x,y)$, $Q(x,y)$ spojité parciální derivace na otevřené množině, která obsahuje D. Pak platí*

$$\int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Poznámka 9.21. a) Greenova věta je jakousi analogií Newton Leibnizovy formule

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

pro dvojný integrál. Uvážíme-li výraz z Greenovy věty ve tvaru

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_C P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

vidíme, že v obou případech je na levé straně integrál obsahující derivace nějaké funkce a na pravé straně hrají roli pouze hodnoty původní funkce, tj. nederivované, na hranici oblasti (v jednorozměrném případě je oblastí interval $[a,b]$ a hranicí jsou pouze body a, b.)

b) Jako důsledek Greenovy věty můžeme uvést následující vztah pro obsah oblasti D ohraničené křivkou C

$$m(D) = \iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D (1+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_C x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x.$$

Příklad 9.22. Vypočtěte

$$\int_C (x-y)\ \mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y,$$

kde C je kladně orientovaná křivka, kterou představuje obvod čtverce $ABCD$ určeného vrcholy $A = [2,2]$, $B = [-2,2]$, $C = [-2,-2]$ a $D = [2,-2]$.

Řešení. Funkce $P(x,y) = x - y$ a $Q(x,y) = x$ i jejich derivace

$$P_y(x,y) = -1 \qquad\qquad Q_x(x,y) = 1$$

jsou funkce spojité na $\mathbb{R}^2$. Křivka C je uzavřená po částech hladká křivka v $\mathbb{R}^2$. Jsou splněny podmínky Greenovy věty a platí tedy (D je čtverec o straně 4)

$$\int_C (x-y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_D (1+1)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint\limits_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Při výpočtu jsme užili skutečnosti, že dvojný integrál vyjadřuje obsah čtverce $ABCD$. ▲

Cvičení

1. Vypočtěte křivkový integrál prvního druhu

   a) $\int_C (x - 2y + 1)\,\mathrm{d}s$, kde C je úsečka AB, $A = [4,0]$, $B = [1,1]$.
   b) $\int_C x^2\,\mathrm{d}s$, kde C je „horní“ půlkružnice $x^2 + y^2 = a^2$ pro $y \geq 0$.
   c) $\int_C \frac{\mathrm{d}s}{x-y}$, kde C je úsečka AB, kde $A = [0,-2]$ a $B = [4,0]$.
   d) $\int_C xy\,\mathrm{d}s$, kde C je čtvrtina kružnice $x^2 + y^2 = 4$ v 1. kvadrantu.
   e) $\int_C (x + z)\,\mathrm{d}s$, kde C úsečka AB, kde $A = [1,0,1]$ a $B = [1,1,1]$.
   f) $\int_C y^3\,\mathrm{d}s$, kde C je křivka popsána parametricky rovnicemi $x = t^3$, $y = t$, $t \in [0,2]$.
   g) $\int_C xy^4\,\mathrm{d}s$,kde C je „pravá“ část kružnice $x^2 + y^2 = 16$.

2. Vypočtěte křivkový integrál druhého druhu

   a) $\int_C y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, kde C je úsečka AB, kde $A = [0,0]$ a $B = [1,1]$.
   b) $\int_C xy\,\mathrm{d}x + (x-y)\,\mathrm{d}y$, kde C je lomená čára PQR, kde $P = [0,0]$, $Q = [2,0]$ a $R = [3,2]$.
   c) $\int_C (2x - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde C je úsečka AB, kde $A = [0,0]$ a $B = [2,1]$.
   d) $\int_C y^2\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde C je část paraboly $x = 4 - y^2$ mezi body $[-5,-3]$ a $[0,2]$.
   e) $\int_C y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y$, kde C je část paraboly $x = y^2$ mezi body $[0,0]$ a $[1,1]$.
   f) $\int_C (2x - y)\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$, kde C je část křivky $x^2 - 4y = 0$ mezi body $[0,0]$ a $[2,1]$.
   g) $\int_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, kde C je úsečka AB, kde $A = [2,0,0]$ a $B = [3,4,5]$.

3. Ukažte, že integrál nezávisí na integrační cestě a vypočtěte jej

   a) $\int_C 2x \sin y \, \mathrm{d}x + (x^2 \cos y - 3y^2) \, \mathrm{d}y$, kde C je křivka mezi body $[-1, 0]$ a $[5, 1]$.
   b) $\int_C (2y^2 - 12x^3y^3) \, \mathrm{d}x + (4xy - 9x^4y^2) \, \mathrm{d}y$, kde C je křivka mezi body $[1, 1]$ a $[3, 2]$.

