Objevte si sami Banachovu větu

Následujících několik úloh se váže k Banachově větě o pevném bodě, kterou jsme už na cvičení nestihli.

Bude zde důležitý pojem *kontrakce*. To je takové zobrazení f z metrického prostoru (M, ρ) *do něj samého* (tedy zas do (M, ρ)), že existuje $0 < k < 1$ takové, že pro každé dva body x a y v tomto prostoru platí

$$\rho(f(x), f(y)) \leq k \cdot \rho(x, y).$$

Jednoduše řečeno, je to zobrazení, které smršťuje vzdálenosti mezi všemi dvojicemi bodů na k-násobek či ještě méně. Jde to definovat i pro případ, kdy to zobrazení jde z jednoho metrického prostoru do jiného, ale to nás tady nebude zajímat.

1 V nějakém metrickém prostoru mějme množinu, která se celá vejde do kruhu o poloměru 1. Uplatníme na ni kontrakci s $k = \frac{1}{2}$. Do jak velkého kruhu se určitě vejde obraz? A co když tu kontrakci n-krát zopakujeme? Můžete si to i schematicky nakreslit.

2 Zcela intuitivně si představte/nakreslete, co se stane s jakoukoli (omezenou) množinou, provedu-li „nekonečněkrát“ nějakou kontrakci. Mělo by Vám vyjít, že se nakonec „zhroutí do bodu“.

3 Ještě si představte, že začnu s nějakým libovolným bodem x a vyrobím z něho bod p tak, že budu „nekonečněkrát“ opakovat nějakou kontrakci, tj. udělám

$$p = \underbrace{f(f(f(\cdots f(f}_{\text{nekonečněkrát}}(x))\cdots))).$$

Změní se nějak tento bod p, když s ním udělám tu kontrakci ještě jednou? Měli byste dojít k tomu, že ne, tedy že $f(p) = p$. To znamená, že p by mohlo být dobrým kandidátem na *pevný bod* zobrazení f — tedy na bod, který to zobrazení vůbec nezmění. Samozřejmě jen za předpokladu, že „opakovat f nekonečněkrát“ dává nějaký smysl.

4 Teď se už vrhneme na matematiku. Řekněme, že x je nějaký bod a f je kontrakce (se zadaným k). Označme vzdálenost mezi body x a $f(x)$ třeba jako L.

1. Jaká nejvýše je vzdálenost mezi body $f(x)$ a $f(f(x))$? (Napište to pomocí k a L.)
2. Jaká je nejvýše vzdálenost mezi body $f(f(x))$ a $f(f(f(x)))$?
3. Obecně: jaká největší může být vzdálenost mezi $f^{(n\text{-krát})}(x)$ a $f^{(n+1\text{-krát})}(x)$?
4. Pomocí trojúhelníkové nerovnosti a součtu geometrické řady napište, jaká největší může být vzdálenost mezi $f^{(n\text{-krát})}(x)$ a $f^{(\ell\text{-krát})}(x)$.
5. Z výsledku předchozího bodu vyvoďte, že posloupnost $x, f(x), \ldots, f^{(n\text{-krát})}(x), \ldots$ je cauchyovská.

5 To už stačí na to, abychom vymysleli Banachovu větu.

1. Ukažte, že pokud posloupnost $x, f(x), \ldots, f^{(n\text{-krát})}(x), \ldots$ konverguje k nějakému p, tak p musí být pevným bodem zobrazení f. (Snadno to uděláte přímo z definice.)
2. My už víme, že ta posloupnost je cauchyovská. Co musíme chtít od toho metrického prostoru, abychom měli zajištěno, že bude i konvergentní?
3. Objevili jsme už jeden pevný bod. Může jich být víc? (Kdyby jich víc bylo, mohlo by pak f být kontrakce?)
4. Schválně si zkuste porovnat vaši „versi“ Banachovy věty, kterou jste dostali z těchto úvah, s tou, co je v přednášce či ve skriptech. Nejspíš objevíte, že se v ničem neliší! Takže to není žádná černá magie, ale (doufám) celkem intuitivní záležitost.