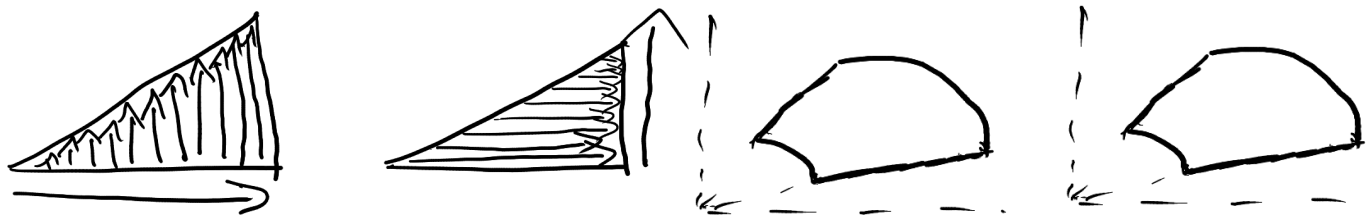


**I** Když jsme měli dělat dvojný integrál v kartézských souřadnicích třeba po nějakém trojúhelníku, měli jsme dvě možnosti: nejdřív integrovat podél  $x$  a pro každé  $x$  pak po sloupečku ve směru  $y$ , nebo opačně: začít podél  $y$  a pro každé  $y$  jít po řádku ve směru  $x$  (viz obrázky vlevo):



Zakreslete obdobné šipky pro polární souřadnice  $r, \varphi$  do druhých dvou obrázků, a to pro obě pořadí.

**2** Přejdem do polárních souřadnic spočítejte  $\iint_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , kde  $\Omega$  je kruh  $x^2 + y^2 \leq 2x$ .

Nehádejte, nesnažte se to ohaluzit. Naopak: nakreslete si obrázek, rozmyslete si, jaký rozsah úhlů  $\varphi$  ten kruh zabírá, a pro každý úhel  $\varphi$  stanovte, odkud kam půjde  $r$ . Nejlepší je to udělat tak, že do rovnice kružnice, která ten kruh ohraničuje, dosadíte polární souřadnice.

**3** V integrálu  $\iint_{\Omega} xy dx dy$ , kde  $\Omega$  je trojúhelník  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x$ , přejděte do nových souřadnic  $x + y = u, y = uv$ , a vyčíslete ho.

**4** Zapište v polárních souřadnicích integrál  $\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy$ , je-li  $\Omega$ :

1. trojúhelník  $0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x$ ;
2. jedno ucho lemniskáty  $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$  ( $x \leq 0, a$  je kladná konstanta);
3. parabolická úseč  $-a \leq x \leq a; \frac{x^2}{a} \leq y \leq a$  ( $a$  je kladná konstanta).



**5** Zapište následující veličiny pomocí křivkových integrálů (rozhodněte sami, jestli prvního nebo druhého druhu, všechno se odehrává v rovině):

1. elektrická intenzita v bodě  $[x; y]$  od drátu nabitého s délkovou hustotou náboje  $\rho$ ;
2. práce síly  $F$  podél nějaké křivky;
3. moment setrvačnosti křivky o délkové hustotě  $\rho$  vzhledem k ose procházející kolmo počátkem;
4. výtok kapaliny o rychlosti  $v$  skrz zadanou uzavřenou křivku za jednotku času.

**6** Spočítejte následující křivkové integrály:

1.  $\int_K (x + y) ds$ , kde  $K$  je trojúhelník s vrcholy  $[0; 0], [1; 0], [0; 1]$ ;
2.  $\int_K y^2 ds$ , kde  $K$  je oblouk cykloidy:  $x = a(\cos t + t \sin t), y = a(\sin t - t \cos t)$ , kde  $a$  je kladná konstanta a  $t$  je parametr, který se mění od  $0$  do  $2\pi$ ;
3.  $\int_K (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy$ , kde  $K$  je parabola  $y = x^2$  (pro  $-1 \leq x \leq 1$ );
4.  $\oint_K (x + y) dx + (x - y) dy$ , kde  $K$  je elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  obíhaná jednou proti směru hodin.

**7** Co se stane, když pod integrálem stojí plný diferenciál?

1. Čemu se rovná  $\int_K dF$  (pro nějakou křivku  $K$ )?
2. Čemu  $\oint_K dF$  (tj.  $K$  je uzavřená)?