1 Dokažte nerovnost $|x + y| \leq |x| + |y|$, která platí pro jakákoli reálná x, y. (Stačí Vám projít všechny čtyři kombinace znamení x a y.)

2 Mějme $\rho(x, y) = |x - y|$. Dokažte, že $(\mathbb{R}, \rho)$ je metrický prostor. (Prostě zkontrolujte jednotlivé body definice.)

3 Nakreslete jednotkové kružnice kolem počátku v prostorech $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$ a $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$, kde ρ_1 je taxikářská metrika a ρ_∞ je maximální metrika. Pro body $[x_1; y_1]$ a $[x_2; y_2]$ platí $\rho_1 = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ a $\rho_\infty = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$.

4 Určete vzdálenost bodu $[1; 1]$ od přímky $y = -x$:
1. v taxikářské metrice; **2.** v eukleidovské metrice; **3.** v maximální metrice.

5 Uvažme metrický prostor $\mathbb{R}^2$ s eukleidovskou metrikou. Které z následujících množin jsou v něm otevřené? Které jsou uzavřené?
1. množina obsahující jediný bod $[0; 0]$; **2.** přímka $y = x$; **3.** kruh $x^2 + y^2 < 1$;
4. čtverec $\langle 0; 1) \times \langle 0; 1)$; **5.** elipsa $x^2 + y^2/4 \leq 1$; **6.** celé $\mathbb{R}^2$.

6 Mějme metrický prostor, který je tvořen intervalem $(0; 1)$ a standardní metrikou $\rho(x, y) = |x - y|$, a uvažme na něm posloupnost $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$
1. Je ta posloupnost cauchyovská? **2.** Konverguje k něčemu? Pokud ne, co je tam za problém?

Pampeliškový prostor

Prostor $\mathbb{R}^2$ s metrikou

$$\rho([x_1; y_1], [x_2; y_2]) = \begin{cases} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}, & \text{je-li } x_2 = kx_1, y_2 = ky_1 \text{ pro } k \geq 0; \\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} & \text{jinak.} \end{cases}$$

se nazývá *pampeliškový prostor*. Vaším úkolem bude o něm v dalším zjistit všelijaké věci.

7 Popište slovně, jak se počítá vzdálenost v tomto prostoru, tak, aby to každý intuitivně pochopil. Můžete k tomu nakreslit i obrázek.

8 Dokažte, že je to metrický prostor.

9 Najděte nějakou podmnožinu $\mathbb{R}^2$, která bude mít v pampeliškové metrice větší průměr než v eukleidovské.

10 Nakreslete v této metrice kružnice kolem bodu $[1; 0]$ o poloměrech $\frac{1}{2}$, 1, 2 a 5.

11 Vymezíme v $\mathbb{R}^2$ nějakou množinu bodů takovou, že mezi každou dvojicí (navzájem různých) bodů z této množiny je vzdálenost 1.
1. Kolik nejvíc bodů může taková množina obsahovat, počítáme-li vzdálenost v eukleidovské metrice?
2. A kolik nejvíc bodů tam může být, užijeme-li pampeliškové metriky?

12 Najděte nějakou nekonečnou posloupnost, která by v eukleidovské metrice konvergovala, ale v pampeliškové nikoli.