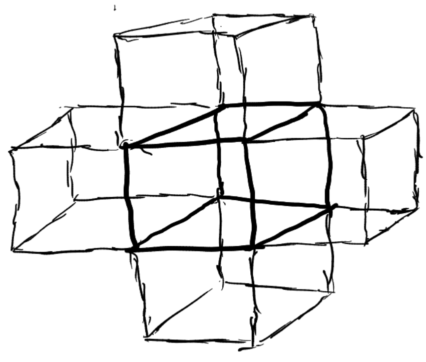
Gaussova věta

1 Představme si, že chceme integrovat po malém kvádříku o velikosti $\mathrm{d}x \times \mathrm{d}y \times \mathrm{d}z$. Řekněme, že vlevo vpředu dole je bod $[x; y; z]$. Budeme počítat tok vektorového pole $\boldsymbol{F}$ tímto kvádříkem: **1.** Zapište $\oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ jako součet šesti integrálů po jednotlivých stěnách (a dejte si pozor na znamení).
2. Dejte k sobě vždy dva a dva a dva integrály po rovnoběžných stěnách.
3. Jelikož je kvádřík velmi malý, můžeme aproximovat $\boldsymbol{F}$ diferenciálem. Proveďte to a integrály dopočítejte (mělo by to vyjít fakt jednoduše). Poznáváte ve výsledku nějaký diferenciální operátor?

4. Doplňte: $\oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \Bigg(\qquad\qquad\qquad \Bigg) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z.$



2 V následujícím obrázku je několik krychliček, které k sobě přiléhají. Řekněme, že přes každou z nich budeme chtít spočítat $\oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ jako v předchozí úloze. **1.** U stěn, kterými se krychličky stýkají, nakreslete vnější normály k oběma krychličkám. Jaký je jejich vztah?
2. Na základě nakreslených normál vysvětlete, co se stane s toky skrz sdílené stěny, když posčítáme $\oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ přes všechny krychličky.
3. Co se stane s těmi stěnami, které nesousedí s jinou krychličkou?
4. Sečteme-li příspěvky od všech krychliček, dostaneme $\iiint \left[\oiint \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z$. Z úvah v předchozím bodě vysvětlete, jak to lze napsat jiným způsobem (kde Vám v obrázku zůstanou toky, které se nezruší?) Dosaďte za $\oiint \cdots$ vyčíslení z první úlohy. Měli byste obdržet *Gaussovu větu*.

3 S pomocí Gaussovy věty hbitě vyčíslete následující toky, které jsem zadal na minulém cvičení:
1. Tok pole $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ skrz kulovou plochu $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
2. Tok $\boldsymbol{F} = (x, -2y, z)$ skrz touž plochu. **3.** Tok $\boldsymbol{F} = (x^2, y^2, z^2)$ skrz touž plochu.
4. Tok $\boldsymbol{F} = (y, z, x)$ skrz jehlan omezený rovinami $x = 0, y = 0, z = 0$ a $x + y + z = 0$.

4 Zjistěte tok vektorového pole $\boldsymbol{F} = \left(\frac{x+y}{2}; \frac{y+z}{2}; \frac{z+x}{2}\right)$ skrz kornout $x^2 + y^2 = (h - z)^2$, $0 \leq z \leq h$ (kde h je kladná konstanta). Kornout netvoří uzavřenou plochu, ale to nevadí: zkuste ho nejdřív nějak vhodně uzavřít (ideálně takovou plochou, skrz kterou bude mít $\boldsymbol{F}$ tok nulový) a pak použijte Gaussovu větu.

5 Dokažte, že každá uzavřená plocha vymezuje takový objem, jaký je roven třetině toku pole $\boldsymbol{F} = (x, y, z)$ skrz tuto plochu. Zkuste najít i jiná zajímavá vektorová pole, jejichž tok uzavřenou plochou má také nějaký vztah k vymezenému objemu.