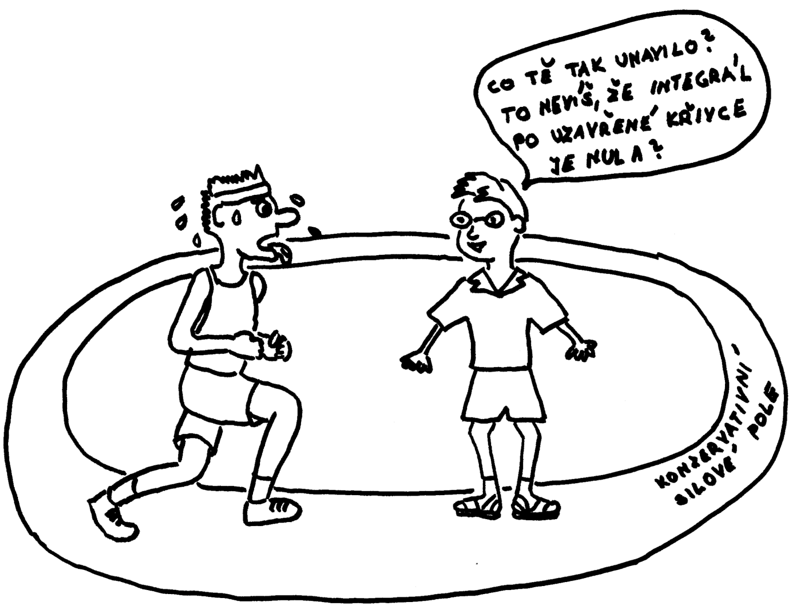
4. Pomocí Greenovy věty vypočtěte

   a) $\int_C (xy + x + y) \, \mathrm{d}x + (xy + x - y) \, \mathrm{d}y$, kde C je kladně orientovaná křivka $x^2 + y^2 = 1$.
   b) $\int_C x^4 \, \mathrm{d}x + xy \, \mathrm{d}y$, kde C je kladně orientovaná křivka tvořící obvod trojúhelníka PQR, kde $P = [0, 0]$, $Q = [1, 0]$, $R = [0, 1]$.
   c) $\int_C (3y - \mathrm{e}^{\sin x}) \, \mathrm{d}x + (7x + \sqrt{y^4 + 1}) \, \mathrm{d}y$, kde C je kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

5. Určete obsah oblasti ohraničené elipsou $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Výsledky:

1. a) $\frac{5}{2}\sqrt{10}$, b) $\frac{a^3}{2}\pi$, c) $\sqrt{5} \ln 2$, d) 4, e) 2, f) $\frac{1}{54}(145^{\frac{3}{2}} - 1)$, g) $1638{,}4$.
2. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{17}{3}$, c) 4, d) $\frac{245}{6}$, e) $\frac{7}{10}$, f) $\frac{14}{3}$, g) $\frac{49}{2}$.
3. a) $25 \sin 1 - 1$, b) -1920.
4. a) 0, b) $\frac{1}{6}$, c) 36π.
5. πab



Kapitola 10

Plošný integrál

Podobně jako jsme definovali křivkový integrál funkce dvou proměnných $f(x, y)$ přes křivku C, budeme nyní definovat integrál funkce tří proměnných $F(x, y, z)$ přes plochu S.

10.1 Plochy v prostoru

Nejjednodušší způsob, jak popsat plochu v prostoru, je případ, kdy tato plocha je grafem funkce dvou proměnných, a proto ji můžeme popsat v kartézských souřadnicích. Jiným (obecnějším) způsobem je parametrické vyjádření plochy, které zde nebudeme uvádět.

Plochou S v prostoru budeme rozumět graf funkce

$$S\colon z \ = f(x, y), \quad [x, y] \in D,$$

kde $f(x, y)$ je diferencovatelná funkce. Takovéto plochy budeme nazývat *hladké*.

Máme-li rovnici roviny $\varrho\colon ax + by + cz + d = 0$, pak její *normálový vektor* je $\vec{n} = (a, b, c)$. Připomeňme, že tečná rovina k ploše S v bodě $[x_0, y_0]$ má rovnici

$$z \ = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Odtud vidíme, že tečná rovina má normálový vektor $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$ nebo $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$. Pro velikost tohoto vektoru platí $|\vec{n}| = \sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$.

