Odpovědi na první domácí cvičení

1 Nulovou.

2 Obojí.

3 Nulovou

4 Například $\mathbb{R}^2$. Například polootevřený čtverec $\langle 0; 1) \times \langle 0; 1)$.

5 Nejdřív ji zapneme pomocí tlačítka „zapnout/vypnout“. Pak budeme mačkat tlačítko „cos“ tak dlouho, dokud se číslo na displeji mění. Jakmile se měnit přestane, nalezli jsme řešení.

6 **Ad 1.** $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{|x-y|}{xy}$. Jelikož $x > 1, y > 1$, máme určitě $1/xy < 1$, takže máme $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| < k|x-y|$.

Ad 2. Obdobně s $\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| = \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

Ad 3. $|f(b) - f(a)| = \left|\int\limits_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |f'(x)|\,\mathrm{d}x \leq k|b-a|$.

7 Pevný bod musí splnit $x = \sqrt{6-x}$, což lze přepsat na $x^2 + x - 6 = 0$ s řešeními -3 a 2. Zkouška ukáže, že záporný kořen původní rovnici neřeší. Pevný bod je tedy 2. Na tom, co je „úplně uvnitř“, nezáleží, dokud je to číslo mezi -30 a 6. Jiné hodnoty rozbijí řetěz odmocnin proto, že některá z nich nebude definovaná.

8 Pevný bod musí splnit $x = 1 + \frac{1}{x}$; řešení této rovnice jsou dvě, a to $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. To ovšem nezamená, že toto zobrazení má dva pevné body (to by protiřečilo Banachově větě!), protože ten s mínusem nespadá do oblasti, kde je $1/x$ kontrakcí. Jelikož se však bezpečně držíme v oblasti $x > 1$, Banachova věta funguje a zajistí konvergenci k tomu jedinému pevnému bodu, který v ní je, tj. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.