1 Dokažte nerovnost $|x+y| \leq |x|+|y|$, která platí pro jakákoli reálná x, y. (Stačí Vám projít všechny čtyři kombinace znamení x a y.)

2 Mějme $\rho(x,y) = |x-y|$. Dokažte, že $(\mathbb{R}, \rho)$ je metrický prostor. (Prostě zkontrolujte jednotlivé body definice.)

3 Nakreslete jednotkové kružnice kolem počátku v prostorech $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ a $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$, kde ρ_1 je taxikářská metrika a ρ_∞ je maximální metrika. Pro body $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$ platí $\rho_1 = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ a $\rho_\infty = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$.

4 Určete vzdálenost bodu $[1; 1]$ od přímky $y = -x$:
1. v taxikářské metrice; **2.** v eukleidovské metrice; **3.** v maximální metrice.

5 Uvažme metrický prostor $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou. Které z následujících množin jsou v něm otevřené? Které jsou uzavřené?
1. množina obsahující jediný bod $[0; 0]$; **2.** přímka $y = x$; **3.** kruh $x^2 + y^2 < 1$;
4. čtverec $\langle 0; 1) \times \langle 0; 1)$; **5.** elipsa $x^2 + y^2/4 \leq 1$; **6.** celé $\mathbb{R}^2$.

6 Mějme metrický prostor, který je tvořen intervalem $(0; 1)$ a standardní metrikou $\rho(x,y) = |x-y|$, a uvažme na něm posloupnost $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$
1. Je ta posloupnost cauchyovská? **2.** Konverguje k něčemu? Pokud ne, co je tam za problém?

Hammingova vzdálenost

Uvažme množinu všech slov, která se skládají z n velkých písmen české abecedy (kromě CH) (pro zadané přirozené n), bez ohledu na to, jestli mají nějaký význam či nikoli. *Hammingovou vzdáleností* mezi dvěma slovy pak označíme počet posic, v nichž se obě slova liší.

7 Určete Hammingovu vzdálenost mezi následujícími slovy:
1. BÁBA a ŽÁBA; **2.** KOLT a HOST; **3.** NAZDAR a SBOHEM.

8 Dokažte, že množina všech slov délky n s Hammingovou vzdáleností je metrický prostor.

9 Uvažujme kružnice kolem slova STŘED, a to o poloměrech 1, $1 + \frac{1}{2}$ a nakonec 2. Pro každou z nich zjistěte, kolik slov ji tvoří, a tři z těchto slov vypište. (Pro informaci: česká abeceda bez CH má 41 písmen.)

10 Nechť A je množina všech slov tvořených šesti stejnými písmeny (tedy AAAAAA, ÁÁÁÁÁÁ, BBBBBB,…až ÝÝÝÝÝÝ, ZZZZZZ, ŽŽŽŽŽŽ).
1. Určete vzdálenost slov SLUNKO, PADALA a RARACH od této množiny.
2. Vypište všechny možné vzdálenosti mezi jakýmkoli slovem S a množinou A.
3. Zjistěte průměr množiny A.
4. Jaký je vnitřek množiny A? A jakou má tato množina hranici? Je tato množina otevřená? Je uzavřená?

11 Napište příklad nekonečné posloupnosti šestipísmenných slov, která by byla v prostoru s Hammingovou vzdáleností cauchyovská. K čemu ta Vaše posloupnost konverguje (pokud vůbec k něčemu)?

12 Dvě různá slova mají Hammingovu vzdálenost aspoň 1. To klade docela silné omezení na to, jaké vlastnosti mohou mít množiny a posloupnosti slov:
1. Uvažte jakoukoli množinu slov o stejném počtu písmen. Může mít taková množina nějakou hranici? Můžete obecně říct, zda je otevřená? A zda je uzavřená?
2. Uvažte jakoukoli posloupnost slov o stejném počtu písmen. Co musí splnit, aby byla cauchyovská?
3. Je tento metrický prostor úplný?