První procvičování (metrické prostory)

$\boxed{1}$ Mějme jakoukoli množinu M v nějakém metrickém prostoru. Jakou vzdálenost má od ní jakýkoli bod na její hranici?

$\boxed{2}$ Mějme jakýkoli metrický prostor. Je v něm prázdná množina $\emptyset$ uzavřená? Je otevřená?

$\boxed{3}$ Mějme úplný metrický prostor (M, ρ) a jeho podmnožinu (A, ρ). Řekněme, že tento menší prostor je neúplný, takže v něm existuje cauchyovská posloupnost x_n bez limity. Protože však větší prostor (M, ρ) je úplný, musí v něm x_n mít limitu, řekněme x. Jaká může být nejvýše vzdálenost x od množiny A?

$\boxed{4}$ Pro jednoduchost si představme prostor $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou. Podejte příklad množiny, která je otevřená i uzavřená. Pak podejte příklad množiny, která není ani jedno. (Z toho je vidět, že ačkoli „otevřená“ a „uzavřená“ množina zní jako protiklady, které se vylučují, vůbec tomu tak není.)

$\boxed{5}$ Našli jste starou, blbou a rozbitou kalkulačku, na které už fungují jenom dvě tlačítka: „zapnout/vypnout“ a „cos“. Jak s pomocí této mizerné kalkulačky vyčíslíte kořen rovnice $\cos x = x$?

$\boxed{6}$ Ukažte, že následující zobrazení jsou kontrakce na metrickém prostoru, který je tvořen zadaným intervalem reálné osy a metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$:
1. $f(x) = 1/x$ na intervalu $(1; \infty)$ (zkuste dát rozdíl na společného jmenovatele);
2. $f(x) = \sqrt{x}$ na intervalu $(\frac{1}{4}; \infty)$ (zkuste rozdíl $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ nějak vhodně rozšířit).
3. Jestli chcete, můžete to zobecnit a dokázat, že každá funkce $f(x)$ je s touto metrikou kontrakcí všude, kde platí $|f'(x)| < 1$ (zkuste zapsat $f(b) - f(a)$ jako integrál z derivace).

$\boxed{7}$ Díky minulému příkladu už můžete snadno dokázat, že nekonečně vnořená odmocnina

$$\sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \sqrt{6 - \cdots}}}}$$

konverguje. Spočtěte, k čemu konverguje. Záleží nějak na tom, co je „úplně uvnitř odmocniny“? (Nápověda: Banachova věta na zobrazení $f(x) = \sqrt{6 - x}$.)

$\boxed{8}$ Stejně tak můžete dokázat, že nekonečný řetězový zlomek

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}$$

konverguje, a nalézt jeho hodnotu.