Pro obsah $m(S)$ plochy platí následující vztah

$$m(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Příklad 10.1. Vypočtěte obsah povrchu části parabolické plochy $z = x^2 + y^2$, kde $0 \le z \le 9$.

Řešení. Máme

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \qquad f_x(x, y) = 2x, \qquad f_y(x, y) = 2y, \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

a odtud

$$m(S) = \iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Rovina $z = 9$ protíná paraboloid v kružnici $x^2 + y^2 = 9$. Proto daná plocha leží nad oblastí D, která je kruhem se středem v počátku a poloměrem $r = 3$ a pro výpočet využijeme s výhodu polárních souřadnic

$$\iint\limits_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^3 r\sqrt{1 + 4r^2}\,\mathrm{d}r = |1 + 4r^2 = t| =$$

$$= 2\pi\frac{1}{8}\int_1^{37} \sqrt{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[2\frac{\sqrt{t^3}}{3}\right]_1^{37} = \frac{\pi}{6}\left(\sqrt{37^3} - 1\right).$$

▲

Podobně jako jsme u křivkového integrálu druhého druhu zavedli orientaci křivky, zavedeme u plošného integrálu druhého druhu orientaci plochy. *Orientaci plochy* v daném bodě definujeme volbou směru vektoru normály $\vec{n}$ takto:

a) svírá–li $\vec{n}$ ostrý úhel s kladným směrem osy z, říkáme, že plocha je orientována nahoru a $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1)$,
b) svírá–li $\vec{n}$ tupý úhel s kladným směrem osy z, říkáme, že plocha je orientována dolů a $\vec{n} = (f_x, f_y, -1)$,
c) pokud je vektor $\vec{n}$ kolmý na osu z, pak $\vec{n} = (f_x, f_y, 0)$ a plocha je rovnoběžná s rovinou xy.

10.2 Plošný integrál prvního druhu

Jedná se o analogii křivkového integrálu prvního druhu, tedy o integrál ze skalární funkce přes plochu S.

Definice 10.2. Nechť S je hladká plocha, která je grafem funkce $z = f(x, y)$ definované na množině D a nechť $F(x, y, z)$ je funkce spojitá na ploše S. Plošným integrálem prvního druhu rozumíme

$$\iint\limits_S F(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

V případě, že funkce $F(x, y, z) = 1$ udává daný integrál obsah $m(S)$ plochy S. Fyzikální interpretace opět závisí na významu funkce $F(x, y, z)$. Příkladem aplikace je například určení hmotnosti M plochy S, jestliže známe hustotu $\rho(x, y, z)$ v libovolném bodě (x, y, z) plochy. Ze vzorce

$$\rho = \frac{M}{m(S)} \qquad \text{tj.} \qquad M = \varrho\, m(S),$$

dostáváme

$$M = \iint\limits_S \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D \varrho\,(x, y, f(x, y))\,\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Příklad 10.3. Vypočtěte integrál $\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S$, kde S je část roviny $x+y+z=1$ v 1. oktantu (tedy pro $x \geq 0$, $y \geq 0$ a $z \geq 0$).

Řešení. Nejprve vyjádříme plochu S:

$$z \ = 1-x-y, \quad \text{kde} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1-x.$$

Platí

$$f_x(x,y) = -1, \qquad f_y(x,y) = -1, \qquad \mathrm{d}S = \sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Dostáváme tak

$$\iint\limits_S xyz\,\mathrm{d}S = \sqrt{3}\iint\limits_D xy\,(1-x-y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} xy\,(1-x-y)\ \mathrm{d}y =$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2} - \frac{xy^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} \mathrm{d}x = \sqrt{3}\int_0^1 \frac{x}{6}\,(1-x)^3\ \mathrm{d}x = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{120}.$$

▲

Příklad 10.4. Vypočtěte hmotnost části kuželové plochy

$$S: z \ = \sqrt{x^2+y^2},\ 0 \leq z \ \leq 2,$$

je-li hustota plochy ρ konstantní.

Řešení. Platí

$$f_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad f_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

odtud

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}.$$

Pro hmotnost tak dostáváme

$$M = \iint\limits_S \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_D \rho\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\rho\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\sqrt{2}\pi\rho.$$

Při výpočtu jsme užili skutečnosti, že poslední integrál vyjadřuje obsah oblasti D, tedy kruhu o poloměru 2. ▲

10.3 Plošný integrál druhého druhu

Protože nejdůležitější aplikací plošného integrálu 2. druhu je výpočet toku vektorového pole orientovanou plochou, provedeme výklad tohoto integrálu na výpočtu této veličiny.

