

**I** Dokažte nerovnost  $|x + y| \leq |x| + |y|$ , která platí pro jakákoli reálná  $x, y$ . (Stačí Vám projít všechny čtyři kombinace znamení  $x$  a  $y$ .)

**2** Mějme  $\rho(x, y) = |x - y|$ . Dokažte, že  $(\mathbb{R}, \rho)$  je metrický prostor. (Prostě zkontrolujte jednotlivé body definice.)

**3** Nakreslete jednotkové kružnice kolem počátku v prostorech  $(\mathbb{R}^2, \rho_1)$  a  $(\mathbb{R}^2, \rho_\infty)$ , kde  $\rho_1$  je taxikářská metrika a  $\rho_\infty$  je maximální metrika. Pro body  $[x_1; y_1]$  a  $[x_2; y_2]$  platí  $\rho_1 = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$  a  $\rho_\infty = \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\}$ .

**4** Určete vzdálenost bodu  $[1; 1]$  od přímky  $y = -x$ :  
1. v taxikářské metrice;    2. v eukleidovské metrice;    3. v maximální metrice.

**5** Uvažme metrický prostor  $\mathbb{R}^2$  s eukleidovskou metrikou. Které z následujících množin jsou v něm otevřené? Které jsou uzavřené?

1. množina obsahující jediný bod  $[0; 0]$ ;    2. přímka  $y = x$ ;    3. kruh  $x^2 + y^2 < 1$ ;  
4. čtverec  $(0; 1) \times (0; 1)$ ;    5. elipsa  $x^2 + y^2/4 \leq 1$ ;    6. celé  $\mathbb{R}^2$ .

**6** Mějme metrický prostor, který je tvořen intervalem  $(0; 1)$  a standardní metrikou  $\rho(x, y) = |x - y|$ , a uvažme na něm posloupnost  $\{\frac{1}{2^n}\}$  pro  $n = 1, 2, 3, \dots$

1. Je ta posloupnost cauchyovská?    2. Konverguje k něčemu? Pokud ne, co je tam za problém?

## Přetočená číselná osa

Představme si množinu  $M = \mathbb{R} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ , tedy reálnou osu, ze které jsme vyňali bod  $0$  a naopak přidali bod  $\infty$ . Označme  $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$  a dodefinujme  $f(\infty) = 0$ , načež zavedeme

$$\rho(x, y) = |f(x) - f(y)|.$$

Vášim úkolem bude vyšetřit metrický prostor  $(M, \rho)$ . Nemá žádný zvláštní název, tak mu říkejme třeba *přetočená číselná osa*.

**7** Dokažte, že to je metrický prostor. (Při dokazování nerovnosti  $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$  se vyplatí rozdělit důkaz na dvě části: buď je  $f(z)$  mezi  $f(x)$  a  $f(y)$ , nebo není.)

**8** Zkuste nakreslit schematický obrázek (klidně 2D či 3D), ze kterého by bylo pěkně vidět, jak tento prostor vůbec „vypadá“ — co je blízko k sobě a co zas daleko, kde je díra a odkud kam je zas přímý přechod.

**9** Jaký je průměr  $M$ , tedy celého tohoto prostoru? Je to množina omezená, nebo nikoli?

**10** Zjistěte, jak vypadá kruh se středem v  $\infty$  a poloměrem  $\frac{\pi}{4}$ . Jak myslíte, že by vypadalo nějaké malé okolí bodu  $\infty$ ?

**11** Napište nekonečnou posloupnost, která:

1. je v tomto prostoru cauchyovská, ačkoli by ve standardní metrice  $|x - y|$  nebyla;  
2. je cauchyovská, ale přesto nemá limitu (nápověda: násilně jsme z reálné osy vytrhli nulu. Nemohli bychom vyrobit posloupnost, která by „konvergovala k té nule, která tam není“?)