Přitom si představíme, že část prostoru je vyplněna nestlačitelnou proudící kapalinou, přičemž rychlost každé částice je určena jen její polohou a nezávisí na čase. Pole rychlosti tohoto proudění je popsáno vektorovou funkcí $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$. Ve zkoumané části prostoru se nachází orientovaná plocha S. Chceme zjistit, jaké množství tekutiny proteče plochou za jednotku času ve směru její orientace, tj. na tu stranu plochy, kam směřují její normálové vektory určující orientaci. I v tomto případě budeme uvažovat plochu, která je grafem funkce $z = f(x,y)$ na nějaké oblasti D.

Plošný integrál druhého druhu (*tok T orientovanou plochou*) definujeme jako plošný integrál prvního druhu ze skalární funkce, která je skalárním součinem vektorů $\vec{F}$ (proudění) a $\vec{n}$ (normála k ploše). Skalární součin $\vec{F} \cdot \vec{n}$ udává, kolik z proudění $\vec{F}$ teče kolmo kouskem plochy $\mathrm{d}S$.

Tok je největší, jestliže $\vec{F}$ a $\vec{n}$ jsou rovnoběžné (vektory svírají úhel $\theta = 0$ a $\cos\theta = 1$). Naopak tok je nulový, jestliže $\vec{F}$ a $\vec{n}$ jsou na sebe kolmé (vektory svírají úhel $\theta = \frac{\pi}{2}$ a $\cos\theta = 0$).

Definice 10.5. Nechť S je hladká plocha orientovaná tak, že normálové vektory „směřují nahoru“, tj. svírají s kladným směrem osy z ostrý úhel, pak plošným integrálem druhého druhu rozumíme

$$\iint\limits_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S,$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor plochy S

$$\vec{n} = \left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right).$$

V případě, že je plocha S orientovaná tak, že normálové vektory „směřují dolů“, tj. svírají s kladným směrem osy z tupý úhel, pak normálový vektor plochy S vezmeme

$$\vec{n} = \left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}, \frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \right)$$

Vezmeme-li vektorovou funkci $\vec{F}$ ve tvaru $\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$, dostaneme z předchozí definice pro plochu orientovanou vzhůru:

$$\begin{aligned} T = \quad & \iint\limits_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint\limits_S \vec{F}(x,y,z) \cdot \vec{n}(x,y,z)\,\mathrm{d}S \\ = & \iint\limits_S (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \cdot \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\,\mathrm{d}S = \\ = & \iint\limits_D (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)) \cdot \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \\ = & \iint\limits_D (P(x,y,f(x,y)), Q(x,y,f(x,y)), R(x,y,f(x,y))) \cdot (-f_x, -f_y, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Odtud

$$T = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} =$$
$$= \iint_D \left[-P(x,y,f(x,y))f_x(x,y) - Q(x,y,f(x,y))f_y(x,y) + R(x,y,f(x,y))\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Pro plochu orientovanou dolů, dostaneme ve výsledném vzorci opačné znaménko, ale tvar zůstane nezměněn.

Speciální případy plošného integrálu 2. druhu jsou:

a) Vektorové pole $\vec{F} = (0,0,R(x,y))$ a $S\colon z = f(x,y)$, pro $[x,y] \in D$. Pro tok T platí

$$T = \iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \pm \iint_D (0,0,R(x,y,f(x,y))\cdot(-f_x(x,y), -f_y(x,y), 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

A odtud

$$T = \iint_D R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jestliže normála plochy „míří nahoru“ (svírá ostrý úhel s kladným směrem osy z), nebo

$$T = -\iint_D R(x,y,f(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

jestliže normála plochy „míří dolů“ (svírá tupý úhel s kladným směrem osy z).

b) Vektorové pole $\vec{F} = (P(x,y,z), Q(x,y,z), 0)$ a $S\colon z = \text{konst.}$, tj. plocha S je rovnoběžná s vodorovnou rovinou. V tomto případě $\vec{n} = (0,0,\pm 1)$ a

$$\iint_S \vec{F}(x,y,z)\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (P(x,y,z), Q(x,y,z), 0)\cdot(0,0,\pm 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Příklad 10.6. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F}(x,y,z) = (0,0,2)$ plochou S, která je orientovaná tak, že normálové vektory svírají s kladným směrem osy z ostrý úhel nebo pravý úhel.

a) $S\colon z = 2 - y$, kde $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$ a $z \ge 0$.
b) $S\colon z = \sqrt{4 - y^2}$, $0 \le x \le 4$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.
c) S je válcová plocha $x^2 + y^2 = 4$, $y \ge 0$, $0 \le z \le 2$.

Řešení. a) Platí $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0,1,1)$. Dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (0,0,2)\cdot(0,1,1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16.$$

Výsledek dvojného integrálu jsme získali úvahou, protože se jedná o obsah plochy D, kterou je obdélník o stranách 4 a 2 délkové jednotky. Tok plochou je tedy 16 jednotek toku.

b) I v tomto případě svírají normálové vektory plochy ostrý úhel s kladným směrem osy z a platí $\vec{n} = (-f_x, -f_y, 1) = (0, \frac{y}{4-y^2}, 1)$. Dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (0,0,2) \cdot (0, \frac{y}{4-y^2}, 1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2 \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 16.$$

Také v tomto případě je oblast D stejný obdélník jako v části a). Tok plochou je tedy opět 16 jednotek toku.

c) V tomto případě jsou normálové vektory kolmé na kladný směr osy z, a tedy také na vektor $\vec{F} = (0,0,2)$ V každém bodě válcové plochy platí

$$\vec{F} \cdot \vec{n} = 0.$$

Tok vektorového pole plochou je tedy v tomto případě roven nule.

▲

Příklad 10.7. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (2, -1, 1)$ kuželovou plochou

$$z = 2\sqrt{x^2+y^2}, \qquad 0 \le z \ \le 4,$$

která je orientovaná tak, že její normálové vektory svírají s kladným směrem osy z tupý úhel.

Řešení. Platí

$$f_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

odtud

$$\vec{n} = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right).$$

Pro tok T pak dostáváme

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_D (2,-1,1) \cdot \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$
$$= \iint_D \left(\frac{4x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}} - 1 \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{4x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Získaný dvojný integrál jsme rozdělili na dva integrály pouze z důvodu výpočtu. První integrál vypočteme transformací do polárních souřadnic, ve kterých je oblast D určena nerovnicemi $0 \le \varrho \le 2$ a $0 \le \varphi \le 2\pi$. Dostáváme

$$\iint_D \frac{4x-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}\varrho \int_0^{2\pi} \frac{4\varrho\cos\varphi - 2\varrho\sin\varphi}{\sqrt{\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho^2\sin^2\varphi}}\varrho\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \int_0^2 \varrho\,\mathrm{d}\varrho \cdot \int_0^{2\pi} (4\cos\varphi - 2\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi =$$
$$= \left[\frac{\varrho^2}{2}\right]_0^2 [4\sin\varphi + 2\cos\varphi]_0^{2\pi} = 0.$$

Druhý integrál, pokud neuvažujeme znaménko, vyjadřuje obsah kruhu, jehož poloměr je 2. Máme tedy

$$-\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -4\pi.$$

Celkový tok T přes plochu S je roven -4π jednotek toku. ▲

10.4 Gauss-Ostrogradského věta

Analogií Greenovy věty pro plošný integrál je *Gauss-Ostrogradského* věta, která umožňuje převést výpočet plošného integrálu druhého druhu na výpočet trojného integrálu.

Věta 10.8. *Nechť $\vec{F} = (P, Q, R)$ je vektorová funkce definovaná na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ a nechť $G \subset \Omega$ je oblast, jejíž hranicí je uzavřená plocha S orientovaná kladně. Nechť P, Q, R, P_x, Q_y a R_z jsou na Ω spojité. Pak platí*

$$\iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_G (P_x + Q_y + R_z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Interpretujeme-li plošný integrál jako *tok T vektorového pole uzavřenou plochou*, pak

$$T = T_1 - T_2,$$

kde T_1 je množství tekutiny, které z G vyteče za jednotku času, a T_2 je množství tekutiny, které do G za stejný čas přiteče.

Je-li $T = 0$, pak z oblasti vytéká právě tolik tekutiny, kolik do ní vtéká.

Je-li $T > 0$, pak z oblasti vytéká za jednotku času více tekutiny, než kolik do ní vtéká. Dá se to vysvětlit tak, že uvnitř oblasti G se nacházejí tzv. *zřídla*, tj. body, ve kterých nějakým způsobem přibývá tekutiny.

Je-li $T < 0$, pak z oblasti vytéká méně tekutiny, než kolik do ní vtéká. To se dá vysvětlit tím, že v oblasti se nachází tzv. *nory*, ve kterých se tekutina ztrácí.

Příkladem uzavřené plochy je kulová plocha, povrch krychle, čtyřstěnu.

Příklad 10.9. Vypočtete tok $T = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F}(P, Q, R) = (y^2, z^2, x^2)$, přes povrch krychle $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ a $-1 \le z \le 1$ orientovaný tak, že normála míří zvnitřku ven.

Řešení. Jsou splněny předpoklady Gaussovy-Ostrogradského věty. Přitom

$$\operatorname{div} \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 0.$$

Platí tedy

$$T = \iint_S \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_G \operatorname{div} \vec{F} \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$$

▲

Cvičení

1. Pomocí plošného integrálu spočtěte obsah plochy S, která je grafem funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ na oblasti $D\colon x^2 + y^2 \leq 4$.

2. Vypočtěte obsah části plochy $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ ležící uvnitř válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$.

3. Vypočtěte integrál $\iint\limits_S (2x + \frac{4}{3}y + z)\,\mathrm{d}S$, kde S je část roviny v 1. oktantu.

4. Vypočtěte tok vektorového pole $F = (0; 0; 1)$ plochou $S\colon z = \sqrt{1 - y^2}$, kde $0 \leq x \leq 4$, $y \geq 0$, $z \geq 0$, a která je orientovaná tak, že normálový vektor svírá s osou z ostrý úhel.

5. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ orientovanou plochou S, kterou je část roviny $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ v 1.oktantu a jejíž normálové vektory svírají s osou z ostrý úhel.

6. Vypočtěte tok vektorového pole $\vec{F} = (x, y, z)$ orientovanou plochou S, kterou je část kulové plocha $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, jejíž normálové vektory svírají s osou z ostrý úhel.

Výsledky:
1. $4\pi\sqrt{2}$ 2. $\frac{2}{3}\pi(2\sqrt{2} - 1)$ 3. $4\sqrt{61}$ 4. 4 5. 12 6. 54π

Rejstřík

Literatura

[1] Došlá, Z.: *Matematika pro chemiky - 1.díl.* První vydání. Masarykova univerzita, Brno 2010.

[2] Došlá, Z. – Došlý, O.: *Diferenciální počet funkcí více proměnných.* Třetí vydání. Masarykova univerzita, Brno 2006.

[3] Došlá, Z. – Došlý, O.: *Metrické prostory. Teorie a příklady.* Třetí vydání. Masarykova univerzita, Brno 2006.

[4] Fuchsová, L. – Vosmanský, J.: *Matematika II pro nematematické obory* První vydání. Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1982.

[5] Kalas, J. – Kuben, J.: *Integrální počet funkcí více proměnných.* První vydání. Masarykova univerzita, Brno 2009.

[6] Kalas, J. – Pospíšil, Z.: *Spojité modely v biologii.* První vydání. Masarykova univerzita, Brno 2001.

[7] Kalas, J. – Ráb, M.: *Obyčejné diferenciální rovnice* Druhé vydání. Masarykova univerzita, Brno 2001.

[8] Mikušková, E.: *Vybrané partie z diferenciálního a integrálního počtu pro chemiky.* Diplomová práce. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno 2010.

[9] Obrdlíková, Š.: *Diferenciální operátory ve fyzice.* Diplomová práce. Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, Brno 2011.

[10] Plch, R.: *Příklady z matematické analýzy. Diferenciální rovnice.* První vydání. Masarykova univerzita, Brno 2002.

[11] Póta, G.: *Mathematical Problems for Chemistry Students.* First edition. Elsevier, 2006.

[12] Stewart, J.: *Metric International Version Calculus, Early Transcendentals.* Sixth edition. Brooks/Cole publishing company, 2008.

Matematika pro chemiky, 2. díl
Prof. RNDr. Zuzana Došlá, DSc.

Vydala Masarykova univerzita v roce 2011

Technické zpracování: Mgr. Petr Liška
Ilustrace: RNDr. Šárka Došlá, PhD.
Obálka: Ivo Pecl
První vydání, 2011
Náklad 500 výtisků
Tisk: Tiskárna Blansko - Těchov
Těchov 152
678 01 Blansko

ISBN 978-80-210-5432-5